ALTAS FRECUENCIAS EN UN PROBLEMA "STIFF" RELATIVO A LAS VIBRACIONES DE UNA CUERDA

M^a Eugenia Pérez

Departamento de Matemática Aplicada y Ciencias de la Computación.
Universidad de Cantabria. Avenida de los Castros s/n. 39005 Santander

Resumen. El estudio de las vibraciones en un problema "Stiff" surge de una manera natural en problemas que modelizan las vibraciones de un sistema formado por dos materiales con distintas características. El problema considerado aquí modeliza las vibraciones de un cuerpo que consta de dos materiales uno "muy rígido" con respecto al otro. Se dan los resultados obtenidos sobre el comportamiento asintótico de las altas frecuencias para el problema de las vibraciones de una cuerda cuando la rigidez de uno de los materiales tiende a cero. El estudio comportamiento asintótico de las bajas frecuencias puede encontrarse en [1], [2], [4] y [5].

1 Planteamiento del problema.

Se considera Ω un dominio acotado de $\mathbf{R}^n$, $n \geq 1$, Ω de frontera regular y dividido por Σ en dos partes Ω_0 y Ω_1 cada de ellas de frontera Lipschitziana: $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Sigma$. Se denota por $\partial_i\Omega$ la parte de la frontera de Ω_i contenida en $\partial\Omega$, es decir: $\partial\Omega_i = \partial_i\Omega \cup \Sigma$, $i = 0, 1$.

Se plantea un problema standard de vibraciones en los espacios $\mathbf{V} = H_0^1(\Omega)$ y $\mathbf{H} = L^2(\Omega)$:

Encontrar $\mathbf{u}^\varepsilon(t)$ con valores en $\mathbf{V}$ tal que

$$(1) \qquad (\frac{d^2\mathbf{u}^\varepsilon}{dt^2}, v)_\mathbf{H} + a^\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon(t), v) = 0 \,, \forall v \in \mathbf{V}$$

$$(2) \qquad \mathbf{u}^\varepsilon(0) = \phi_1 \quad , \quad \frac{d\mathbf{u}^\varepsilon}{dt}(0) = \phi_2 \,,$$

dónde

$$a^\varepsilon(u, v) = a_0(u, v) + \varepsilon a_1(u, v) \,, \forall u, v \in \mathbf{V}$$

$$a_i(u,v) = \int_{\Omega_i} \nabla u . \nabla v \, dx \, , i = 0, 1 \, ,$$

$$(u,v)_{\mathbf{H}} = \int_{\Omega} uv \, dx \, ,$$

los datos iniciales $\phi_1 \in \mathbf{V}$, $\phi_2 \in \mathbf{H}$, y ε es un pequeño parámetro positivo, que se hará tender a 0.

El problema (1)-(2) modeliza las vibraciones de un cuerpo situado en el dominio Ω, una de cuyas partes Ω_0 es muy rígida con respecto a la otra. El término $a^\varepsilon(u,v)$ contiene información sobre las caracteísticas elásticas de los materiales.

Como se sabe, existe una única solución de (1)-(2) en $L^\infty(-\infty, \infty, \mathbf{V})$ y admite un desarrollo en serie de Fourier:

$$\mathbf{u}^\varepsilon(t) = \sum_{i=1}^{\infty} (\phi_{1i}^\varepsilon \cos \sqrt{\lambda_i^\varepsilon} t + \frac{\phi_{2i}^\varepsilon}{\sqrt{\lambda_i^\varepsilon}} \sin \sqrt{\lambda_i^\varepsilon} t) u_i^\varepsilon .$$

Los coeficientes ϕ_{ij}^ε dependen de los datos iniciales:

$$\phi_j = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{ji}^\varepsilon u_i^\varepsilon \, , \quad \phi_{ji}^\varepsilon = \frac{(u_i^\varepsilon, \phi_j)_{\mathbf{H}}}{\|u_i^\varepsilon\|_{\mathbf{H}}} \, , \, j = 1, 2 \, ,$$

y, λ_i^ε, u_i^ε, son los valores propios y funciones propias del problema:

$$(3) \qquad \begin{cases} -\Delta u_0^\varepsilon = \lambda^\varepsilon u_0^\varepsilon & \text{en } \Omega_0, \\ -\varepsilon \Delta u_1^\varepsilon = \lambda^\varepsilon u_1^\varepsilon & \text{en } \Omega_1, \\ u_0^\varepsilon = 0 \text{ en } \partial_0 \Omega \quad , & u_1^\varepsilon = 0 \text{ en } \partial_1 \Omega, \\ u_0^\varepsilon = u_1^\varepsilon \quad , & \frac{\partial u_0^\varepsilon}{\partial n} = \varepsilon \frac{\partial u_1^\varepsilon}{\partial n} \text{ en } \Sigma \, . \end{cases}$$

En (3), y en lo sucesivo sigue, los subíndices 0 y 1 indican las restricciones de una función $u \in L^2(\Omega)$ a los dominios Ω_0 y Ω_1 respectivamente.

Así, el estudio del problema de vibraciones (1)-(2) nos lleva al estudio de los elementos propios de (3). Vamos a estudiar el comportamiento asintótico de estos valores propios y funciones propias cuando $\varepsilon \to 0$.

El problema (3) admite una formulación variacional equivalente:

Encontrar λ^ε, $u^\varepsilon \in \mathbf{V}$, $u^\varepsilon \neq 0$ tales que:

$$(4) \qquad \int_{\Omega_0} \nabla u^\varepsilon . \nabla v \, dx + \varepsilon \int_{\Omega_1} \nabla u^\varepsilon . \nabla v \, dx = \lambda^\varepsilon \int_{\Omega} u^\varepsilon v \, dx, \forall v \in \mathbf{V} \, ,$$

(4) es un problema de valores propios para el operador asociado a la forma bilineal, simétrica, continua y coerciva a^ε sobre $\mathbf{V}$, admitiendo por tanto un espectro discreto. Sea para cada $\varepsilon > 0$ fijo:

$$0 < \lambda_1^\varepsilon \leq \lambda_2^\varepsilon \leq \cdots \leq \lambda_n^\varepsilon \leq \cdots \xrightarrow{n\to\infty} \infty\,,$$

la sucesión de valores propios, dónde cada valor propio se cuenta tantas tantas veces como su multiplicidad. Sean $\{u_i^\varepsilon\}_{i=1}^\infty$ las correspondientes funciones propias que forman una base ortonormal en $L^2(\Omega)$, es decir,

$$\|u_i^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} = 1.$$

Desde un punto de vista Físico cabe esperar que haya dos tipos de valores o frecuencias propias de dos órdenes de magnitud distintos: Uno relativo a la estructura menos rígida y otro a la más rígida. Desde un punto de vista matemático, la coercividad de la forma a^ε y el principio del mini-max nos permiten obtener la siguiente estimación para los valores propios (ver [3] para este tipo de técnicas):

Para cada $i = 1, 2, 3, \cdots$ fijo, se tiene

$$C\varepsilon \leq \lambda_i^\varepsilon \leq C_i\varepsilon \tag{5}$$

dónde C, C_i son constantes independientes de ε, C independiente de i.

La relación (5) nos permite afirmar que hay sucesiones de valores propios de orden $O(\varepsilon)$ que convergen; nos referiremos a estos valores propios como a *las bajas frecuencias*. Por otro lado, puesto que $C_i \to \infty$ cuando $i \to \infty$, también puede haber sucesiones de valores propios de orden $O(1)$ que converjan; hablaremos de ellos como de *las altas frecuencias*.

El problema del comportamiento asintótico de las bajas frecuencias ha sido abordado en [1], [2], [4] y [5] utilizando distintas técnicas. Su estudio puede ser llevado a cabo en en el contexto de la *teoría de las perturbaciones holomorfas* y nada sobre lo ya dicho en estos trabajos se puede añadir: Las funciones propias asociadas a frecuencias propias pequeñas son asintóticamente nulas en Ω_0, mientras que en Ω_1 son las funciones propias de un problema de valores propios para el operador de Laplace, planteado en Ω_1, con condiciones de Dirichlet sobre $\partial\Omega_1$.

Es decir, las vibraciones asociadas a las bajas frecuencias son "poco significativas" en la parte más rígida Ω_0. Sin embargo, para determinados estímulos es evidente que se producen vibraciones significativas en Ω_0 y por tanto las altas frecuencias juegan un papel primordial en el estudio del comportamiento asintótico de las vibraciones de todo Ω.

En [1] y [4] se consideran distintos aspectos de las altas frecuencias. En el estudio de éstas aparece de una manera natural (basta con tomar $\varepsilon = 0$ en (3)) el problema de valores propios:

$$
\left\{
\begin{array}{lcl}
-\Delta u_0 & = & \lambda u_0 \text{ en } \Omega_0, \\
u_0 & = & 0 \text{ en } \partial_0\Omega, \\
\frac{\partial u_0}{\partial n} & = & 0 \text{ en } \Sigma.
\end{array}
\right. \tag{6}
$$

De los resultados obtenidos, relativos a las altas frecuencias, se pueden extraer, entre otras, las siguientes conclusiones (ver [1] y [4] para mayor detalle):

- Determinadas funciones propias u^ε asociadas a valores propios $\lambda^\varepsilon = O(1)$ se aproximan en Ω_0 por funciones propias de (6) mientras que no se tiene información sobre ellas y, por tanto, sobre las correspondientes vibraciones en Ω_1.

- Para determinados datos iniciales ($\phi_1 = 0$) la solución de (1)-(2) es asintóticamente nula en Ω_0, mientras que en Ω_1, "localmente", oscila como si el medio no fuera acotado.

En la siguiente sección damos resultados más concretos sobre la estructura de las funciones propias asociadas a las altas frecuencias para $n = 1$.

2 Resultados en dimensión $n = 1$.

Se considera el problema de valores propios (3) relativo a las vibraciones de una cuerda situada en $(-1, 1)$, la parte más rígida Ω_0 en $(-1, 0)$ y la menos rígida Ω_1 en $(0, 1)$,

$$
\left\{
\begin{array}{lll}
-\frac{d^2u^\varepsilon}{dx^2} = \lambda^\varepsilon u^\varepsilon\,, & & x \in (-1, 0), \\
-\varepsilon \frac{d^2u^\varepsilon}{dx^2} = \lambda^\varepsilon u^\varepsilon\,, & & x \in (0, 1), \\
u^\varepsilon(-1) = 0 & , & u^\varepsilon(1) = 0\,, \\
u^\varepsilon(0^-) = u^\varepsilon(0^+) & , & \frac{du^\varepsilon}{dx}(0^-) = \varepsilon \frac{du^\varepsilon}{dx}(0^+).
\end{array}
\right. \tag{7}
$$

Exceptuando los λ^ε tales que $\cos\sqrt{\lambda} \neq 0$ (ver observación 1), un simple cálculo nos muestra que los valores propios λ^ε de (7) son los λ raices de la ecuación:

$$\sqrt{\varepsilon}\tan\sqrt{\lambda} + \tan\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}} = 0\,. \tag{8}$$

Las correspondientes funciones propias son:

$$u^\varepsilon(x) = \begin{cases} C_\varepsilon(\sqrt{\varepsilon}\tan\sqrt{\lambda^\varepsilon}\cos\sqrt{\lambda^\varepsilon}x + \sqrt{\varepsilon}\sin\sqrt{\lambda^\varepsilon}x)\,, & x \in (-1,0) \\ C_\varepsilon(-\tan\sqrt{\frac{\lambda^\varepsilon}{\varepsilon}}\cos\sqrt{\frac{\lambda^\varepsilon}{\varepsilon}}x + \sin\sqrt{\frac{\lambda^\varepsilon}{\varepsilon}}x)\,, & x \in (0,1) \end{cases} \tag{9}$$

dónde C_ε es una constante que depende de la normalización que se tome para u^ε. Nosotros suponemos que es tal que:

$$\int_{-1}^{1} u^\varepsilon(x)^2\,dx = 1\,.$$

El problema (6) planteado ahora en $(-1,0)$ es:

$$\begin{cases} -\frac{d^2u_0}{dx^2} & = & \lambda u_0\,,\ x \in (-1,0) \\ u_0(-1) & = & 0\,, \\ u_0{}'(0) & = & 0. \end{cases} \tag{10}$$

Los valores propios de (10) son $(\frac{(2k+1)\pi}{2})^2\,, k = 0,1,2,\cdots$, y las correspondientes funciones propias $\cos(\frac{(2k+1)\pi}{2}x)$. Si se considera $\lambda^\varepsilon \approx (\frac{(2k+1)\pi}{2})^2$ para algún k, está claro que la correspondiente función propia u^ε se puede aproximar por $\alpha_\varepsilon\cos(\frac{(2k+1)\pi}{2}x)$ en $(-1,0)$ (α_ε una constante), pero u^ε no admite un desarrollo regular en $(0,1)$. Los siguientes resultados nos dan información sobre estas funciones propias en $(0,1)$, así como sobre las otras funciones propias asocidas a valores propios no necesariamente "próximos" al los de (10).

Teorema 1 *Para cada $\lambda > 0$ existe una sucesión $\lambda^\varepsilon_{i(\varepsilon)}$ de valores propios de (7) que converge a λ cuando $\varepsilon \to 0$.*

Teorema 2 *Si $\lambda^\varepsilon_{i(\varepsilon)} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \lambda$ y $\lambda > 0$ no es valor propio de (10), entonces*

$$\|u^\varepsilon_{i(\varepsilon)}\|_{L^2(-1,0)} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$$

Notamos que en las demostraciones de los teoremas 1 y 2 es importante el hecho de que la dimensión del espacio sea $n = 1$: por un lado los valores propios se caracterizan a través de las raices de de la ecuación (8) y, por otro lado, se tiene la fórmula explícita de las funciones propias (9) en función de estos valores propios. Solo damos una idea esquemática de la demostración de los teoremas 1 y 2.

La demostración del teorema 1 en el caso de que λ sea un valor propio del problema (10) se basa en el tipo argumentos que pueden encontrarse en [3] y [4]: se utiliza la típica idea de obtener información sobre la convergencia de los valores propios cuando se conoce la convergencia de las soluciones de los problemas de evolución asociados para ciertos datos iniciales.

En el caso de que $\lambda \neq (\frac{(2k+1)\pi}{2})^2$ para cualquier k, se demuestra facilmente que cualquier entorno $(\lambda - \delta, \lambda + \delta)$, que no contenga valores propios de (10), contiene raices de la ecuación (8) para ε suficientemnte pequeño.

La demostración del teorema 2 se basa en el simple cálculo de las integrales

$$\int_{-1}^{0} u^\varepsilon(x)^2 dx \ \text{ y } \ \int_0^1 u^\varepsilon(x)^2 dx \,,$$

y en la comprobación de que el orden de magnitud de la primera es inferior al de la segunda. Este resultado no es cierto en el caso de que el $\lambda = (\frac{(2k+1)\pi}{2})^2$ para algún k.

Los teoremas 1 y 2, y resultados más sofisticados de la teoría de perturbaciones espectrales (ver [6], por ejemplo) nos permiten obtener el siguiente resultado, que nos da idea del carácter fuertemente oscilante de las funciones propias u^ε en $(0,1)$.

Teorema 3 *Sea* $\lambda^\varepsilon_{i(\varepsilon)} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \lambda$. *Entonces las correspondientes funciones propias* u^ε *asociadas a* $\lambda^\varepsilon_{i(\varepsilon)}$ *son de la forma:*

$$u^\varepsilon = \alpha_\varepsilon \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2} x\right)|_{(-1,0)} + \sum_{j=j(\varepsilon)}^{\infty} \alpha_k^\varepsilon \sin(j\pi x)|_{(0,1)} + o_\varepsilon(1) \,,$$

dónde $o_\varepsilon(1) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$ *en* $L^2(-1,1)$ *y* $j(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \infty$. *Además,*

$$\alpha^\varepsilon = 0, \ \ si\ \forall k \, \lambda \neq \left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right)^2 ,$$

y

$$\alpha^{\varepsilon} \neq 0\,, \;\; si\; \lambda = (\frac{(2k+1)\pi}{2})^2.$$

Observación 1 Se observa que en la ecuación (8) no están incluidos los posibles valores propios $\lambda = \lambda^{\varepsilon}$ tales que $\cos\sqrt{\lambda} = 0$ (y $\cos\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}} = 0$). Cada uno de éstos $\lambda = ((\frac{(2k+1)\pi}{2})^2$ sólo es valor propio de (7) para unos determinados valores de ε: los de la sucesión $\varepsilon_n = (\frac{2k+1}{2n+1})^2$. Las correspondientes funciones propias son en este caso: $u^{\varepsilon}(x) = \cos(\frac{(2k+1)\pi}{2}x)\,, x \in (-1,0)$ (i.e. la función propia de (10) en $(-1,0)$), y, $u^{\varepsilon}(x) = \cos(\frac{(2k+1)\pi}{2\sqrt{\varepsilon}}x)\,, x \in (0,1)$. Este resultado solo reafirma lo ya dicho en los teoremas 1-3.

Bibliografía

[1] Gibert, P. Les basses et les moytennes fréquencies dans des structures fortement hétérogenes. *C.R.Acad. Sci. Paris. Ser.II*, 295, 1982 p.951-954

[2] Lions, J.L. Remarques sur les problémes d'homogénéisation dans les milieux à structure périodique et sur les problèmes raides. In *Les Métodes de l'Homogénéisation* (Bergman, D. and Lions J.L. eds.) Eryrolles, Paris, 1985, pp. 129-228.

[3] Lobo M. y Pérez E. On vibrations of a body with many concentrated masses near the boundary. *Math. Models and Meth. in Appl. Sci.* Vol. 3, No. 2, p.249-273, 1993.

[4] Lobo, M. y Sanchez-Palencia, E. Low and high frequency vibration in stiff problems In *De Giorgi 60th birthday. Partial differential equations and the Calculus of variations* Birkhouser. Volumen 2, p. 729-42, 1990.

[5] Panasenko E.P. Asymptotic of the solutions and eigenvalues of elliptic equations with strongly varying coefficients. *Soviet Math. Dokl.*, 21, p. 942-947, 1980.

[6] Visik, M.I. y Lusternik, L.A. Regular degeneration and boundary layer for linear differential equations with small parameter. *Trans.Amer.Math.Soc.* Ser. 2,20 239-364 (1957).