CONTROL ÓPTIMO DISCRETO EN PRESENCIA DE RETARDOS EN LA ENTRADA Y EL ESTADO

I.Sagastabeitia*, J.Sandoval** y M. de la Sen*

* Depto. de Electricidad y Electrónica, Facultad de Ciencias, Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea, Apdo. 644, 48080 Bilbao, España.

** Depto. de Electrónica, Automática e Ingeniería de Sistemas, Escuela Superior de Ingenieros Industriales y de Telecomunicaciones, UPNA, 31006 Pamplona, España.

1. Introducción

La teoría de control discreto clásica ha sido desarrollada de forma extensa [5, 11] y usada en múltiples aplicaciones prácticas. En concreto, se ha estudiado ampliamente la realimentación óptima de variables de estado según una función de coste cuadrática, tanto para sistemas con retardos en la señal de control que fueran múltiplos del periodo de muestreo [2, 4, 10, 12] o fracciones del mismo [9], como para sistemas en cascada con retardo entre la señal de salida de uno y la entrada del siguiente [6].

En este artículo se pretende sintetizar la señal de control que optimice una función de coste cuadrática en estado y control para un sistema discreto que presente retardos tanto en la señal de control como en el propio estado. Se realiza asimismo una extensión para sistemas con referencia no nula. También se formula una solución teórica al problema de control óptimo según una función de coste dependiente de la salida en vez del estado, que da lugar a diferentes horizontes de planificación para la salida que para el control y no requiere la hipótesis de que en todo instante de muestreo (en particular, en aquellos en los que la señal de control no se pesa) la matriz de peso asociada al control en la función de coste sea definida positiva.

El trabajo está dividido como sigue: En la Sección 2 se plantea el problema que se quiere resolver. En las Secciones 3 y 4 se obtiene la ley de control óptima para un sistema que evolucione a partir de unas condiciones iniciales no nulas y con

referencia no nula, respectivamente. En la Sección 5 se estudia el problema de control óptimo para una función de coste dependiente de las salidas que permite utilizar horizontes de planificación distintos para el control y el estado. En la Sección 6 se muestran dos ejemplos del método propuesto y finalmente en la Sección 7 se detallan las conclusiones a que se llega con este trabajo.

2. Formulación del problema

Este artículo considera el sistema multivariable lineal discreto con retardos tanto en el estado $x_{(.)}$ ($d \geq 0$) como en la señal de control $u_{(.)}$ ($r \geq 0$), descrito por las ecuaciones (Figura.1)

$$\begin{aligned} x_{k+r+d+1} &= A\, x_{k+r} + B\, u_{k+d} \\ y_k &= C^t x_k \end{aligned} \qquad (2.1)$$

donde $x_{(.)} \in \Re^n$, $u_{(.)} \in \Re$, $y_{(.)} \in \Re$, $A \in (\Re^n \times \Re^n)$, $B \in \Re^n$, $C^t \in \Re^n$ y $x_k = x(kT)$, para todo $k \in Z$, con T el periodo de muestreo, y x_i: i=0, ..., r+d tienen valores prefijados por ser las condiciones iniciales, y u_i=0: i=0, ..., d-1 por ser arbitrarias.

FIGURA.1

El presente trabajo pretende diseñar un controlador digital que genere una ley de control óptima para un horizonte de planificación de N pasos. El control óptimo consistirá en generar los primeros N valores de control (u_{k+d} : k =0, 1, 2, ..., N-1) para que la salida del sistema alcance la situación de equilibrio en N periodos de muestreo. La función de coste a minimizar elegida es cuadrática en el estado y en el control y tiene la forma:

$$J = \frac{1}{2} x^t_{N+r+d} H\, x_{N+r+d} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \left[x^t_{k+r+d} Q\, x_{k+r+d} + R \right] u^2_{k+d} \qquad (2.2)$$

con Q, $H \in (\Re^n \times \Re^n)$ semidefinidas positivas, reales y simétricas, y $R \in \Re$ escalar positivo.

3. Obtención de la ley de control óptima para presencia de retardos en control y estado

En el procedimiento de minimización usado en el cálculo de variaciones, se añade a la función de coste J (2.2) las restricciones del sistema multiplicadas por unos multiplicadores de Lagrange $\lambda_k \in \Re^n$. En nuestro caso la restricción es la ecuación en diferencias que define la dinámica del sistema (2.1), así la función de coste aumentada queda:

$$J = \frac{1}{2} x^t_{N+r+d} H\, x_{N+r+d} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \Big[x^t_{k+r+d} Q\, x_{k+r+d} + u^t_{k+d} R\, u_{k+d} + \lambda^t_{k+r+d+1} (A x_{k+r} + B u_{k+d} - x_{k+r+d+1}) \Big] \qquad (3.1)$$

Usando el método de cálculo de variaciones la condición para que el valor de la función de coste J sea mínimo es que dJ=0 para valores arbitrarios de $du_{(.)}$ y $dx_{(.)}$. Calculando la función de coste incremental aumentada (3.1) y reagrupando términos teniendo en cuenta que $dx_0=...=dx_{r+d}=0$ por ser condiciones iniciales, $\lambda_0=...=\lambda_{r+d}=0$ y $\lambda_i=0$ para i>N+r+d, se tiene:

$$dJ = (x^t_{N+r+d} H - \lambda^t_{N+r+d})\, dx_{N+r+d} + \sum_{k=0}^{N+d-1} \Big[x^t_{k+r} Q - \lambda^t_{k+r} + \lambda^t_{k+r+d+1} A \Big] dx_{k+r} + \sum_{k=0}^{N-1} \Big[u^t_{k+d} R + \lambda^t_{k+r+d+1} B \Big] du_{k+d} \qquad (3.2)$$

por lo que para variaciones infinitesimales de $dx_{(.)}$ y de $du_{(.)}$ se tiene:

$$x^t_{N+r+d} H - \lambda^t_{N+r+d} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{N+r+d} = H x_{N+r+d} \qquad (3.3)$$

$$x^t_{k+r} Q - \lambda^t_{k+r} + \lambda^t_{k+r+d+1} A = 0 \quad \Rightarrow \quad Q x_{k+r} - \lambda_{k+r} + A^t \lambda_{k+r+d+1} = 0 \;, \; k=0, ..., N+d-1 \qquad (3.4)$$

$$u^t_{k+d} R + \lambda^t_{k+r+d+1} B = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{k+d} = -R^{-1} B^t \lambda_{k+r+d+1} \;, \; k=0, ..., N-1 \qquad (3.5)$$

La ley de control se obtiene despejando $\lambda_{k+r+d+1}$ de (3.4) y sustituyéndolo en (3.5) :

$$u_{k+d} = - R^{-1} B^t (A^t)^{-1} (\lambda_{k+r} - Q\, x_{k+r}) \qquad (3.6)$$

Sustituyendo la ley de control (3.6) en la ecuación de estado (2.1) y operando (3.4) se obtiene la conocida ecuación diferencial de Euler-Lagrange [8,11], que disponiéndola en forma matricial se tiene:

$$\begin{bmatrix} x_{k+r+d+1} \\ \lambda_{k+r+d+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+BR^{-1}B^t(A^t)^{-1}Q & -BR^{-1}B^t(A^t)^{-1} \\ -(A^t)^{-1}Q & (A^t)^{-1}\square \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k+r} \\ \lambda_{k+r} \end{bmatrix} \qquad (3.7)$$

Por lo tanto existe una transformación que relaciona cualquier estado x_{k+r} y multiplicador de Lagrange λ_{k+r} con el estado y el multiplicador finales x_{N+r+d} y λ_{N+r+d}. Luego existirá una relación entre el estado y el multiplicador de Lagrange para un determinado instante [3], relación conocida que se denomina transformación de Riccati:

$$\lambda_{k+r} = P_{k+r}\, x_{k+r} \qquad (3.8)$$

Del valor final del multiplicador de Lagrange (3.3) se obtiene el valor final de la matriz $P_{(.)}$:

$$P_{N+r+d} = H \qquad (3.9)$$

y de (3.4) teniendo en cuenta que los valores de los multiplicadores de Lagrange λ_i para i>N+r+d son nulos, se tienen los *d* valores de $P_{(.)}$ anteriores al final:

$$P_{k+r} = Q \qquad , k = N, ..., N+d-1 \qquad (3.10)$$

El resto de matrices y con ello la ley de control óptima se obtienen de (3.7) y (3.4) utilizando la relación (3.8):

$$P_{k+r} = Q + A^t G_{k+r+d+1} A \qquad , k = 0, ..., N-1 \qquad (3.11)$$

con

$$G_{k+r+d+1} = P_{k+r+d+1} - P_{k+r+d+1}B \left[B^tP_{k+r+d+1}B\square+\square\right]^{-1} R\, B^tP_{k+r+d+1} \qquad (3.12)$$

Para finalmente, obtener la ley de control que optimiza la función de coste (2.2), sustituyendo la ecuación (3.8) en (3.6) quedando:

$$u_{k+d} = - F_{k+r}\, x_{k+r} \qquad , k = 0, ..., N-1 \qquad (3.13)$$

con:

$$F_{k+r} = R^{-1} B^t (A^t)^{-1} (P_{k+r} - Q) \qquad (3.14)$$

Si r>d en la ley de control (3.13) se trataría de una ley no causal si se aplica directamente y por lo tanto habrá que reescribirla poniendo el estado x_{k+r} en función de estados y señales de control anteriores al instante k+d. Partiendo de la ecuación de estado (2.1), se obtiene el estado x_{k+r} en función de estado y control en instantes de muestreo anteriores:

$$x_{k+r} = A^j x_{k+r-j(d+1)} + \sum_{i=0}^{j-1} \left[A^i \square B \square u_{k-i(d+1)} \right]_{-1} \qquad (3.15)$$

con $j \in Z^+$ tal que cumpla que la ecuación (3.13) sea causal, esto es, de (3.15) $k+r-j(d+1) \leq k+d$, y por tanto:

$$j = \max(0, \rho) \; ; \; \rho = \min(z \in Z^+ : z \geq \frac{r-d}{d+1}) \qquad (3.16)$$

con lo que la ley de control (3.13) queda:

$$u_{k+d} = - F_{k+r} \left[A^j \square x_{k+r-j(d+1)} \square + \square \left[\sum_{i=0}^{j-1} A^i \square B \square u_{k-i(d+1)} \right]_{-1} \right] , \; k = 0, ..., N-1 \qquad (3.17)$$

Quedando el sistema de control representado en la Figura.2 para y_e=0.

FIGURA.2

Se observa que si $r \leq d$ entonces j=0 (3.16) y la ley de control (3.17) es equivalente a la (3.13). Y si r=d=0 igualmente será j=0 y se trataría del caso clásico, [7], cuya la ley de control es:

$$u_k = - F_k x_k \qquad , k = 0, ..., N-1 \qquad (3.18)$$

con:

$$\begin{aligned} P_N &= H \\ P_k &= A^t G_{k+1} A + Q \\ G_{k+1} &= P_{k+1} - P_{k+1} B \left[B^t \square P_{k+1} B \square \square + \right]^{-1} \square \square B^t P_{k+1} \\ F_k &= R^{-1} B^t (A^t)^{-1} (P_k - Q) \end{aligned} \qquad (3.19)$$

Para sistemas y función de coste invariantes en el tiempo, F_k , bajo condiciones generales, converge a una matriz constante según aumente el horizonte de planificación N, [1]. En la mayoría de los casos, a la hora de la implementación práctica del diseño se toma el valor estacionario de la matriz F_k para N suficientemente elevado.

4. Ley de control con referencia no nula

En este caso, se definen unas nuevas variables que representan la diferencia entre variables reales (en un instante de tiempo) y las mismas variables en el equilibrio:

$$\begin{aligned} x'_k &= x_k - x_e \\ u'_k &= u_k - u_e \end{aligned} \qquad (4.1)$$

con x_e y u_e el estado y la señal de control en el equilibrio, respectivamente. Sustituyendo (4.1) en la ecuación de estado (2.1) y teniendo en cuenta que en el equilibrio $x_e=Ax_e+Bu_e$ se tiene:

$$\begin{aligned} x'_{k+r+d+1} &= A\, x'_{k+r} + B\, u'_{k+d} \\ y'_k &= C\, x'_k \end{aligned} \qquad (4.2)$$

y por lo tanto la ley de control óptima para la función de coste (2.2) tendrá la misma forma (3.17) que para el sistema (2.1) pero con las variables primadas (4.1):

$$u'_{k+d} = - F_{k+r} \left[A^j \cdot x'_{k+r-j(d+1)} + \left[\sum_{i=0}^{j-1} A^i B \cdot u'_{k-i(d+1)} \right]_{-1} \right] \qquad (4.3)$$

con las matrices $F_{(.)}$, $P_{(.)}$ y $G_{(.)}$ dadas por (3.14), (3.11) y (3.12), respectivamente.

Despejando la señal de control u_{k+d} de (4.3) teniendo en cuenta (4.1) se tiene:

$$u_{k+d} = g_{k+r} - F_{k+r} \left[A^j \cdot x_{k+r-j(d+1)} + \left[\sum_{i=0}^{j-1} A^i B \cdot u_{k-i(d+1)} \right]_{-1} \right] \qquad (4.4)$$

con

$$g_{k+r} = \left[I + F_{k+r} \sum_{i=0}^{j-1} A^i B \right] u_e + F_{k+r} A^j x_e \qquad (4.5)$$

que es la suma de dos términos, el segundo , la realimentación dependiente del sistema (2.1), y el primero, g_{k+r} que es función de la referencia o salida deseada del sistema en lazo cerrado.

Despejando u_e de (4.5), sustituyéndolo en la ecuación de estado en equilibrio y despejando x_e se obtiene:

$$x_e = \left[I - A + \omega_{k+r} F_{k+r} A^j\right]^{-1} \omega_{k+r} F_{k+r} g_{k+r} A^j \qquad (4.6)$$

con $\omega_{k+r} = B\left[I + F_{k+r} \sum_{i=0}^{j-1} B\right]^{-1}$. Y finalmente, sustituyendo (4.6) en la ecuación de salida en equilibrio se obtiene:

$$y_e = C x_e = T^{-1}_{k+r} g_{k+r} \qquad (4.7)$$

con $T^{-1}_{k+r} = C\left[I - A + \omega_{k+r} F_{k+r} A^j\right]^{-1} \omega_{k+r}$ y de esta forma se puede obtener definitivamente la ley de control (4.4):

$$u_{k+d} = T_{k+r}\, y_e - F_{k+r}\left[A^j x_{k+r-j(d+1)} + \left[\sum_{i=0}^{j-1} A^i B\, u_{k-i(d+1)}\right]\right] \qquad (4.8)$$

con j dado en (3.16) y quedando el sistema de control óptimo reflejado en la Figura.2. Utilizando la matriz estacionaria $F_k = F_e$ la ley de control (4.8) quedaría de la forma:

$$u_{k+d} = T_e\, y_e - F_e\left[A^j x_{k+r-j(d+1)} + \left[\sum_{i=0}^{j-1} A^i B\, u_{k-i(d+1)}\right]\right] \qquad (4.9)$$

con

$$T^{-1}_e = C\left[I - A + \omega_e F_e A^j\right]^{-1} \omega_e \qquad \text{y} \qquad \omega_e = B\left[I + F_e \sum_{i=0}^{j-1} B\right]^{-1} \qquad (4.10)$$

En la Sección 6, se presentan algunos ejemplos simulados con esta estrategia de control.

5. Ley de control óptima para función de coste cuadrática en función de la salida y el control.

5.1 Caso de planta sin retardos

Se pretende obtener la ley de control que optimice la siguiente función de coste dependiente de las salidas y del control:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{i=1}^{n} (h_i y_{k+i})^2 + m u_k^2 \right] \qquad (5.1)$$

con $h_i \in \Re$ y $m \in \Re^+$, para el sistema (2.1) sin retardos (r=d=0). Teniendo en cuenta (2.1) y operando se tiene:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i=1}^{n} \left[x_{k+i}^t C h_i C^t x_{k+i} + m u_k^2 \right] = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N+n-1} x_k^t \hat{h}_k x_k + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} u_k^t m u_k \qquad (5.2)$$

con $\hat{h}_k = \sum_{i=1}^{n} C h_i C^t$ para k=1, ..., N y $h_i = 0$ para i>n, $\hat{y}_k = \sum_{i=k-N+1}^{n} C h_i C^t$ para k=N+1, ..., N+n-1. Obteniéndose por tanto una función de coste cuadrática en estado y control con diferentes horizontes de planificación para ambos, no pudiéndose extender el del control por tener que ser definida positiva la matriz m asociada al mismo, por tanto, no puede tratarse directamente la función de coste (5.1). Habrá entonces que modificarla para poder obtener la ley de control óptima. Redefiniendo el vector de estado y operando el índice J de coste se puede poner:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\hat{x}_{k+n}^t \hat{Q} \hat{x}_{k+n} + m u_k^2 \right] \qquad (5.3)$$

siendo

$$\hat{x}_{k+n} = \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ x_{k+2} \\ \dots \\ x_{k+n} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \hat{Q} = \begin{bmatrix} C h_1 C^t & \cdots & 0_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_n & \cdots & C h_n C^t \end{bmatrix} = \hat{Q}^t \qquad (5.4)$$

con 0_n indicando una matriz de ceros de orden n×n, $\hat{x}_{(.)} \in \Re^{n^2}$ el nuevo vector de estado, y $\hat{Q} \in (\Re^{n^2} \times \Re^{n^2})$. Al igual que en la Sección 3, en el procedimiento usado en

el cálculo de variaciones, se deberá incrementar la función de coste con las restricciones multiplicadas por multiplicadores de Lagrange. En este caso existirán dos restricciones, la primera corresponde a la ligadura del nuevo vector de estado en dos instantes consecutivos, esto es:

$$D^t \hat{x}_{k+n-1} = E^t \hat{x}_{k+n} \tag{5.5}$$

siendo

$$D^t = \begin{bmatrix} 0_n & I_n & \dots & 0_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0_n & 0_n & \dots & I_n \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad E^t = \begin{bmatrix} I_n & \dots & 0_n & 0_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0_n & \dots & I_n & 0_n \end{bmatrix} \tag{5.6}$$

con I_n indicando la matriz identidad $n \times n$, $D, E \in (\Re^{n^2} \times \Re^{n^2-n})$. Y la segunda restricción corresponde a la ecuación de estado (2.1) del sistema, que operando se puede poner en función del nuevo vector de estado:

$$M^t \hat{x}_{k+n} = A\, M^t \hat{x}_{k+n-1} + B\, u_k \tag{5.7}$$

siendo

$$M^t = \begin{bmatrix} I_n & 0_n & \dots & 0_n \end{bmatrix} \tag{5.8}$$

con $M \in (\Re^{n^2} \times \Re^{n})$. Quedando la función de coste extendida:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \Big[\hat{x}^t_{k+n} \hat{Q}\, \hat{x}_{k+n} + mu^2_k + \lambda^t_{k+1} (A M^t \hat{x}_{k+n-1} + B u_k - M^t \hat{x}_{k+n}) + \mu^t_{k+1} (D^t \hat{x}_{k+n-1} - E^t \hat{x}_{k+n}) \Big] \tag{5.9}$$

con $\lambda_{(.)} \in \Re^n$ y $\mu_{(.)} \in \Re^{n^2-n}$ los multiplicadores de Lagrange. Diferenciando e igualando a cero, y para variaciones infinitesimales de $d\hat{x}_{(.)}$ y de $du_{(.)}$, se tiene:

$$\begin{aligned}
&\hat{x}^t_{N+n-1} \hat{Q} - \lambda^t_N M^t - \mu^t_N E^t = 0 \\
&\lambda^t_1 A M^t + \mu^t_1 D^t = 0 \\
&\hat{x}^t_{k+n-1} \hat{Q} - \lambda^t_k M^t - \mu^t_k E^t + \lambda^t_{k+1} A M^t + \mu^t_{k+1} D^t = 0 \qquad , k=1, \dots, N-1 \\
&u^t_k m + \lambda^t_{k+1} B = 0 \qquad , k=0, \dots, N-1
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Agrupando los multiplicadores en vectores extendidos, tal que $\hat{\lambda}^t_k = \begin{bmatrix} \lambda^t_k & \mu^t_k \end{bmatrix} \in \Re^{n^2}$ las ecuaciones (5.10) quedan:

$$\hat{Q}\hat{x}_{N+n-1} - \hat{F}\hat{\lambda}_N = 0 \tag{5.11a}$$
$$\hat{G}\hat{\lambda}_1 = 0 \tag{5.11b}$$
$$\hat{Q}\hat{x}_{k+n-1} + \hat{G}\hat{\lambda}_{k+1} = \hat{F}\hat{\lambda}_k \tag{5.11c}$$
$$u_k = -\hat{m}\hat{\lambda}_{k+1} \tag{5.11d}$$

siendo

$$\hat{F}=\left[M \mid E \right] , \qquad \hat{G}=\left[MA^t \mid D \right] \quad y \quad \hat{m}=\left[m^{-1}B^t \mid 0 \right] \tag{5.12}$$

con $\hat{F}, \hat{G} \in (\Re^{n^2} \times \Re^{n^2})$ y $\hat{m}^t \in \Re^{n^2}$. Suponiendo que se cumple la relación de Riccati:

$$\hat{\lambda}_k = \hat{P}_k \hat{x}_{k+n-1} \tag{5.13}$$

con $\hat{P}_k \in (\Re^{n^2} \times \Re^{n^2})$, se obtiene de (5.11) y (5.7), utilizando (5.13):

$$\left[M^t \hat{P}_{k+1}^{-1} + \hat{B}\hat{m} \right] \hat{G}^{-1} \left[\hat{Q} - \hat{P}_k \hat{F} \right] = AM^t \tag{5.14}$$

que es la ecuación en diferencias de Riccati para el sistema modificado (5.7) con la función de coste (5.1) y mediante resolución de forma iterativa utilizando (5.11a) y (5.11b) se obtiene la matriz $\hat{P}_k$.

<u>Suposición 1</u>: Supóngase que $\text{rango}\left[M^t \hat{P}_{k+1}^{-1} + \hat{B}\hat{m} \right] = n$, que utilizando (5.12) implica $\text{rango}\left\{ M^t \hat{P}_{k+1}^{-1} + \hat{B}\hat{m} \left[m^{-1} B B^t \; 0_{n \times n^2} \right] \right\} = \text{rango}\left\{ \left[M^t \; m \right] \begin{bmatrix} \hat{P}_{k+1}^{-1} \\ BB^t \quad 0_{nx(n^2-n)} \end{bmatrix} \right\} = n \leq$ $\text{Min}\left\{ \text{rango}\left[M^t \; m^{-1} \right], \text{rango} \begin{bmatrix} \hat{P}_{k+1}^{-1} \\ BB^t \quad 0_{nx(n^2-n)} \end{bmatrix} \right\}$, como $\hat{P}_{k+1}$ tiene inversa el rango de $\begin{bmatrix} \hat{P}_{k+1}^{-1} \\ BB^t \quad 0_{nx(n^2-n)} \end{bmatrix}$ es n^2, entonces es condición necesaria de cumplimiento de la suposición la condición $\text{rango}\left[M^t \; m \right] = n$, que siempre se cumple estructuralmente. En las expresiones anteriores 0 indica una matriz de ceros de orden igual al subindexado.

Aunque en (5.14) aparecen matrices que no son cuadradas, el sistema algebraico (5.14) es resoluble en la matriz incógnita $\left[\hat{Q} - \hat{P}_k \hat{F} \right]$ (y por lo tanto en $\hat{P}_k$) ya que en virtud del test de Rouché-Froebenius de Álgebra lineal,

rango $\left[M^t \hat{P}_{k+1}^{-1} + \hat{B}\right] \hat{m} \hat{G}^{-1}$ = rango $\left[\left(M^t \hat{P}_{k+1}^{-1} + \hat{B}\right) \hat{m} \hat{G}^{-1} \mid -AM\right]$ = n (n=nº de filas de $\left[M^t \hat{P}_{k+1}^{-1} + \hat{B}\right] \hat{m}$). El sistema (5.14) aunque consistente en virtud del test, no será necesariamente compatible determinado implicando unicidad de solución. La solución en cada caso concreto podría pues calcularse computacionalmente.

La ley de control se obtiene de (5.11d) y (5.11c) utilizando (5.13):

$$u_k = -\hat{m}\hat{G}^{-1}\left(\hat{F}\hat{P}_k - \hat{\Omega}\right)\hat{x}_{k+n-1} = -\hat{F}_k \hat{x}_{k+n-1} = -\sum_{i=1}^{n} \hat{\Phi}_k^i F x_{k+i-1} \qquad (5.15)$$

con $\hat{F}_k = \hat{m}\hat{G}^{-1}\left(\hat{F}\hat{P}_k - \hat{\Omega}\right) = \left[\hat{F}_k^1 \; \hat{F}_k^2 \; \ldots \; \hat{F}_k^n\right] \in \Re^{n^2}$ y $\hat{F}_k^i \in \Re^n$, para i=1,...,n. Siendo una ley de control no causal que habrá que operar para que sea aplicable. Para solventarlo se pone el estado x_{k+i-1} en función del estado x_k y de la señal de control en instantes de muestreo anteriores:

$$x_{k+i-1} = A^{i-1}\left[x_k + \sum_{j=1}^{i-1} A^j B u_{k+j-1}\right] \qquad (5.16)$$

y la ley de control (5.15) queda:

$$u_k = -\tilde{F}_k x_k - \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} \tilde{m}_k^{ij} u_{k+j-1} \qquad , k = 0, ..., N-1 \qquad (5.17)$$

con $\tilde{F}_k = \sum_{i=1}^{n} \hat{\Phi}_k^i F A^{i-1} \in \Re^n$ y $\tilde{m}_k^{ij} = \hat{F}_k^i A^{i-j-1} B \in \Re$. Esta ley de control sigue siendo no causal, pero se trata de un sistema de N ecuaciones con N incógnitas que es resoluble como se ve a continuación, esto es

$$\begin{aligned}
u_0 &= f(x_0, u_0, u_1, ..., u_{n-2}) \\
u_1 &= f(x_1, u_1, u_2, ..., u_{n-1}) \\
u_2 &= f(x_2, u_2, u_3, ..., u_n) \\
&... \\
u_{N-1} &= f(x_{N-1}, u_{N-1}, u_N, ..., u_{n+N-3})
\end{aligned} \qquad (5.18)$$

Si se considera u_k=0 para todo k≥N (equilibrio), bastará resolver la última ecuación que es causal, obteniéndose la última señal de control no nula necesariamente u_{N-1}:

$$u_{N-1} = -\left[1+\sum_{i=2}^{n}\tilde{m}^{i1}_{N-1}\right]^{-1}\tilde{F}_{N-1}\,x_{N-1} = \bar{F}_{N-1}\,x_{N-1} \qquad (5.19)$$

posteriormente, se obtiene u_{N-2} (5.17), utilizando u_{N-1} (5.19):

$$u_{N-2} = -\left[1+\sum_{i=2}^{n}\tilde{m}^{i2}_{N-2}+\left(\sum_{i=3}^{n}\tilde{m}^{i2}_{N-2}\right)\bar{F}_{N-1}B\right]^{-1}\left[-\tilde{F}_{N-2}-\left(\sum_{i=3}^{n}\tilde{m}^{i2}_{N-2}\right)\bar{F}_{N-1}A\right]x_{N-2} =$$
$$= \bar{F}_{N-2}\,x_{N-2} \qquad (5.20)$$

y así sucesivamente hasta llegar a u_0, quedando todas las señales de control dependiendo únicamente del estado en el mismo instante, obteniéndose la ley de control causal:

$$u_k = \bar{F}_k\,x_k \qquad , k = 0, ..., N-1 \qquad (5.21)$$

habiéndose calculado previamente los valores de $\bar{F}_{N-1}$, $\bar{F}_{N-2}$, ..., $\bar{F}_0$.

5.2 Caso de planta con retardos en control y estado

En el caso de que existan retardos el método de la sección anterior es aplicable con la introducción adicional del sistema extendido de la planta definiendo el estado y el control extendidos:

$$\tilde{x}^t_k = \left[x^t_k, x^t_{k-1}, ..., x^t_{k-d}\right]$$
$$\tilde{u}^t_k = \left[u^t_k, u^t_{k-1}, ..., u^t_{k-r}\right] \qquad (5.22)$$

que permitirían reformular la función de coste (5.3) con la redefinición de los vectores de estado y control extendidos con $\hat{x}_k$ y $\hat{u}_k=\tilde{u}_k$, con

$$\hat{x}^t_k = \left[\tilde{x}^t_{k-n+1}, \tilde{x}^t_{k-n+2}, ..., \tilde{x}^t_k\right] \qquad (5.23)$$

con lo que el método de la Sección 5.1 puede ser reaplicado con el nuevo $\hat{x}_k$ y el cambio $u_k \rightarrow \hat{u}_k=\tilde{u}_k$.

6. Ejemplos

Se van a tomar dos sistemas inestables en lazo abierto, el primero sin oscilaciones y el segundo con respuesta oscilatoria. Además el sistema en lazo abierto del

segundo es inestable y es estabilizado en lazo cerrado por aplicación del control óptimo como cabe esperar de la teoría.

Ejemplo 1: Las ecuaciones de estado del sistema en lazo abierto son

$$x_{k+5} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.3 & 1.7 \end{bmatrix} x_{k+3} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_{k+1}$$

$$y_k = \begin{bmatrix} -1.7 & 1 \end{bmatrix} x_k \qquad (6.1)$$

con $u_0=x_0=\ldots=x_4=0$ condiciones iniciales, T=0.1 seg. el periodo de muestreo y función de transferencia:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{(z+1.3038)(z-1.3038)}{z^2(z+1.2247)(z-1.2247)(z+0.4472)(z-0.4472)} \qquad (6.2)$$

Examinando la ecuación (2.1) se observa que el sistema (6.1) presenta retardo en el estado d=1 y en la señal de control r=3. La simulación temporal del mismo se puede observar en la Figura.4.a. Si se desea que la salida siga a una entrada constante unitaria, la ley de control que para N=6 optimice la función de coste (2.2) con $H=\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$, $Q=\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ y R=1 viene dada por (4.8) donde j=1 según (3.16)

$$u_{k+1} = T_{k+3} y_e - F_{k+3} \left[A x_{k+1} + B u_{k-1} \right] \qquad , k=0, \ldots, 5 \qquad (6.3)$$

La obtención de las matrices $F_{(.)}$ se realiza partiendo de (3.9) $P_{10}=H$ y (3.10) $P_9=Q$ y de forma repetitiva aplicando (3.14), (3.11) y (3.12), véase Figura.3, se obtiene el valor estacionario de $F_{(.)}$ y con (4.10) el de $T_{(.)}$

$$F_e = F_3 = \begin{bmatrix} -0.2780 & 1.5414 \end{bmatrix}$$

$$T_e = T_3 = \begin{bmatrix} -1.2334 \end{bmatrix} \qquad (6.4)$$

Si se realiza el control con la realimentación F_k constante (6.4) el sistema ante entrada escalón unitario y condiciones iniciales nulas se comporta de la forma que se ve en la Figura.4.b. Se puede notar igualmente que debido al retardo en el estado d=1 la primera señal de control válida es $u_1=u(0.1)$ y por existir retardo en la señal de control r=3 el primer estado con influencia es $x_3=x(0.3)$ que actúan sobre el estado $x_5=x(0.5)$ que es el primero diferente de cero (las condiciones iniciales se han tomado nulas). Se observa asimismo que antes del instante t=(N+r+d)T=1.0 seg. se ha alcanzado el estado final como se pretendía al elegir

dicho estado como final en la función de coste (2.2). Examinando la señal de control aplicada, en la Figura.4.b, se ve que no toma en ningún momento valores desproporcionados, debido a la elección del parámetro R en la función de coste (2.2).

Modificando las matrices H, Q y R se podría obtener una evolución temporal más acorde a otras características, como podrían ser menor oscilaciones en la salida o en el control, o mayor rapidez en alcanzar el equilibrio, etc.

FIGURAS .3 Y .4

Ejemplo 2: Sea un sistema cuyas ecuaciones de estado son

$$x_{k+4} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1.4884 & -2.4 \end{bmatrix} x_{k+2} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u_{k+1}$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x_k \qquad (6.5)$$

con $u_0=x_0=\ldots=x_3=0$, periodo de muestreo T=0.1 seg. y comparando con (2.1) retardos d=1 y r=2. En la Figura.6.a se puede observar la simulación temporal ante entrada escalón.

La ley de control óptima para N=8, $H=\begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}$, $Q=\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$ y R=1 es

$$u_{k+1} = T_{k+2} y_e - F_{k+2} \left[A \cdot x_k + \ldots \right] B \cdot u_{k-1}, \; k=0, \ldots, 7 \qquad (6.6)$$

Partiendo de $P_{11}=H$ y $P_{10}=Q$ y de forma repetitiva aplicando (3.14), (3.11), (3.12) y (4.10), véase Figura.5, se obtiene los valores estacionarios de $F_{(.)}$ y de $T_{(.)}$

$$F_e = F_2 = \begin{bmatrix} -0.6248 & -0.8508 \end{bmatrix}$$

$$T_e = T_2 = \begin{bmatrix} 2.1090 \end{bmatrix} \qquad (6.7)$$

En la Figura.6.b se muestra el comportamiento del sistema ante entrada escalón unitario y condiciones iniciales nulas realizando el control con la realimentación constante F_e. Así mismo, se observa que el primer estado no nulo es $x_4=x(0.4)$ debido a los retardos d=1 y r=2, como se ha visto en el ejemplo 1. Igualmente, el estacionario se alcanza dentro del horizonte de planificación elegido inicialmente.

FIGURAS .5 Y .6

7. Conclusiones

Se ha presentado en este artículo una modificación de la ley de control óptima para sistemas discretos y función de coste cuadrática en estado y control, debido a la presencia de retardos internos del sistema. Dicha modificación influye en la condición final de la matriz solución de la ecuación algebraica de Riccati, de tal forma que no solo se fija el valor de dicha matriz para el estado final sino para tantos estados finales como sea el retardo interno del estado d. Se ha experimentado el diseño mediante simulaciones de ejemplos. Igualmente se ha presentado una ley de control que optimiza una función de coste dependiente de la salida y el control, con diferente horizonte de planificación para cada una de ellas, y que , bajo la óptica de la función de coste usual, simplifica las hipótesis al no requerir que el peso asociado al control sea positivo para todo instante de muestreo.

Referencias

[1] Astrom, K.J. and Wittenmark, B., Computer Controlled Systems, Prentice-Hall, 1990.

[2] Bernstein, D.S., Davis, L.D. and Greeley, S.W., The Optimal Projection Equations for Fixed-Order Sampled-Data Dynamics Compensation with Computation Delay, IEEE Trans. Autom. Control, vol. AC-31, pp. 859-862, 1986.

[3] Bryson, A.E. and Ho, Y.C., Applied Optimal Control, Wiley, 1975.

[4] Dorato, P. and Levis, A., Optimal Linear Regulators: The Discrete Case, IEEE Trans. Autom. Control, vol. AC-16, pp. 613-620, 1971.

[5] Franklin, G.F. , Powell, J.D. and Workman, M.L., Digital Control of Dynamics Systems, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1990.

[6] Fujinaka, T. and Araki, M., Discrete-Time Optimal Control of Systems with Unilateral Time-Delays, Automatica, vol. 23, nº 6, pp. 763-765, 1987.

[7] Jacquot, R.G., Modern Digital Control Systems, Marcel Dekker, New York, 1981.

[8] Katz, P., Digital Control Using Microprocessors, Prentice-Hall, 1981.

[9] Kondo, R. and Furuta, K., Sampled-Data Optimal Control of Continuous Systems for Quadratic Criterion Function Taking Account of Delayed Control Action, Int. J. Control, vol.41, nº.4, pp.1051-1060, 1985.

[10] Levis, A.H., Athans, M. and Schlueter, R., On the Behavior of Optimal Linear Sampled-Data Regulators, Int. J. of Control, vol. 13, pp. 343-361, 1971.

[11] Middleton, R.H. and Goodwin, G.C., Digital Control and Estimation: A Unified Approach, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1990.

[12] Mita, T., Optimal Digital Feedback Control Systems Counting Computation Time of Controls Laws, IEEE Trans. Autom. Control, vol AC-30, pp. 542-548, 1985.

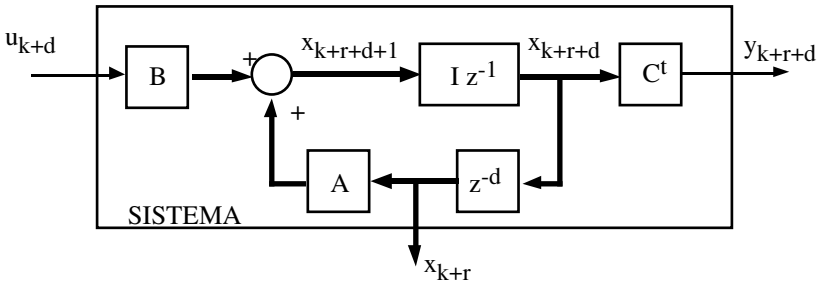

Figura.1: Diagrama de bloques del sistema discreto con retardo en estado y control, en lazo abierto.

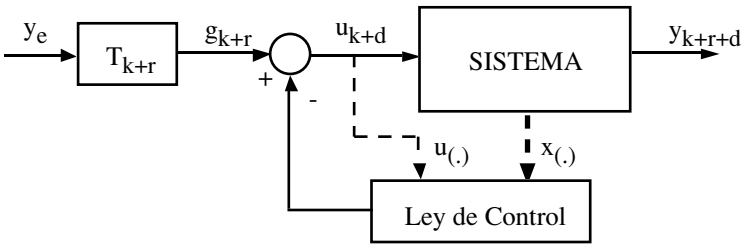

Figura.2: Diagrama de bloques del sistema realimentado con control óptimo

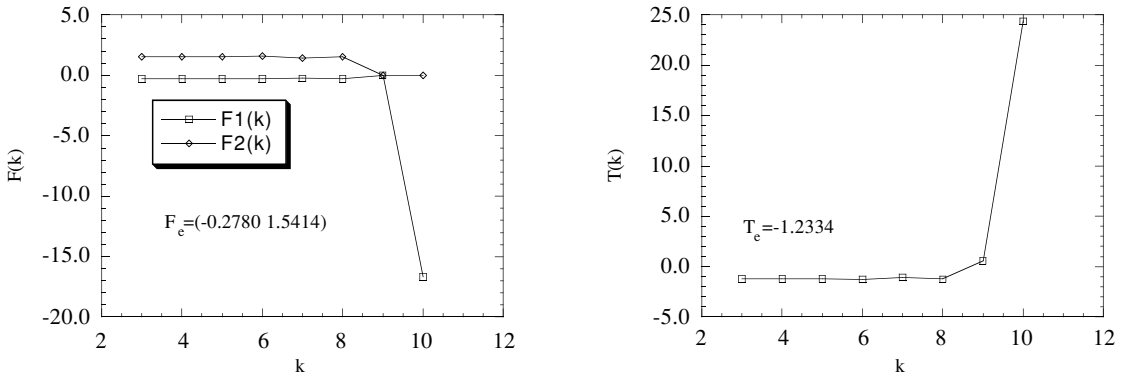

Figura.3: Ejemplo 1. Evolución de la ganancia de (a) la realimentación F(k) y (b) la entrada T(k).

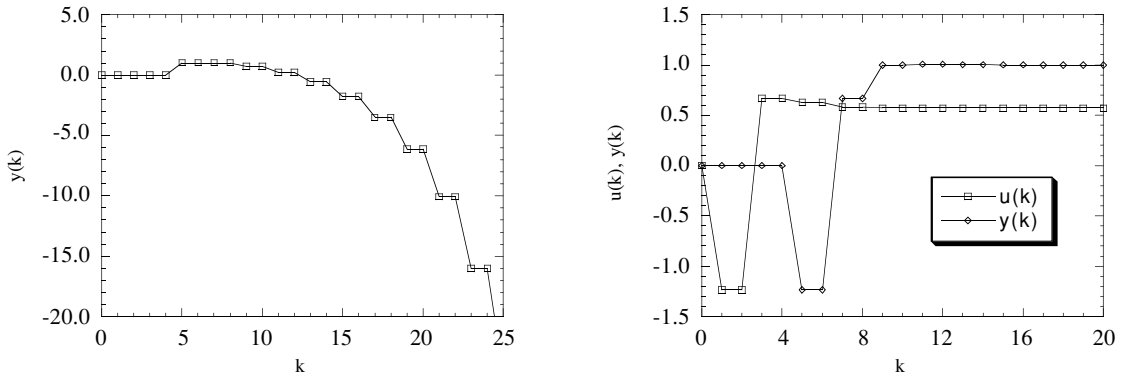

Figura.4: Respuestas temporales del sistema del ejemplo 1: (a) en lazo abierto sin realimentación y, (b) del sistema realimentado con el control óptimo.

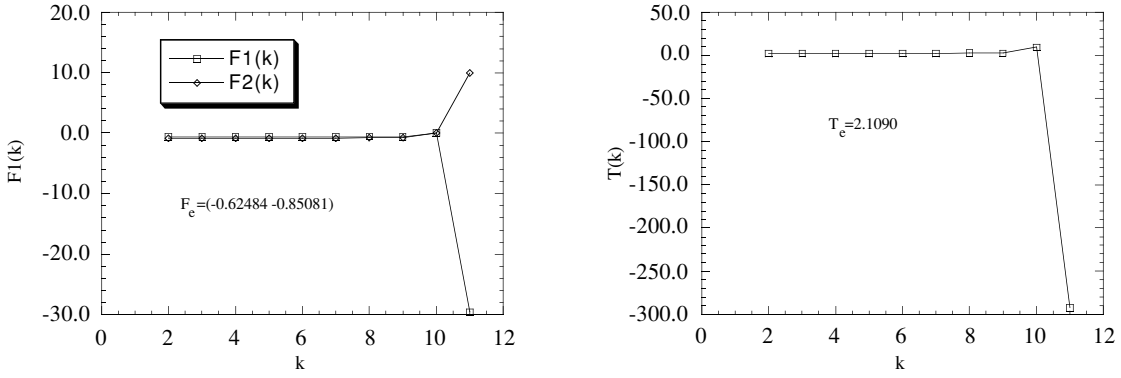

Figura.5: Ejemplo 2. Evolución de la ganancia de (a) la realimentación F(k) y (b) la entrada T(k).

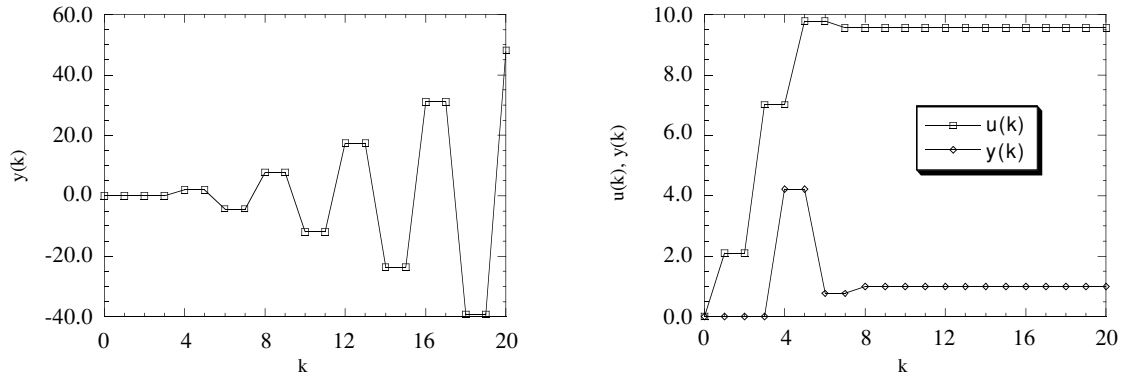

Figura.6: Respuestas temporales del sistema del ejemplo 2 (a) en lazo abierto sin realimentación y, (b) del sistema realimentado con el control óptimo.