ISLAS DE ÓRBITAS PERIÓDICAS EN UN SISTEMA ELECTRÓNICO

A.J. Rodríguez–Luis, E. Freire, E. Gamero, L. Pizarro y F. Fernández.

Departamento de Matemática Aplicada II, Universidad de Sevilla,
E.S.Ingenieros, Avda Reina Mercedes s/n, 41012 Sevilla.

Abstract

The aim of the present work is to describe the bifurcation behaviour of a kind of periodic orbits, in an electronic oscillator, organized in isolas. These periodic orbits appear in a region of the bifurcation plane where a Shil'nikov homoclinic connection exists.

1 Introducción

La gran variedad de comportamientos dinámicos exhibidos por algunos circuitos electrónicos ha hecho que estos dispositivos se hayan estudiado ampliamente. Uno de los motivos que justifica la riqueza de soluciones, tanto periódicas como aperiódicas, es la presencia de homoclinas tipo Shil'nikov (para ver ejemplos de su aparición y consecuencias en campos tan diversos como biología matemática, química, mecánica de fluidos, electrónica y teoría de probabilidades, véase el volumen *Homoclinic Chaos* [5] y las referencias que en él aparecen). Fue en varios trabajos a finales de los años 60 cuando L.P. Shil'nikov analizó bifurcaciones homoclinas en sistemas generales n-dimensionales (de E.D.O.s) y encontró que si el equilibrio tiene autovalores complejos que satisfacen ciertas condiciones, entonces hay un número infinito de bifurcaciones silla–nodo de órbitas periódicas cerca de dicha órbita homoclina para valores próximos de los parámetros. En trabajos posteriores se completaron los resultados originales de Shil'nikov (ver los textos de Guckenheimer y Holmes [8] y Wiggins [12]). Es precisamente en el escenario organizado por las homoclinas tipo Shil'nikov en el que hacen acto de presencia las órbitas periódicas objeto de nuestro estudio si bien, como veremos, no aparecen conectadas vía bifurcaciones, con ellas.

2 Descripción del Modelo

El sistema electrónico, objeto de nuestro estudio aparece representado en la figura 1, en la que podemos observar que consiste en el acoplamiento, mediante la conductancia no lineal G_2, de dos circuitos: un circuito paralelo RCL (conductancia no lineal G_3, inductancia L y capacidad C), y un circuito paralelo RC (conductancia no lineal G_1 y capacidad C_0). Diferentes elecciones para las conductancias no lineales G_1, G_2, G_3 dan lugar a diversos sistemas particulares, previamente estudiados.

En el caso de G_1 conductancia no lineal negativa (tipo oscilador de Van der Pol), G_2 conductancia no lineal positiva —realizable físicamente mediante la asociación en paralelo de dos grupos de diodos, polarizados en oposición— y G_3 conductancia puramente lineal, tenemos el sistema originalmente propuesto por Shinriki *et alii* [11] como un oscilador que genera *ondas aleatorias*. El análisis realizado por dichos autores se reduce a simulaciones numéricas y alguna experimentación; no llevan a cabo ningún estudio teórico de las ecuaciones de estado e incluso el análisis empírico realizado es incompleto. Un estudio más completo de la dinámica del mencionado sistema puede encontrarse en Freire *et alii* [2].

En el caso de G_1 conductancia no lineal negativa (tipo oscilador de Van der Pol), G_2 conductancia lineal y G_3 conductancia nula se obtendría el llamado *circuito de Chua* (ver Madan [9] y sus referencias).

Las ecuaciones de estado del circuito son

$$\begin{aligned} C_0\frac{dv_1}{d\tau} &= -i_1(v_1) + i_2(v_2 - v_1) \\ C\frac{dv_2}{d\tau} &= -i_L - i_2(v_2 - v_1) - i_3(v_2) \\ L\frac{di_L}{d\tau} &= v_2 \end{aligned} \tag{1}$$

donde las variables de estado son v_1, v_2, i_L. Las dos primeras, v_1, v_2, representan las tensiones en los condensadores, mientras que i_L corresponde a la intensidad en la bobina. Además, $i_1(v_1), i_2(v_2 - v_1), i_3(v_2)$ representan a la intensidad como función de la correspondiente tensión para las conductancias no lineales. Asumiremos que estas funciones verifican $i_1(0) = i_2(0) = i_3(0) = 0$ y también $i_j(-v) = -i_j(v)$ para $j = 1, 2, 3$, y para ellas consideramos los siguientes desarrollos formales:

$$\begin{aligned} i_1(v_1) &= \mu_1 v_1 + \tilde{a}_3 v_1^3 + \tilde{a}_5 v_1^5 + \cdots \\ i_2(v_2 - v_1) &= \mu_2(v_2 - v_1) + \tilde{b}_3(v_2 - v_1)^3 + \tilde{b}_5(v_2 - v_1)^5 + \cdots \\ i_3(v_2) &= \mu_3 v_2 + \tilde{c}_3 v_2^3 + \tilde{c}_5 v_2^5 + \cdots \end{aligned} \tag{2}$$

Con estas hipótesis sobre i_1, i_2, i_3, el sistema (1) es invariante al cambio de signo en las variables $(x, y, z) \to (-x, -y, -z)$, propiedad que condicionará la dinámica del sistema.

El análisis efectuado por Gamero [4] pone de manifiesto que los candidatos naturales a ser tomados como parámetros de bifurcación son μ_1, μ_2, μ_3, es decir, las aproximaciones lineales a las características tensión–intensidad de las conductancias G_1, G_2, G_3, los cuales pueden ser fácilmente variados mediante los correspondientes potenciómetros. Además, siguiendo a Gamero [4] vamos a restringirnos a considerar el caso $i_3(v_2) \equiv 0$, asumiendo $\tilde{a}_i \geq 0, \tilde{b}_i \geq 0$ para todo $i = 3, 5, \ldots$

Si llamamos ahora $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, vamos a realizar en el sistema (1) un escalado en el tiempo: $t = \omega\tau$. Además, tomaremos como nuevas variables de estado:

$$x = v_1 \ , \quad y = v_2 \ , \quad z = \frac{i_L}{\omega C}$$

Por último, escalamos los parámetros del sistema:

$$r = \frac{C_0}{C} \ , \quad \nu = \frac{\mu_1}{\omega C} \ , \quad \beta = \frac{\mu_2}{\omega C}$$

$$a_i = \frac{\tilde{a}_i}{\omega C} \ , \quad b_i = \frac{\tilde{b}_i}{\omega C} \ , \qquad\qquad i = 3, 5, \ldots$$

De la expresión de r deducimos que ha de ser $r > 0$, asimismo resulta $a_i \geq 0$, $b_i \geq 0$ para $i = 3, 5, \ldots$ Con esta notación, estudiaremos el sistema (1) cortado a quinto orden, el cual adopta la forma

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= -\left(\frac{\nu + \beta}{r}\right) x + \frac{\beta}{r} y - \frac{a_3}{r} x^3 + \frac{b_3}{r}(y - x)^3 - \frac{a_5}{r} x^5 + \frac{b_5}{r}(y - x)^5 \\
\dot{y} &= \beta x - \beta y - z - b_3(y - x)^3 - b_5(y - x)^5 \\
\dot{z} &= y
\end{aligned} \tag{3}$$

En lo que sigue tomaremos como parámetros de bifurcación a ν y β, fijando los otros con los siguientes valores: $r = 0.6$, $a_3 = 0.328578$, $b_3 = 0.933578$, $a_5 = b_5 = 0$.

El conjunto de bifurcaciones (que aparece en la figura 3 del trabajo de Freire et alii [3], y en la figura 4.4.1 de la Tesis de Rodríguez Luis [10]) tiene como centro organizador, en la zona de interés ($\nu < 0$, $\beta > 0$), a una bifurcación de Takens–Bogdanov TB no degenerada de la que surgen una curva de Hopf de los equilibrios no triviales h, una de homoclinas del origen HP y otra de silla–nodo de órbitas periódicas sn. Además del punto TB, que surge como consecuencia de la intersección entre una bifurcación pitchfork de equilibrios PI y una Hopf del origen H, aparecen otros dos puntos de codimensión dos. El primero, DH, corresponde a una degeneración en la bifurcación de Hopf H, como consecuencia de la cual surge una curva de silla–nodo de órbitas periódicas SN. El segundo, HS, es un punto de Hopf–Shil'nikov, que aparece al intersecar la curva de homoclinas HP con una curva de Hopf del origen ($\beta = 0$). Por último, la curva punteada RI separa las regiones en las que los tres autovalores del origen son reales o aparece un par complejo conjugado, mientras que las curvas D1 y D2 indican la entrada de la conexión homoclina en la zona de Shil'nikov.

3 Tipos de Órbitas Periódicas

Como es bien conocido (ver introducción), el que la homoclina sea del tipo Shil'nikov hace que aparezcan una gran riqueza de comportamientos tanto periódicos como aperiódicos. Cuando dibujamos un diagrama de bifurcaciones (en nuestro caso movemos el parámetro ν y dejamos fijo β) las órbitas periódicas aparecen organizadas en ramas. En concreto, vamos a clasificar dichas órbitas periódicas en tres tipos, dependiendo del *origen* y *final* de las ramas. En el primer grupo estarían las órbitas que nacen en una bifurcación local y cuya rama termina en una conexión homoclina, en lo que sigue, órbitas LG (local–global). Las ramas de las órbitas del segundo grupo GG (global–global) se organizan alrededor de dos homoclinas. Las del tercer tipo IS aparecen en islas, sin conexión con bifurcaciones locales ni globales. Tras poner algún ejemplo de órbitas LG y GG dedicaremos el resto del trabajo a la descripción de las órbitas IS.

Las órbitas LG aparecen en el análisis de Glendinning y Sparrow [7] y [6]. Por la simetría de nuestro sistema hay órbitas periódicas tanto asimétricas (o de pequeña amplitud) como simétricas (o de gran amplitud). Las primeras (ver figura 2) surgen de una bifurcación de Hopf de los equilibrios no triviales, experimentan bifurcaciones de duplicación de periodo (*flip*) y silla–nodo y la rama se aproxima a la homoclina *contoneando* (*wiggle*) alrededor de su valor (ver figuras 3 y 4). Las ramas secundarias que surgen de esas bifurcaciones de duplicación de periodo presentan un comportamiento similar (también son órbitas del tipo LG): experimentan bifurcaciones flip y silla–nodo y *oscilan* alrededor de una homoclina (de doble, cuádruple, ... pulso). Un comportamiento análogo (LG) se observa en las órbitas simétricas. Su existencia está relacionada con una bifurcación de Hopf del origen y experimenta, en su *acercamiento* con *wiggle* a la homoclina, bifurcaciones de ruptura de simetría (*pitchfork*) y silla–nodo. Las ramas secundarias que surgen de esas bifurcaciones *pitchfork* también corresponden a órbitas del tipo LG: experimentan duplicaciones de periodo y silla–nodo en su *contoneo* alrededor de la correspondiente homoclina (de doble, cuádruple, ... pulso). En las figuras 6 a 11 de Freire et alii [3] se puede obtener más información de estas órbitas LG para los valores de los parámetros que nos ocupan.

Como ejemplo de órbitas del tipo GG vamos a considerar (ver figura 5) órbitas de pequeña amplitud y periodo aproximadamente triple de las que nacen en la Hopf de los no triviales (primeras órbitas LG comentadas en el párrafo anterior). A diferencia de éstas, su rama no surge de ninguna bifurcación local, sino que se organiza, con el correspondiente *wiggle*, alrededor de dos homoclinas (ver figuras 6 y 7). A semejanza de aquéllas sí experimenta duplicaciones de periodo y silla–nodo. Las órbitas que nazcan en esas bifurcaciones de duplicación de periodo son del tipo LG, pues terminan sus ramas alrededor de una homoclina (en su *wiggle* experimentan a su vez duplicaciones de periodo y silla–nodo, ver la figura 12c de [3]). Otros ejemplos de órbitas del tipo GG se pueden encontrar en las figuras 13 y 14 (sección 3.3.2) de [3].

En lo que resta estudiaremos las órbitas periódicas del tipo IS (en islas) que hemos encontrado en el circuito considerado. Todo el trabajo numérico ha sido realizado con AUTO94 [1]. Mostramos, en primer lugar, en la figura 8 una proyección de una de esas órbitas IS en el plano XY. Su continuación numérica nos proporciona el diagrama de bifurcaciones cuya rama se cierra sobre sí misma, tenemos en este caso una isla en forma de *ocho* (ver figura 9). La estabilidad de las órbitas en esa isla aparece esquematizada en la figura 10. El trazo continuo indica órbita estable y el discontinuo órbita tipo silla. Aparecen cuatro bifurcaciones de tipo silla–nodo y otras cuatro de duplicación de periodo.

La continuación numérica de las órbitas de periodo doble (ver esquema en la figura 10) muestra cómo esas cuatro bifurcaciones *flip* quedan conectadas dos a dos (las dos de arriba entre sí y las de abajo igualmente). Hay, por tanto, dos ramas de órbitas de periodo doble y cada una de estas ramas presenta dos bifurcaciones silla–nodo y cuatro de duplicación de periodo (de este modo, hay ocho bifurcaciones de duplicación de periodo de las que surgirán órbitas de periodo cuádruple). Vemos en la figura 11 una de las ramas de dichas órbitas de periodo doble en forma de *lazo* y en la figura 12 la proyección de una de tales órbitas de periodo doble en el plano XY.

Si ahora continuamos las órbitas de periodo cuádruple (ver figura 13) obtenemos cuatro ramas que conectan dos a dos las ocho bifurcaciones de duplicación de periodo. Estas cuatro ramas, cuya forma recuerda a la de la letra *ese*, presentan cada una dos bifurcaciones silla–nodo y cuatro bifurcaciones de duplicación de periodo (hay, de esta forma, dieciséis bifurcaciones *flip* de las que nacerán órbitas de periodo óctuple). En la figura 14 aparece una de las ramas de las órbitas de periodo cuádruple y en la figura 15 la proyección en el plano XY de una de tales órbitas periódicas.

La continuación numérica de las órbitas de periodo óctuple nos muestra que el esquema de bifurcaciones de estas órbitas se repite y, al igual que sucedía para las de periodo más bajo, siguen conectándose dos a dos las ramas (hay ocho para las de periodo óctuple) presentando cada una de estas ramas dos bifurcaciones silla–nodo y cuatro de duplicación de periodo. En este caso las ramas tienen nuevamente forma de *lazo* (como sucedía en el caso de las órbitas de periodo doble). En la figura 16, superponiendo todas las ramas de bifurcaciones antes mencionadas, sólo hemos esquematizado dos de las ocho ramas de las de periodo óctuple (dibujarlas todas llevaría a un esquema casi ininteligible). Una de esas ocho ramas de órbitas de periodo óctuple aparece en la figura 17, proyectando en el plano XY una de tales órbitas periódicas en la figura 18.

Una vez que hemos descrito la conducta de bifurcaciones de estas órbitas periódicas organizadas en islas, nos planteamos conocer, moviendo un segundo parámetro, β, la evolución de esas islas. Para ello subimos de $\beta = 0.4$ a $\beta = 0.43$ (ver figura 19) porque para este último valor, la isla en forma de *ocho* ya sólo presenta dos bifurcaciones silla–nodo (han colapsado dos para algún valor intermedio del parámetro β). La consecuencia de esta desaparición de bifurcaciones silla–nodo es que ya la rama principal sólo presenta dos bifurcaciones de duplicación de periodo. Esta simplificación del diagrama de bifurcaciones en la rama principal conlleva una simplificación del mismo tipo en las ramas secundarias (órbitas de periodo doble, cuádruple, óctuple, ...). Estas ramas secundarias ya no presentan la forma de *lazo* ni de *ese* que aparecían anteriormente —han perdido también dos silla–nodo y dos *flips*— sino que *siguen* la misma conducta que la rama principal: ya sólo aparece una rama de órbitas de periodo doble (uniendo las dos bifurcaciones de duplicación de periodo de la rama principal), una de órbitas de periodo cuádruple, una de órbitas de periodo óctuple, ...

Si seguimos subiendo β nos encontramos con que la isla pierde su forma de *ocho* (ver el esquema en la figura 20 para $\beta = 0.436$) aunque el diagrama de bifurcaciones sigue siendo cualitativamente el mismo.

Para delimitar la zona de existencia de estas órbitas hemos continuado en el plano de parámetros ν–β las curvas de bifurcaciones del tipo silla–nodo y obtenemos las curvas (dos, al colapsar dichas bifurcaciones dos a dos) que se muestran en la figura 21, en cuyo interior tenemos garantía de que existen estas órbitas del tipo IS.

El trabajo numérico llevado a cabo nos ha permitido comprobar que, como era de esperar, hay más de una isla coexistiendo. Mostramos, en particular, en las figuras 22 y 23 dos de tales islas para $\beta = 0.4$ y $\beta = -0.2$ respectivamente.

Tras este estudio numérico exhaustivo creemos ver claro el comportamiento que van a tener este tipo de órbitas periódicas relacionadas con la isla. Esto nos abre el camino para realizar un estudio teórico de confirmación de los resultados obtenidos, que se convierte en nuestro objetivo prioritario futuro. El enfoque que nos planteamos consiste en estudiar la posible relación de la existencia de estas islas de órbitas periódicas con algún fenómeno de bifurcación que podría aparecer si tuviésemos en cuenta un parámetro añadido.

Agradecimientos

Los autores desean agradecer a la Consejería de Educación y Ciencia de la Junta de Andalucía la financiación parcial de este trabajo.

Referencias

[1] Doedel, E.; Wang, X.; Fairgrieve, T., *AUTO94. Software for Continuation and Bifurcation Problems in Ordinary Differential Equations*, Applied Mathematics Report, California Institute of Technology (1995).

[2] Freire E.; Franquelo, L. G.; Aracil, J., *Periodicity and Chaos in an Autonomous Electronic Circuit*, IEEE Transactions on Circuits and Systems, vol. Cas–31, n. 3, 237–247 (1984).

[3] Freire, E.; Rodríguez–Luis, A.J.; Gamero, E.; Ponce, E., *A Case Study for Homoclinic Chaos in an Autonomous Electronic Circuit. A Trip from Takens–Bogdanov to Hopf–Shil'nikov*, Physica D, vol. 62, 230–253 (1993).

[4] Gamero, E., *Computación Simbólica y Bifurcaciones de Sistemas Dinámicos*, Tesis Doctoral, Universidad de Sevilla (1990).

[5] Gaspard, P.; Arnéodo, A.; Kapral, R.; Sparrow, C. (eds.), *Homoclinic Chaos*, Physica D, vol. 62 (1993).

[6] Glendinning, P., *Bifurcations near Homoclinic Orbits with Symmetry*, Physics Letters 103A, n. 4, 163–166 (1984).

[7] Glendinning, P.; Sparrow, C., *Local and Global Behavior near Homoclinic Orbits*, Journal of Statistical Physics, **35**, 645–696 (1984).

[8] Guckenheimer, J.; Holmes, P. J., *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Appl. Math. Sci. Series, vol. 42, Springer–Verlag (1986).

[9] Madan, R.N. (ed.), *Chua's Circuit: a Paradigm for Chaos*, World Scientific Series on Nonlinear Science, Series B, Vol. 1, World Scientific (1993).

[10] Rodríguez Luis, A.J., *Bifurcaciones Multiparamétricas en Osciladores Autónomos*, Tesis Doctoral, Universidad de Sevilla (1991).

[11] Shinriki, R.; Yamamoto, M.; Mori, S., *Multimode Oscillations in a Modified Van der Pol Oscillator Containing a Positive Nonlinear Conductance,* IEEE Proc. 69, 3, pp. 394–395 (1981).

[12] Wiggins, S., *Global Bifurcations and Chaos. Analytical Methods*, Applied Mathematical Series, vol. 73, Springer–Verlag (1988).

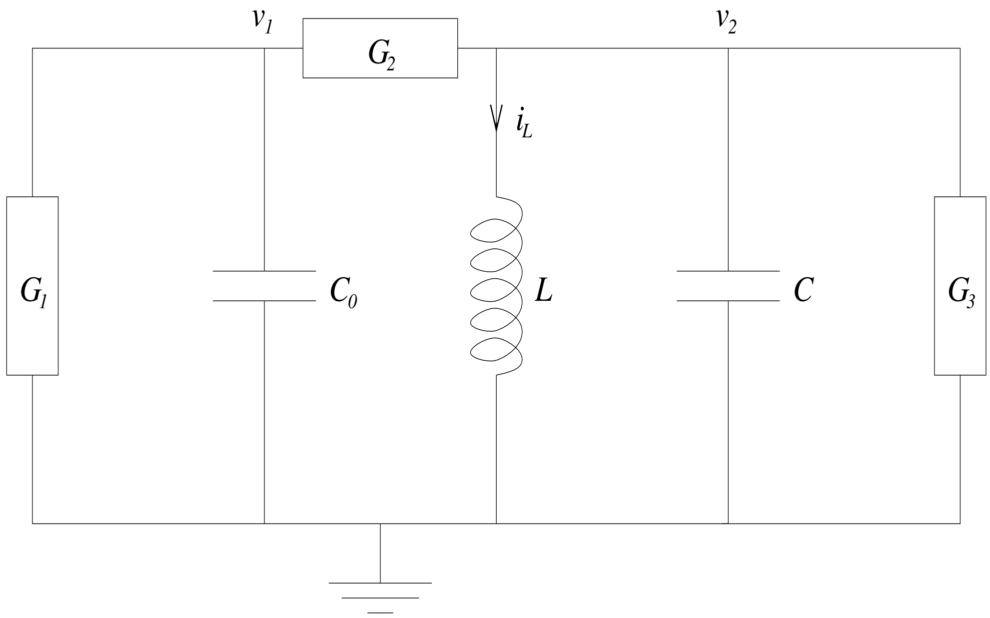

Figura 1: Esquema del circuito electrónico.

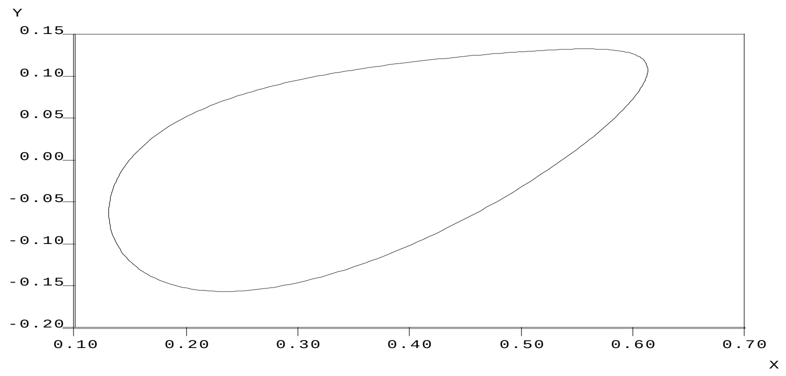

Figura 2: Órbita asimétrica del tipo LG, para $\beta = 0.4$.

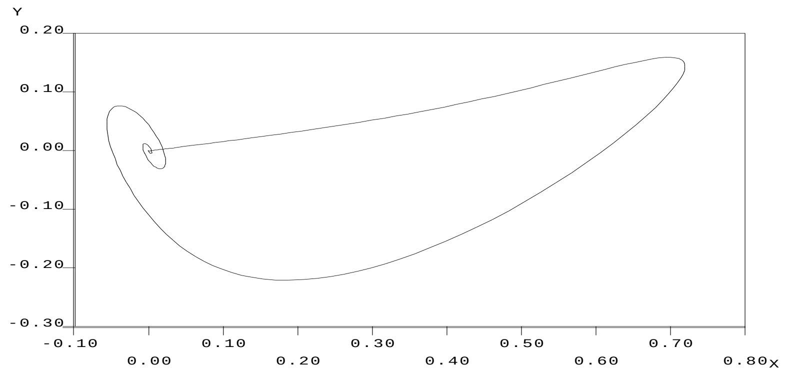

Figura 3: Conexión homoclina para $\beta = 0.4$.

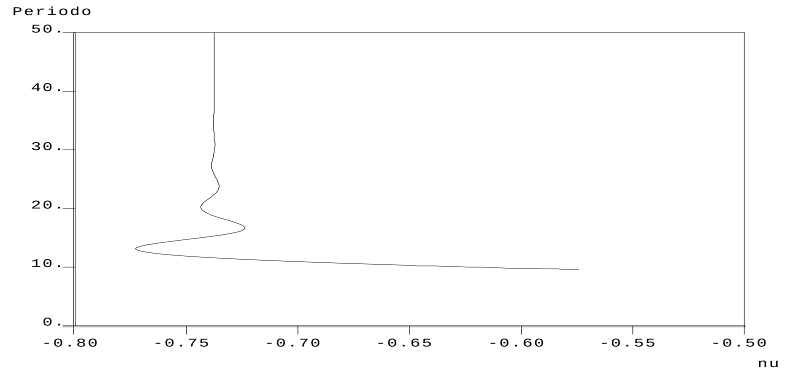

Figura 4: Diagrama de bifurcaciones de las órbitas asimétricas para $\beta = 0.4$.

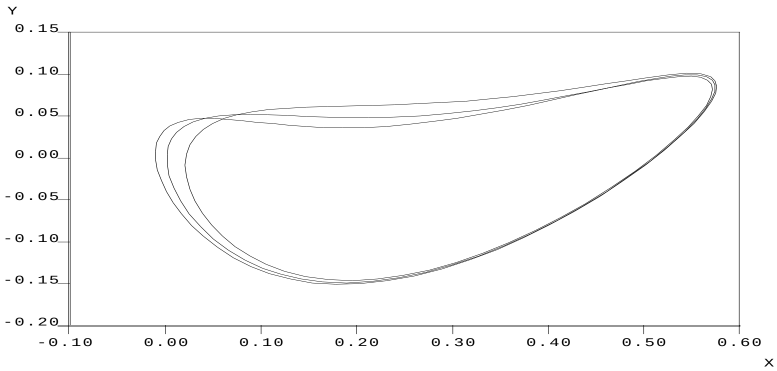

Figura 5: Órbita asimétrica de periodo triple para $\beta = 0.5$.

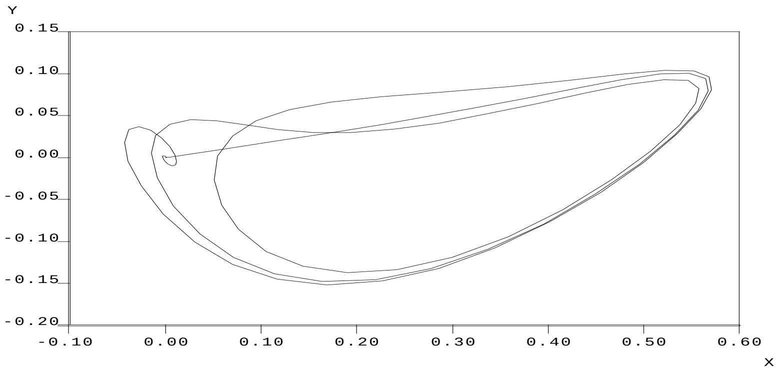

Figura 6: Homoclina que organiza una rama de esas órbitas tipo GG ($\beta = 0.5$).

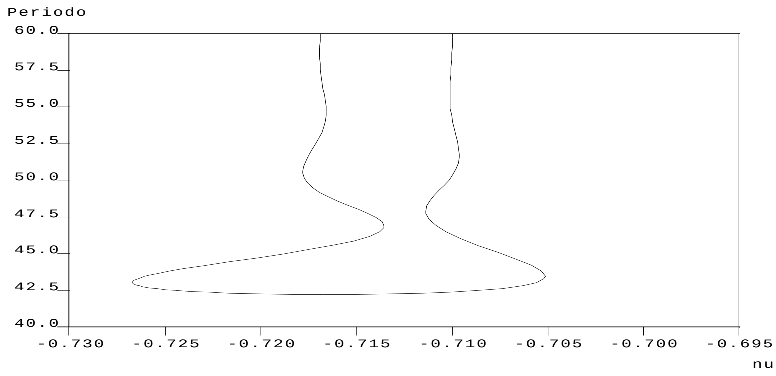

Figura 7 Diagrama de bifurcaciones de las órbitas asimétricas de periodo triple ($\beta = 0.5$).

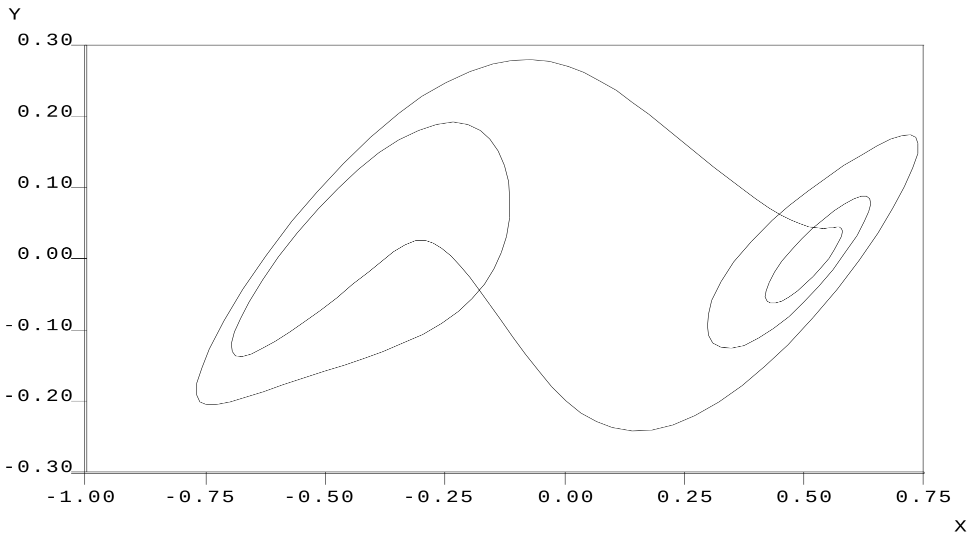

Figura 8: Órbita asimétrica del tipo IS ($\beta = 0.4$).

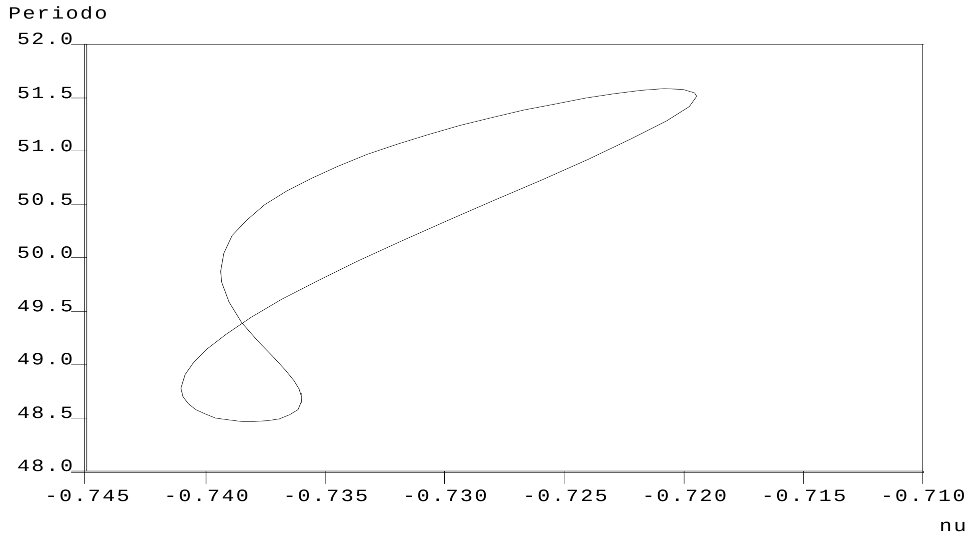

Figura 9: Diagrama de bifurcaciones para la órbita IS ($\beta = 0.4$).

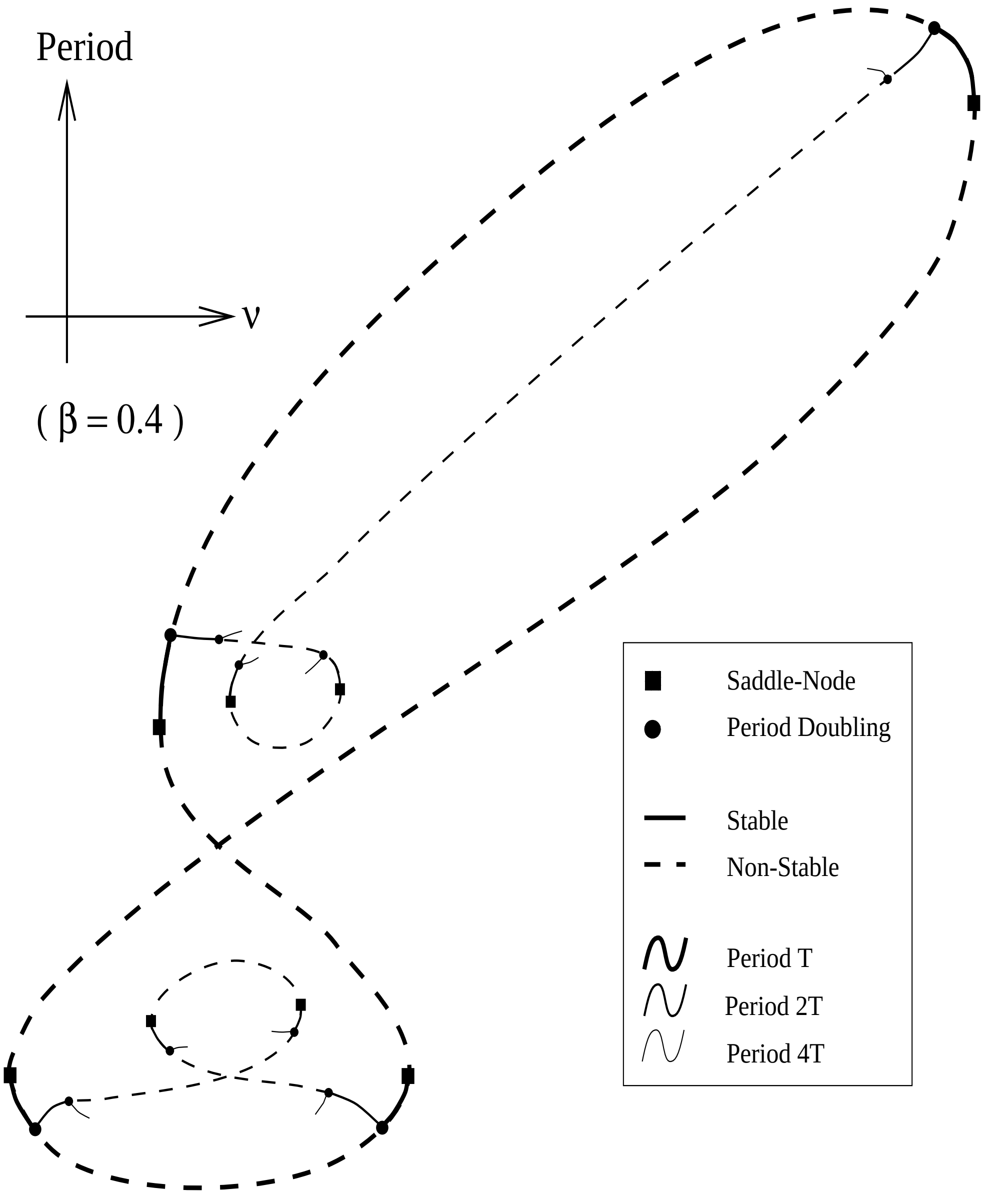

Figura 10: Diagrama *parcial* de bifurcaciones.

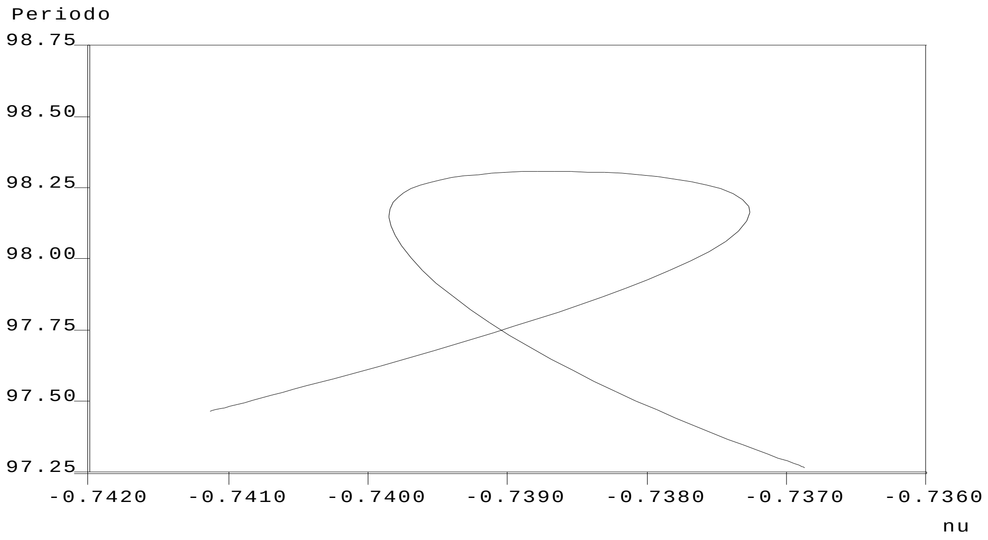

Figura 11: Rama de las órbitas de periodo doble ($\beta = 0.4$).

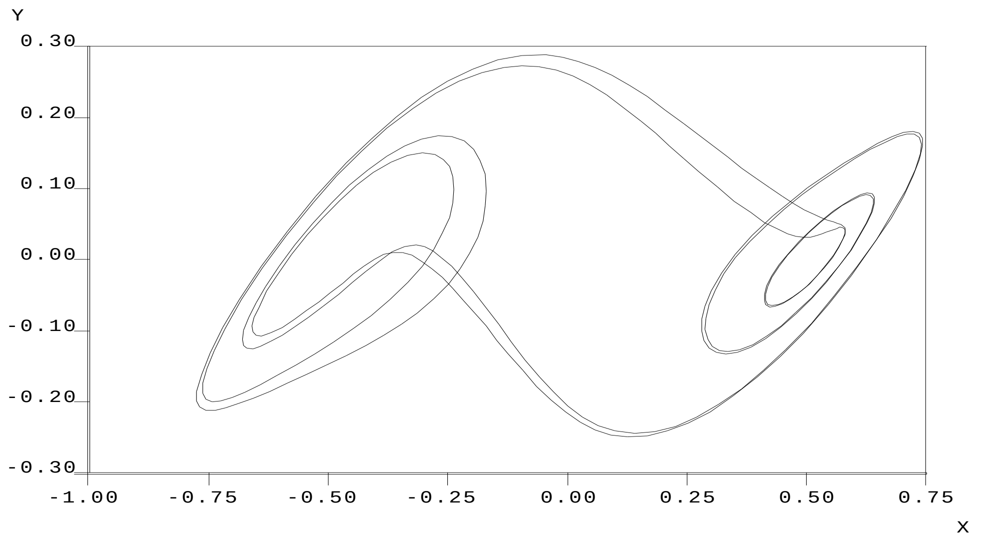

Figura 12: Una órbita de periodo doble ($\beta = 0.4$).

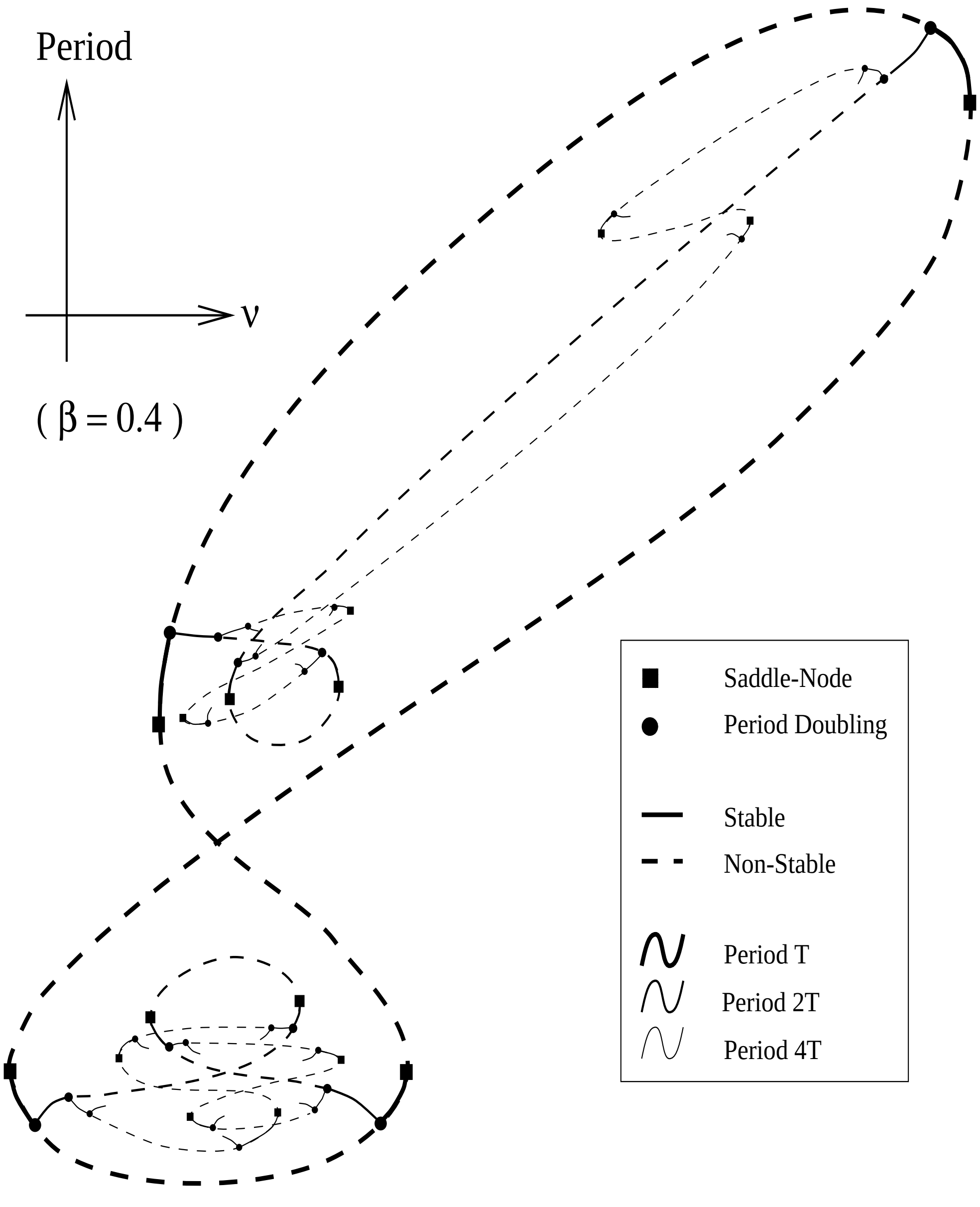

Figura 13: Diagrama *parcial* de bifurcaciones.

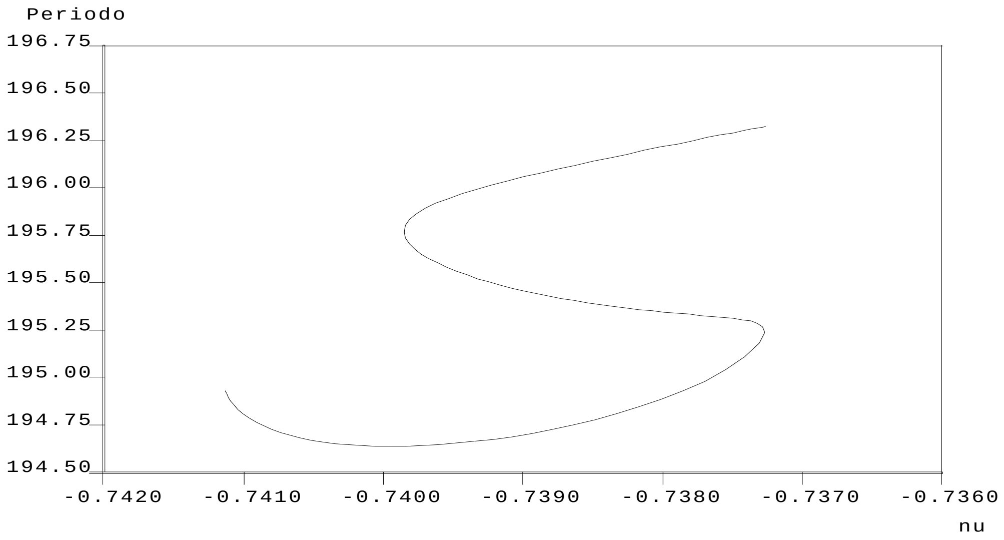

Figura 14: Rama de las órbitas de periodo cuádruple ($\beta = 0.4$).

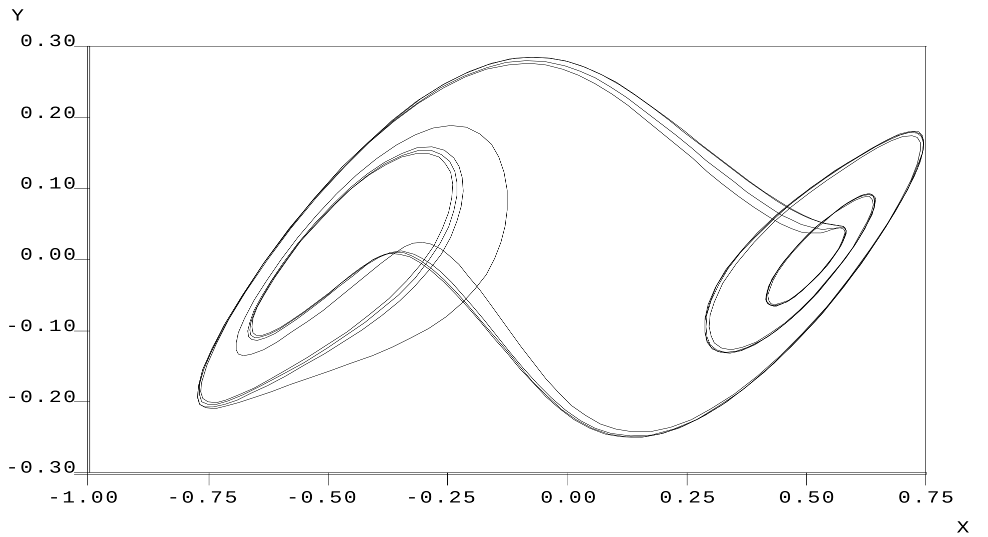

Figura 15: Una órbita de periodo cuádruple ($\beta = 0.4$).

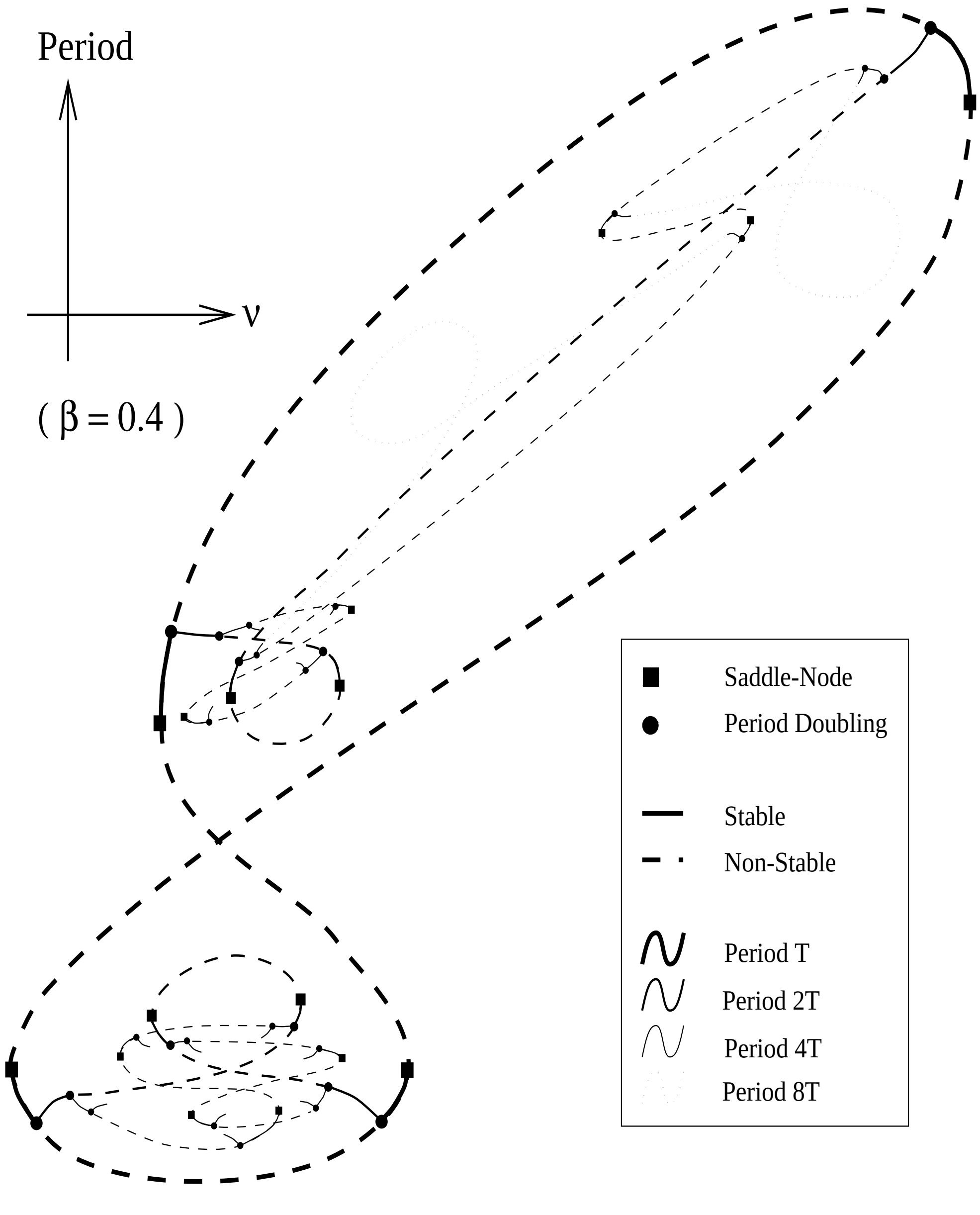

Figura 16: Diagrama *completo* de bifurcaciones.

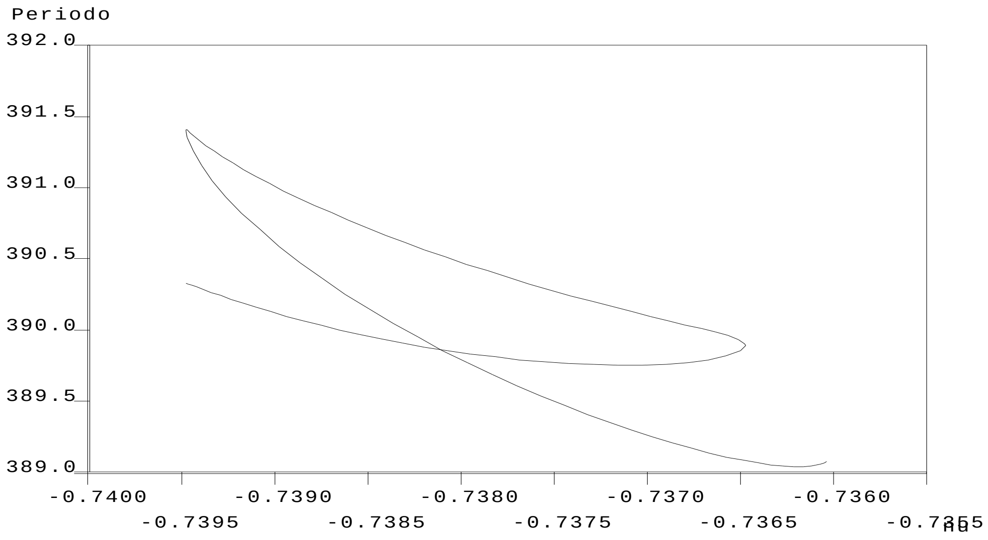

Figura 17: Rama de las órbitas de periodo óctuple ($\beta = 0.4$).

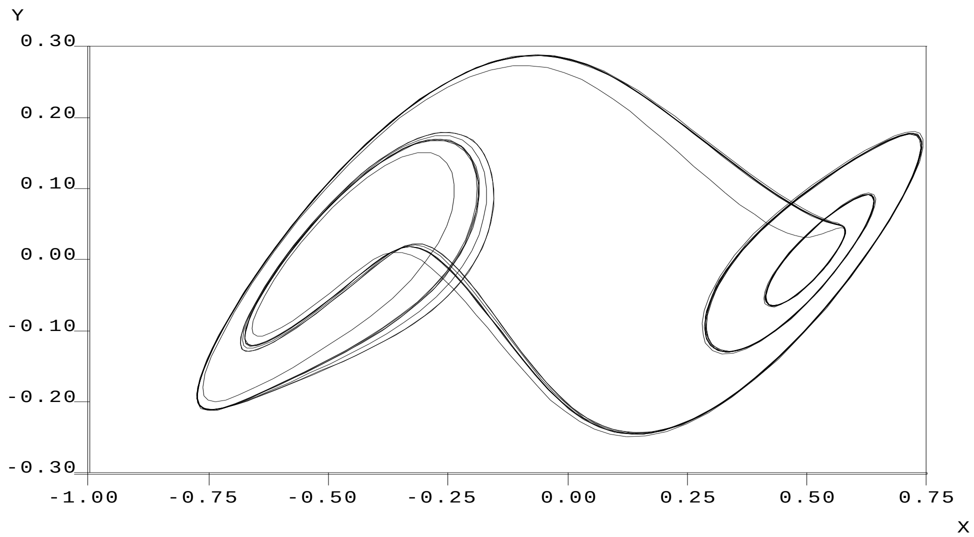

Figura 18: Una órbita de periodo óctuple ($\beta = 0.4$).

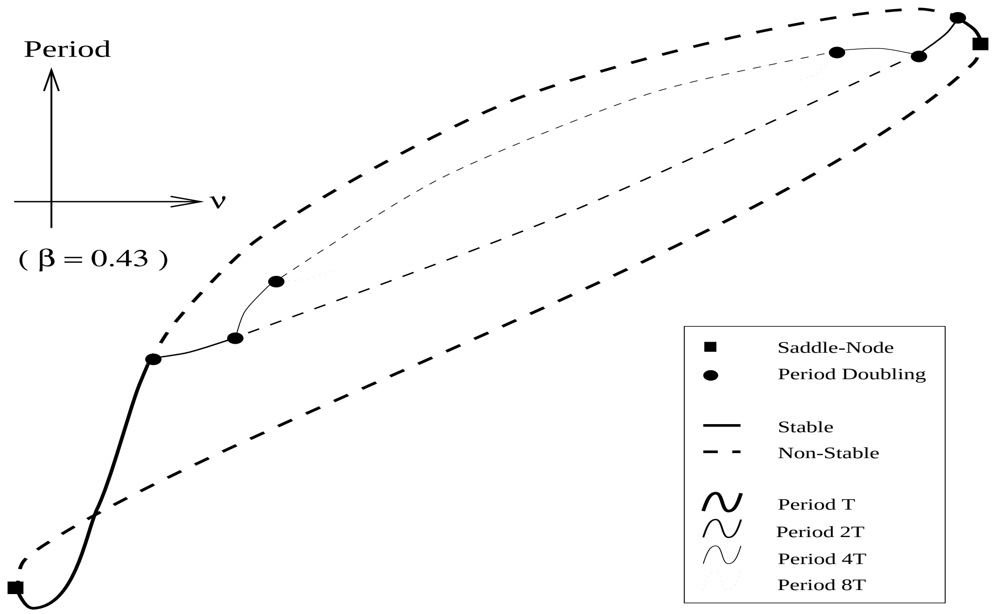

Figura 19: Diagrama *completo* de bifurcaciones para $\beta = 0.43$.

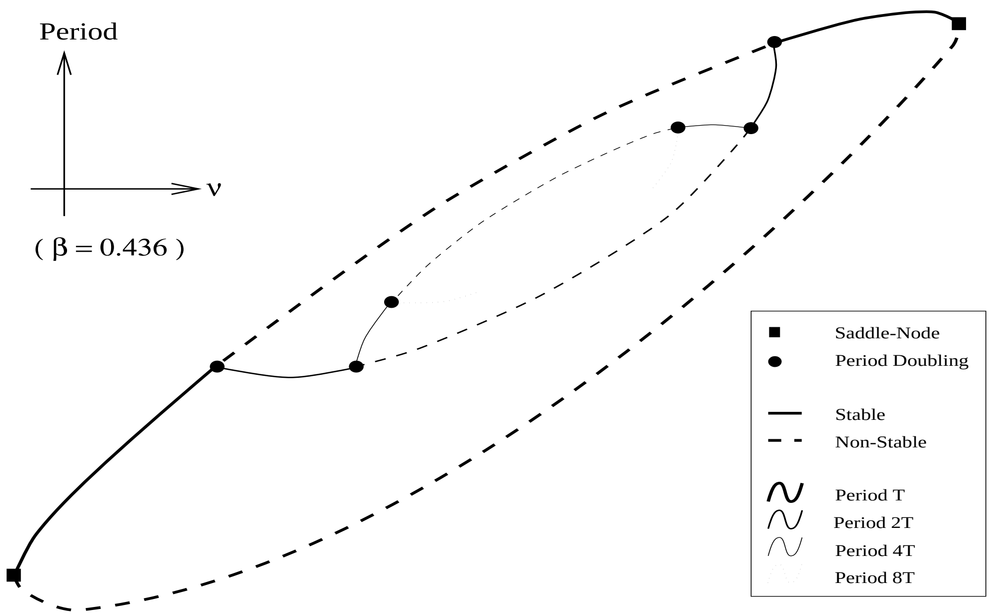

Figura 20: Diagrama *completo* de bifurcaciones para $\beta = 0.436$.

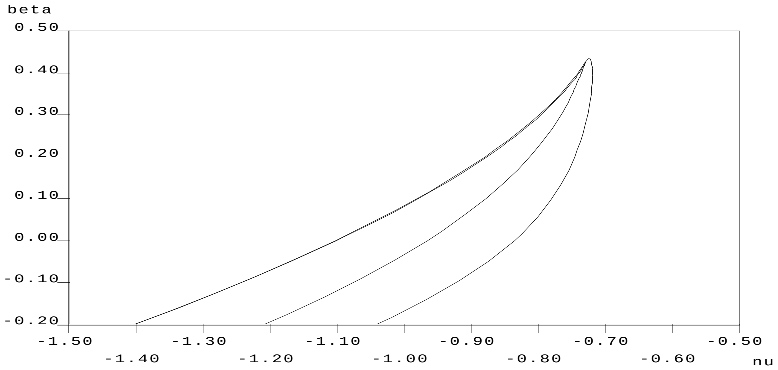

Figura 21: Curvas de silla–nodo en el plano ν-β.

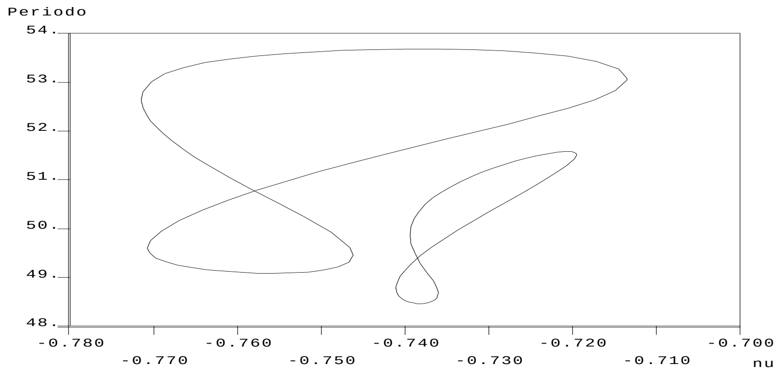

Figura 22: Coexistencia de islas para $\beta = 0.4$.

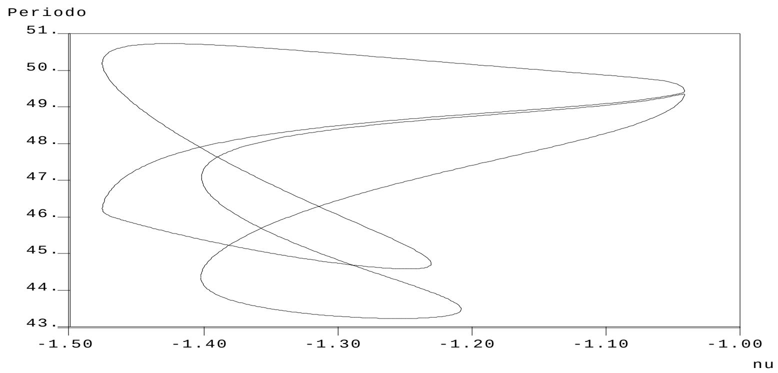

Figura 23: Coexistencia de islas para $\beta = -0.2$.