EXTENSIÓN DE UN TEOREMA DE MOSER-PÖSCHEL PARA LA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER CON POTENCIAL ERGÓDICO

Carmen Núñez

Departamento de Matemática Aplicada a la Ingeniería, E.T.S. de Ingenieros Industriales, Universidad de Valladolid, Paseo del Cauce s/n, 47011 Valladolid.
E-mail: carnun@wmatem.eis.uva.es

1 Introducción

Sea g_0 una función real acotada y uniformemente continua y Ω su envolvente, es decir, la clausura para la topología de la convergencia uniforme sobre los compactos del conjunto $\{g_0 \cdot t \mid t \in \mathbb{R}\}$, siendo $g_0 \cdot t(s) = g_0(t+s)$. Supongamos que el flujo continuo dado sobre Ω por $\Xi : \Omega \times \mathbb{R} \to \Omega$, $(\xi, t) \mapsto \xi \cdot t$ es minimal y fijemos una medida ergódica m_0. Sea $\Gamma_0 : \Omega \to \mathbb{R}$, $\xi \mapsto \xi(0)$; consideremos el operador autoadjunto definido en $L^2(\mathbb{R})$ por

$$\mathcal{L}_\xi\, x = -x'' + \Gamma_0(\xi \cdot t)\, x$$

para $\xi \in \Omega$. La familia de ecuaciones de segundo orden

$$\mathcal{L}_\xi\, x = 0 \tag{1}$$

para $\xi \in \Omega$, equivalente a la familia de sistemas lineales

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Gamma_0(\xi \cdot t) & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}\,, \tag{2}$$

define un flujo continuo en el fibrado $\Omega \times \mathbb{R}^2$; sea $U(t, \xi)$ la matriz fundamental que verifica $U(0, \xi) = \mathrm{Id}$. Es conocido el hecho de que el espectro de este operador es el mismo para casi todo $\xi \in \Omega$ (con respecto a m_0). Johnson [2] demuestra que el punto 0 pertenece a la resolvente de $\mathcal{L}_\xi$ si y solamente si la familia (2) admite dicotomía exponencial, es decir, si existen constantes positivas C, β y subfibrados cerrados unidimensionales e invariantes V^+ y V^- tales que $\Omega \times \mathbb{R}^2 = V^+ \oplus V^-$ y además

a) $\|U(t, \xi)\, \mathbf{x}\| \leq C \exp(-\beta t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, $(\xi, \mathbf{x}) \in V^+$,

b) $\|U(t, \xi)\, \mathbf{x}\| \leq C \exp(\beta t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, $(\xi, \mathbf{x}) \in V^-$.

Consideremos ahora una función casi-periódica g_0. Moser-Pöschel [3] prueban que los puntos λ del espectro del operador $\mathcal{L}\, x = -x'' + g_0(t)\, x$ para los que los cuadrados de todas las soluciones de la ecuación $\mathcal{L}\, x = \lambda\, x$ son casi-periódicos con el mismo módulo de frecuencias que g_0, corresponden a intervalos colapsados de resolvente que pueden ser abiertos mediante pequeñas perturbaciones del potencial. Este resultado es el punto básico en la demostración de que el carácter Cantor del espectro es una propiedad genérica para este tipo de operadores.

Extendemos en este artículo el argumento de Moser-Pöschel a la ecuación de Schrödinger con potencial ergódico y no necesariamente casi-periódico. Bajo la hipótesis de que todas las soluciones de la ecuación (1) son acotadas encontraremos una caracterización ergódica de las direcciones de perturbación que permiten abrir en el espectro intervalos de resolvente; es decir, consideraremos las familias de ecuaciones

$$-x'' + (\Gamma_0(\xi{\cdot}t) - \varepsilon\,\Gamma(\xi{\cdot}t))\,x = 0 \tag{3}$$

para $\Gamma \in C(\Omega)$ y $\varepsilon \in \mathbb{R}$ y buscaremos condiciones para la función Γ que garanticen que los correspondientes sistemas admitan, para $|\varepsilon| > 0$ suficientemente pequeño, dicotomía exponencial.

La proyección $\Pi : \Omega \times \mathbb{R}^2 \to K_{\mathbb{R}} = \Omega \times P^1(\mathbb{R})$, $(\xi, \mathbf{x}) \mapsto (\xi, X)$ con $X = x_2/x_1$ transforma el flujo definido sobre $\Omega \times \mathbb{R}^2$ en un nuevo flujo Φ en el fibrado proyectivo real. El cambio de variable $\varphi = \cot^{-1} X$ permite identificar $P^1(\mathbb{R})$ con $\mathbb{R}/(\pi\mathbb{Z})$; utilizaremos ambas representaciones para los elementos de la recta proyectiva. Denotamos por l_1 la restricción normalizada a $P^1(\mathbb{R})$ de la medida de Lebesgue de $\mathbb{R}$ y por m_1 la medida producto completa $m_0 \otimes l_1$ en $K_{\mathbb{R}}$.

De acuerdo con los resultados de Novo-Obaya [4], la acotación de todas las soluciones de la ecuación (1) garantiza la existencia de una medida en $K_{\mathbb{R}}$ invariante para Φ absolutamente continua con respecto a m_1 y determina la estructura ergódica del flujo proyectivo: o bien Φ es únicamente ergódico, o bien $K_{\mathbb{R}}$ descompone en subconjuntos invariantes para Φ (en general medibles) con $k \geq 1$ elementos en cada fibra. Si $k = 1$ llamamos a estos subconjuntos *láminas ergódicas*.

Por otra parte, si $\varphi \in P^1(\mathbb{R}) \equiv \mathbb{R}/(\pi\mathbb{Z})$ y $x(t, \xi, \varphi)$ es la solución de la ecuación (1) dada por las condiciones iniciales $x'(0, \xi, \varphi) + \mathrm{i}\, x(0, \xi, \varphi) = \exp(\mathrm{i}\varphi)$, resulta que

$$q_\Gamma(\xi, \varphi) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \Gamma(\xi{\cdot}t)\, x^2(t, \xi, \varphi)\, dt$$

existe para casi todo $(\xi, \varphi) \in K_{\mathbb{R}}$ (con respecto a m_1); además existen un subconjunto invariante $\Omega_0 \subset \Omega$ con $m_0(\Omega_0) = 1$, tres funciones medibles $a_\Gamma,\ b_\Gamma,\ c_\Gamma : \Omega \to \mathbb{R}$ y una constante η_Γ tales que

$$q_\Gamma(\xi, \varphi) = a_\Gamma(\xi)\cos^2\varphi + b_\Gamma(\xi)\,\mathrm{sen}^2\varphi + 2\,c_\Gamma(\xi)\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi$$

y $a_\Gamma(\xi)\,b_\Gamma(\xi) - c_\Gamma^2(\xi) = \eta_\Gamma$ para todo $\xi \in \Omega_0,\ \varphi \in P^1(\mathbb{R})$.

Definión 1.1 Sea $\Gamma \in C(\Omega)$ con $\eta_\Gamma < 0$. Llamamos *funciones* m_Γ a

$$\begin{aligned} m_\Gamma^{\pm} : \Omega &\to P^1(\mathbb{R}) \\ \xi &\mapsto \frac{-c_\Gamma(\xi) \pm \sqrt{-\eta_\Gamma}}{a_\Gamma(\xi)}\,. \end{aligned}$$

La igualdad $(-c_\Gamma(\xi) \pm \sqrt{-\eta_\Gamma})/a_\Gamma(\xi) = b_\Gamma(\xi)/(c_\Gamma(\xi) \pm \sqrt{-\eta_\Gamma})$ resuelve la indeterminación que aparece cuando $a_\Gamma(\xi) = 0$ y $c_\Gamma(\xi) = \pm\sqrt{-\eta_\Gamma}$. La ecuación $q_\Gamma = 0$ determina en $K_{\mathbb{R}}$ dos láminas ergódicas para Φ, $M_\Gamma^{\pm} = \{(\xi, m_\Gamma^{\pm}(\xi)) \mid \xi \in \Omega\}$. De este hecho se deduce que sólo pueden existir funciones continuas en Ω que verifiquen la condición de la definición

cuando $K_{\mathbb{R}}$ descompone en láminas ergódicas para Φ. Recíprocamente, en Núñez-Obaya [5] se demuestra que esta última condición basta para garantizar la existencia de funciones $\Gamma \in C(\Omega)$ con $\eta_\Gamma < 0$. Nótese que las láminas $M^\pm_\Gamma$ son cerradas si q_Γ es una función continua. Probaremos que estas dos propiedades ($q_\Gamma \in C(K_{\mathbb{R}})$ y $\eta_\Gamma < 0$) garantizan que Γ es una dirección de salida del espectro a la resolvente, en el sentido previamente explicado. Sea Γ una de tales funciones; consideremos la familia de ecuaciones (3) y los correspondientes sistemas (2). Denotamos por Φ_ε el flujo inducido en $K_{\mathbb{R}}$ y por $U_\varepsilon(t,\xi)$ la matriz fundamental determinada por $U_\varepsilon(0,\xi) = \mathrm{Id}$. Supongamos que para un determinado valor de ε la familia de sistemas admite dicotomía exponencial. En este caso las proyecciones $M^\pm_\Gamma(\varepsilon) = \Pi(V^\pm_\Gamma(\varepsilon)) = \{(\xi, m^\pm_\Gamma(\xi,\varepsilon)) \mid \xi \in \Omega\}$ son subconjuntos de $K_{\mathbb{R}}$ invariantes para Φ_ε, minimales y cerrados. Las funciones m de Weyl, $m^\pm_\Gamma(\xi,\varepsilon)$, son por tanto funciones continuas en Ω y representan las coordenadas proyectivas de las direcciones estables en $\mp\infty$. A su vez proporcionan una expresión para el exponente de Lyapunov: si $x^\pm(t,\xi)$ son las únicas soluciones que pertenecen a $L^2(\mathbb{R}^+)$ y $L^2(\mathbb{R}^-)$ respectivamente,

$$\begin{aligned}\gamma_\Gamma(\varepsilon) &= \mp \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln\left((x^\pm_\varepsilon(T,\xi))^2 + ((x^\pm_\varepsilon)'(T,\xi))^2\right) \\ &= \mp \int_\Omega (1 + \Gamma_0(\xi) - \varepsilon\,\Gamma(\xi)) \, \frac{m^\pm_\Gamma(\xi,\varepsilon)}{1 + (m^\pm_\Gamma)^2(\xi,\varepsilon)} \, dm_0 \ .\end{aligned}$$

En la siguiente sección demostraremos también la convergencia uniforme de las funciones m_Γ de Weyl; sus límites son precisamente las funciones m_Γ antes definidas. Por último calcularemos las derivadas laterales del exponente de Lyapunov en la dirección Γ, que resultarán ser no nulas y de signo opuesto.

2 Resultados

El siguiente lema juega un importante papel en la demostración del teorema principal.

Lema 2.1 *Consideremos la familia uniparamétrica de sistemas lineales*

$$\mathbf{x}' = \varepsilon \begin{pmatrix} d_1(\xi\cdot t,\varepsilon) & d_2(\xi\cdot t,\varepsilon) \\ d_3(\xi\cdot t,\varepsilon) & -d_1(\xi\cdot t,\varepsilon) \end{pmatrix} \mathbf{x} = \varepsilon\, D(\xi\cdot t,\varepsilon)\,\mathbf{x} \ , \tag{4}$$

con $D(\xi,\varepsilon) \in C(\Omega, L^2(\mathbb{R}))$ para $|\varepsilon| > 0$ y supongamos que existe $\lim_{\varepsilon\to 0} D(\xi,\varepsilon) = D$, matriz constante con $\det D = d < 0$. Entonces

(i) *existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que si $0 < |\varepsilon| < \varepsilon_0$ la familia de ecuaciones (4) admite dicotomía exponencial;*

(ii) *las correspondientes funciones m de Weyl verifican*

$$\lim_{\varepsilon\to 0^-} m^\pm(\xi,\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} m^\mp(\xi,\varepsilon) = m^\pm$$

uniformemente en Ω, siendo $m^\pm$ las coordenadas proyectivas de los vectores propios de la matriz D correspondientes a los valores propios $\pm\sqrt{-d}$ respectivamente.

Demostración. Sea $D = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & -d_1 \end{pmatrix}$; supongamos en primer lugar $d_2 \neq 0$. Los vectores $\mathbf{v}_1 = (d_2, -d_1 + \sqrt{-d})^t$ y $\mathbf{v}_2 = (d_2, -d_1 - \sqrt{-d})^t$ son vectores propios de la matriz D asociados respectivamente a $\pm\sqrt{-d}$. Sea $Q = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$; el cambio lineal de variables $\mathbf{y} = Q^{-1}\mathbf{x}$ transforma la familia (4) en

$$\begin{aligned} \mathbf{y}' &= \varepsilon \left[\begin{pmatrix} \sqrt{-d} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-d} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_1(\xi{\cdot}t, \varepsilon) & s_2(\xi{\cdot}t, \varepsilon) \\ s_3(\xi{\cdot}t, \varepsilon) & -s_1(\xi{\cdot}t, \varepsilon) \end{pmatrix} \right] \mathbf{y} \\ &= \varepsilon \left[\begin{pmatrix} \sqrt{-d} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-d} \end{pmatrix} + S(\xi{\cdot}t, \varepsilon) \right] \mathbf{y} \,, \end{aligned} \tag{5}$$

con $S(\xi, \varepsilon) \in C(\Omega, L^2(\mathbb{R}))$ para $|\varepsilon| > 0$ y $\lim_{\varepsilon \to 0} S(\xi, \varepsilon) = 0$. Sea $\varepsilon_0 > 0$ tal que si $0 < |\varepsilon| < \varepsilon_0$ entonces $\|s_j(\xi, \varepsilon)\|_\infty < \sqrt{-d}/3$ para $j = 1, 2, 3$. Es fácil comprobar que en estas condiciones los valores propios de la matriz de (5) son reales, de signo opuesto y mayores en valor absoluto que $\sqrt{-d}/3$; esto garantiza, de acuerdo con los resultados de Coppel [1], la dicotomía exponencial de la familia de sistemas. Además esta propiedad se conserva por cambio lineal de variable, lo cual demuestra el primer apartado.
Sean $n^{\pm}(\xi, \varepsilon)$ las funciones de Weyl de la familia (5) para $0 < |\varepsilon| < \varepsilon_0$ y definamos

$$N^{\pm}(\varepsilon) = \left\{ \left(\xi, n^{\pm}(\xi, \varepsilon) \right) \mid \xi \in \Omega \right\} .$$

Tomando $Y = y_2/y_1$ obtenemos, a partir de (5), las ecuaciones de Riccati

$$Y' = \varepsilon \left(s_3(\xi{\cdot}t, \varepsilon) - 2(\sqrt{-d} + s_1(\xi{\cdot}t, \varepsilon))Y - s_2(\xi{\cdot}t, \varepsilon)Y^2 \right) .$$

Sea $Y_\varepsilon(t, \xi)$ una solución cualquiera de esta ecuación; entonces

$$\frac{d}{dt} |Y_\varepsilon(t, \xi)|^2 = 2\varepsilon \left(s_3(\xi{\cdot}t, \varepsilon)\, Y_\varepsilon(t, \xi) - 2 \left(\sqrt{-d} + s_1(\xi, \varepsilon) \right) Y_\varepsilon^2(t, \xi) - s_2(\xi{\cdot}t, \varepsilon) Y_\varepsilon^3(t, \xi) \right) .$$

Tomemos $\kappa > 0$, $\kappa \leq \sqrt{-d}/3$ y sea $\varepsilon(\kappa)$ una constante positiva tal que si $0 < |\varepsilon| < \varepsilon(\kappa)$ entonces $\|s_j(\xi, \varepsilon)\|_\infty \leq \kappa$ para $j = 1, 2, 3$. Bajo estas condiciones,

$$\begin{aligned} & s_3(\xi{\cdot}t, \varepsilon) Y_\varepsilon(t, \xi) - 2 \left(\sqrt{-d} + s_1(\xi, \varepsilon) \right) Y_\varepsilon^2(t, \xi) - s_2(\xi{\cdot}t, \varepsilon) Y_\varepsilon^3(t, \xi) \\ & \qquad \leq \kappa\, |Y_\varepsilon(t, \xi)| - 2 \left(\sqrt{-d} - \kappa \right) |Y_\varepsilon(t, \xi)|^2 + \kappa\, |Y_\varepsilon(t, \xi)|^3 \\ & \qquad = \kappa\, |Y_\varepsilon(t, \xi)| \left(|Y_\varepsilon(t, \xi)| - y_1(\kappa) \right) \left(|Y_\varepsilon(t, \xi)| - y_2(\kappa) \right) , \end{aligned}$$

siendo

$$y_1(\kappa) = \frac{\sqrt{-d} - \kappa + \sqrt{-d - 2\kappa\sqrt{-d}}}{\kappa} \quad \text{y} \quad y_2(\kappa) = \frac{\sqrt{-d} - \kappa - \sqrt{-d - 2\kappa\sqrt{-d}}}{\kappa}$$

(ambas reales y positivas). Es inmediato probar que $\lim_{\kappa \to 0} y_1(\kappa) = \infty$ y $\lim_{\kappa \to 0} y_2(\kappa) = 0$. Además si $0 < \varepsilon < \varepsilon(\kappa)$ e $Y_\varepsilon(t, \xi) \in (y_2(\kappa), y_1(\kappa))$ se tiene que $(d/dt)\, |Y_\varepsilon(t, \xi)|^2 < 0$, de manera que los subconjuntos compactos de $K_{\mathbb{R}}$,

$$K^+(\kappa) = \bigcup_{\xi \in \Omega} \left(\{\xi\} \times \left\{ Y \in P^1(\mathbb{R}) \mid |Y| \geq y_1(\kappa) \right\} \right)$$

y

$$K^-(\kappa) = \bigcup_{\xi\in\Omega} \left(\{\xi\} \times \left\{ Y \in P^1(\mathbb{R}) \,|\, |Y| \leq y_2(\kappa) \right\} \right)$$

son, respectivamente, negativa y positivamente invariantes para el flujo correspondiente a ε. Por consiguiente, si $0 < \kappa < \sqrt{-d}/3$, se tiene que $N^{\pm}(\varepsilon) \subset K^{\pm}(\kappa)$ para todo ε con $0 < \varepsilon < \varepsilon(\kappa)$, lo que implica que

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} n^+(\xi,\varepsilon) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{\varepsilon\to 0^+} n^-(\xi,\varepsilon) = 0$$

uniformemente en Ω. Análogamente, suponiendo $-\varepsilon(\kappa) < \varepsilon < 0$ se demuestra que

$$\lim_{\varepsilon\to 0^-} n^+(\xi,\varepsilon) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{\varepsilon\to 0^-} n^-(\xi,\varepsilon) = \infty$$

uniformemente en Ω. Sean $m^{\pm}(\xi,\varepsilon)$ las funciones de Weyl de (4) para $0 < |\varepsilon| < \varepsilon_0$; de la igualdad

$$m^{\pm}(\xi,\varepsilon) = \frac{-d_1}{d_2} + \frac{\sqrt{-d}}{d_2}\,\frac{1 - n^{\pm}(\xi,\varepsilon)}{1 + n^{\pm}(\xi,\varepsilon)}$$

se deduce que

$$\lim_{\varepsilon\to 0^-} m^{\pm}(\xi,\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} m^{\mp}(\xi,\varepsilon) = \frac{-d_1 \pm \sqrt{-d}}{d_2}$$

uniformemente en Ω, lo que prueba el segundo apartado. La demostración es análoga si $d_2 = 0$. $\square$

Teorema 2.2 *Sea $\Gamma \in C(\Omega)$ con $q_\Gamma(\xi,\varphi) \in C(K_{\mathbb{R}})$ y $\eta_\Gamma < 0$. Entonces*

(i) *existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que si $0 < |\varepsilon| < \varepsilon_0$ la familia de ecuaciones (1) admite dicotomía exponencial;*

(ii) *las correspondientes funciones m_Γ de Weyl verifican*

$$\lim_{\varepsilon\to 0^-} m_\Gamma^{\pm}(\xi,\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} m_\Gamma^{\mp}(\xi,\varepsilon) = m_\Gamma^{\pm}(\xi)$$

uniformemente en Ω;

(iii) *existen derivadas laterales en $\varepsilon = 0$ del exponente de Lyapunov en la dirección de Γ, siendo $\gamma_\Gamma'(0,+) = -\gamma_\Gamma'(0,-) = \sqrt{-\eta_\Gamma}$.*

Demostración. El primer paso de la demostración consiste básicamente en definir un cambio lineal continuo de variables a lo largo del flujo para transformar la ecuación lineal no perturbada de la familia (1) en el sistema $\mathbf{x}' = 0$. Con esta intención reformularemos (1) en una nueva base de tal manera que el flujo en el fibrado proyectivo correspondiente descomponga, para $\varepsilon = 0$, en láminas ergódicas cerradas.
Las ecuaciones lineales $-x'' + \Gamma_0(\xi\cdot t)\,x = 0$ inducen un flujo continuo en el fibrado $K_S = \Omega \times S^1$. Fijemos un subconjunto minimal $N \subset K_S$; este compacto es un cubrimiento de una o dos hojas de un subconjunto minimal adecuado de $K_{\mathbb{R}}$. Nuestra nueva base será

$\Omega^1 = N$; en ella consideramos el flujo $\Xi^1 = \Phi|_N$ y definimos las funciones $\Gamma_0^1(\xi,\varphi^1) = \Gamma_0(\xi)$ y $\Gamma^1(\xi,\varphi^1) = \Gamma(\xi)$. La familia de ecuaciones lineales

$$-x'' + \Big(\Gamma_0^1(\Phi(t,\xi,\varphi^1)) - \varepsilon\,\Gamma^1(\Phi(t,\xi,\varphi^1))\Big)\,x = 0 \tag{6}$$

para $(\xi,\varphi^1) \in N$ define un flujo en el fibrado trivial $N\times\mathbb{R}^2$. De manera que las ecuaciones (6) inducen un flujo Φ_ε^1 en el fibrado compacto $K_{\mathbb{R}}^1 = N \times P^1(\mathbb{R})$ que incluye al ya definido Φ_ε como factor. Denotamos por $U_\varepsilon(t,\xi,\varphi^1)$ la matriz fundamental de (6) con $U_\varepsilon(0,\xi,\varphi^1) = \mathrm{Id}$. Consideremos ahora los flujos dados por las ecuaciones

$$-x'' + \Gamma_0^1(\Phi(t,\xi,\varphi^1))\,x = 0 \tag{7}$$

en los fibrados compactos $K_{\mathbb{R}}^1$ y $K_S^1 = N\times S^1$. Denotamos por $j : S^1 \to P^1(\mathbb{R})$ la proyección sobre la recta proyectiva real ($j|_{[0,\pi)} = \mathrm{id},\ j|_{[\pi,2\pi)} = \mathrm{id} - \pi$). Claramente

$$M^1 = \Big\{(\xi,\varphi^1,\varphi^1) \mid (\xi,\varphi^1) \in N\Big\}$$

es una lámina ergódica cerrada en (K_S^1,Φ^1) y constituye un cubrimiento de una hoja de una lámina (también cerrada) de $(K_{\mathbb{R}}^1,\Phi^1)$. Recordemos que suponemos que todas las soluciones de la ecuación (7) son acotadas. Se demuestra en [4] que en este caso existe una medida en $K_{\mathbb{R}}$ invariante para Φ absolutamente continua con respecto a m_1 cuya función de densidad es absolutamente continua y tiene la siguiente expresión:

$$p(\xi,\varphi) = \frac{1}{A(\xi)\cos^2\varphi + B(\xi)\,\mathrm{sen}^2\varphi + 2\,C(\xi)\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi}\ .$$

Sea $p^1(\xi,\varphi^1,\varphi) = p(\xi,j(\varphi))$ para todo $(\xi,\varphi^1,\varphi) \in K_S^1$; claramente $p^1 \in C(K_S^1)$ y, si definimos $A^1(\xi,\varphi^1) = A(\xi)$, $B^1(\xi,\varphi^1) = B(\xi)$ y $C^1(\xi,\varphi^1) = C(\xi)$ para todo $(\xi,\varphi^1) \in N$, entonces

$$p^1(\xi,\varphi^1,\varphi) = \frac{1}{A^1(\xi,\varphi^1)\cos^2\varphi + B^1(\xi,\varphi^1)\,\mathrm{sen}^2\varphi + 2\,C^1(\xi,\varphi^1)\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi}\ .$$

En estas condiciones la transformación lineal continua

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{A^1(\Phi(t,\xi,\varphi^1))}} & 0 \\ \dfrac{C^1(\Phi(t,\xi,\varphi^1))}{\sqrt{A^1(\Phi(t,\xi,\varphi^1))}} & \sqrt{A^1(\Phi(t,\xi,\varphi^1))} \end{pmatrix} \mathbf{x} = P(\Phi(t,\xi,\varphi^1))\,\mathbf{x}$$

lleva las ecuaciones de segundo orden (7) a la familia de sistemas lineales

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{A^1(\Phi(t,\xi,\varphi^1))} \\ -\dfrac{1}{A^1(\Phi(t,\xi,\varphi^1))} & 0 \end{pmatrix}\mathbf{y} \tag{8}$$

e induce una transformación de Perron-Möbius en el fibrado projectivo que convierte el flujo Φ^1 en la traslación sobre las fibras Ψ^1 y lleva láminas ergódicas en láminas ergódicas. La

continuidad del cambio de variable garantiza que la imagen de M^1 es una lámina ergódica cerrada N^1 en (K_S^1, Ψ^1). De hecho (K_S^1, Ψ^1) (y como consecuencia también (K_S^1, Φ^1), $(K_{\mathbb{R}}^1, \Phi^1)$) descompone en láminas de este tipo, trasladadas de N^1.
Escribimos

$$N^1 = \left\{ \left(\xi, \varphi^1, \psi(\xi, \varphi^1) \right) \mid (\xi, \varphi^1) \in N \right\}.$$

Se tiene entonces que

$$\frac{d}{dt}\, \psi(\Phi(t, \xi, \varphi^1)) = \frac{1}{A^1(\Phi(t, \xi, \varphi^1))}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, $(\xi, \varphi^1) \in N$. Es fácil comprobar que la transformación lineal continua

$$\mathbf{y}^* = Q(\Phi(t, \xi, \varphi^1))\, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} \cos \psi(\Phi(t, \xi, \varphi^1)) & -\operatorname{sen} \psi(\Phi(t, \xi, \varphi^1)) \\ \operatorname{sen} \psi(\Phi(t, \xi, \varphi^1)) & \cos \psi(\Phi(t, \xi, \varphi^1)) \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

lleva la familia de sistemas lineales (8) en $(\mathbf{y}^*)' = 0$. Sea $V^{-1}(\xi, \varphi^1) = Q(\xi, \varphi^1)\, P(\xi, \varphi^1)$; claramente $V \in C(N, L(\mathbb{R}^2))$ y $V(\Phi(t, \xi, \varphi^1))$ define una matriz fundamental de (7). Por tanto $V(\Phi(t, \xi, \varphi^1)) = U(t, \xi, \varphi^1)\, V(\xi, \varphi^1)$ (nótese que $U(t, \xi, \varphi^1)$ y $P(\xi, \varphi^1)$ son independientes de la variable φ^1). Denotamos

$$V(\xi, \varphi^1) = \begin{pmatrix} v_1(\xi, \varphi^1) & v_2(\xi, \varphi^1) \\ v_1'(\xi, \varphi^1) & v_2'(\xi, \varphi^1) \end{pmatrix}, \quad \text{siendo } v_i'(\xi, \varphi^1) = \frac{d}{dt}\, v_i(\Phi(t, \xi, \varphi^1))\Big|_{t=0}$$

Un cálculo directo muestra que el cambio lineal de variables $\mathbf{x} = V(\Phi(t, \xi, \varphi^1))\, \mathbf{y}$ lleva las ecuaciones lineales de segundo orden (6) a

$$\mathbf{y}' = \varepsilon\, W_{\Gamma^1}(\Phi(t, \xi, \varphi^1))\, \mathbf{y}\ , \tag{9}$$

donde

$$W_{\Gamma^1}(\xi, \varphi^1) = \Gamma^1(\xi, \varphi^1) \begin{pmatrix} v_1(\xi, \varphi^1)\, v_2(\xi, \varphi^1) & v_2^2(\xi, \varphi^1) \\ -v_1^2(\xi, \varphi^1) & -v_1(\xi, \varphi^1)\, v_2(\xi, \varphi^1) \end{pmatrix}\ .$$

En la segunda etapa de la prueba seguiremos un argumento de Teoría de Perturbaciones (véase [3]) para convertir (9) en una nueva familia de sistemas lineales que verifique las hipótesis del Lema 2.1. Nótese que

$$W_{\Gamma_1}\Big(\Phi(t, \xi, \varphi^1)\Big) = V^{-1}(\xi, \varphi^1)\, \Gamma(\xi \cdot t) \begin{pmatrix} x\left(t, \xi, \dfrac{\pi}{2}\right) x(t, \xi, 0) & x^2(t, \xi, 0) \\ -x^2\left(t, \xi, \dfrac{\pi}{2}\right) & -x\left(t, \xi, \dfrac{\pi}{2}\right) x(t, \xi, 0) \end{pmatrix} V(\xi, \varphi^1)\ .$$

La continuidad de q_Γ garantiza que

$$D(\xi, \varphi^1) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} W_{\Gamma^1}(\Phi(t, \xi, \varphi^1))\, dt = V^{-1}(\xi, \varphi^1) \begin{pmatrix} c_\Gamma(\xi) & a_\Gamma(\xi) \\ -b_\Gamma(\xi) & -c_\Gamma(\xi) \end{pmatrix} V(\xi, \varphi^1) \tag{10}$$

existe siempre (véase [5]) y define una matriz continua e invariante en N. Como el flujo (N, Φ) es minimal, existe una matriz constante D tal que $D(\xi, \varphi^1) = D$ para todo $(\xi, \varphi^1) \in N$. Más aún, si μ es una medida en N invariante para Φ se tiene que

$$\int_N \Big(W_{\Gamma^1}(\xi, \varphi^1) - D \Big)\, d\mu = 0\ .$$

Sean

$$C_0(N) = \left\{ f \in C(N) \,|\, \int_N f \, d\mu = 0 \text{ para toda medida } \mu \text{ en } N \text{ invariante bajo } \Phi \right\}$$

y

$$C_1(N) = \left\{ f \in C(N) \,|\, \text{existe } g \in C(N) \text{ con } \left. \frac{d}{dt} g\Big(\Phi(t,\xi,\varphi^1)\Big)\right|_{t=0} = f(\xi,\varphi^1) \right\} .$$

Entonces $\overline{C_1(N)} = C_0(N)$; este clásico resultado puede encontrarse en Swchartzman [6]. Escribimos (9) en la forma

$$\mathbf{y}' = \varepsilon \left[D + \Big(W_{\Gamma^1}\Big(\Phi(t,\xi,\varphi^1)\Big) - D \Big) \right] \mathbf{y} \, .$$

Sea $(\kappa_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión estrictamente decreciente de números reales positivos convergente a 0. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tomamos una función matricial $R_n \in C(N, L(\mathbb{R}^2))$ cuya derivada a lo largo del flujo, dada por

$$R_n'(\xi,\varphi^1) = \left. \frac{d}{dt} R_n(\Phi(t,\xi,\varphi^1)) \right|_{t=0} ,$$

sea continua en N y satisfaga

$$\| R_n' - (W_{\Gamma^1} - D) \|_\infty < \kappa_n \, .$$

Existe entonces una sucesión estrictamente decreciente de números reales positivos $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n \, \|R_n\|_\infty = 0$ tales que si $\varepsilon_{n+1} \le |\varepsilon| < \varepsilon_n$ entonces

1) $\det(I + \varepsilon \, R_n(\xi,\varphi^1)) \neq 0$ para todo $(\xi,\varphi^1) \in N$;

2) el cambio lineal continuo de variables $\mathbf{y} = (I + \varepsilon \, R_n(\Phi(t,\xi,\varphi^1)))\,\mathbf{y}^*$ lleva (9) en

$$(\mathbf{y}^*)' = \varepsilon \Big(D + W^*_{\Gamma^1}\Big(\Phi(t,\xi,\varphi^1),\varepsilon\Big)\Big)\mathbf{y}^* \, , \tag{11}$$

con $\|W^*_{\Gamma^1}(\xi,\varphi^1,\varepsilon)\|_\infty \le 2\kappa_n$.

Nótese que $\det D = \eta_\Gamma < 0$. En consecuencia el Lema 2.1 proporciona una constante ε_0 tal que para $0 < |\varepsilon| < \varepsilon_0$ los sistemas lineales (9) y (11) admiten dicotomía exponencial y las correspondientes funciones n_Γ de Weyl verifican

$$\lim_{\varepsilon\to 0^-} (n^*_\Gamma)^\pm(\xi,\varphi^1,\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} (n^*_\Gamma)^\pm(\xi,\varphi^1,\varepsilon) = n^\pm_\Gamma$$

uniformemente en N, siendo $n^\pm_\Gamma$ las coordenadas proyectivas de los vectores propios de la matriz D asociados a los valores propios $\pm\sqrt{-\eta_\Gamma}$ respectivamente. Por tanto

$$\lim_{\varepsilon\to 0^-} n^\pm_\Gamma(\xi,\varphi^1,E) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} n^\pm_\Gamma(\xi,\varphi^1,E) = n^\pm_\Gamma$$

uniformemente en N.

La continuidad de la matriz V permite afirmar que para $0 < |\varepsilon| < \varepsilon_0$ las ecuaciones lineales (6) admiten dicotomía exponencial con funciones m_Γ de Weyl $m^\pm_\Gamma(\xi,\varphi^1,\varepsilon)$. La igualdad

$U_\varepsilon(t,\xi,\varphi^1) = U_\varepsilon(t,\xi)$ para todo $(\xi,\varphi^1) \in N$ implica que el valor de $m^{\pm}_\Gamma(\xi,\varphi^1,\varepsilon)$ es también independiente de la variable φ^1. Por tanto las ecuaciones lineales (1) admiten dicotomía exponencial con funciones m de Weyl $m^{\pm}_\Gamma(\xi,\varepsilon) = m^{\pm}_\Gamma(\xi,\varphi^1,\varepsilon)$; esto demuestra el primer apartado. Deducimos también la existencia de los límites

$$l^{\pm}_\Gamma(\xi) = \lim_{\varepsilon\to 0^-} m^{\pm}_\Gamma(\xi,\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} m^{\mp}_\Gamma(\xi,\varepsilon) = \frac{v_1'(\xi,\varphi^1) + v_2'(\xi,\varphi^1)\, n^{\pm}_\Gamma}{v_1(\xi,\varphi^1) + v_2(\xi,\varphi^1)\, n^{\pm}_\Gamma}$$

uniformemente en N. De la relación (10) se deriva que $l^{\pm}$ son las coordenadas proyectivas de los vectores propios de la matriz $\begin{pmatrix} c_\Gamma(\xi) & a_\Gamma(\xi) \\ -b_\Gamma(\xi) & -c_\Gamma(\xi) \end{pmatrix}$ correspondientes a los valores propios $\pm\sqrt{-\eta_\Gamma}$ respectivamente. Este hecho y la Definición 1.1 implican que $l^{\pm}_\Gamma(\xi) = m^{\pm}_\Gamma(\xi)$ para todo $\xi \in \Omega$, tal y como se afirma en (ii).
Por otra parte la transformación continua $\mathbf{x} = V(\Phi(t,\xi,\varphi^1))\,\mathbf{y}$ no altera el exponente de Lyapunov de (6). En consecuencia, si $0 < |\varepsilon| < \varepsilon_0$,

$$\begin{aligned}\gamma_\Gamma(\varepsilon) = \varepsilon \int_\Omega \Bigg(& -(d_1 + s_1(\xi,\varepsilon)) \frac{(n^-_\Gamma)^2(\xi,\varepsilon) - 1}{(n^-_\Gamma)^2(\xi,\varepsilon) + 1} \\ = \quad & +(d_2 + d_3 + s_2(\xi,\varepsilon) + s_3(\xi,\varepsilon)) \frac{n^-_\Gamma(\xi,\varepsilon)}{(n^-_\Gamma)^2(\xi,\varepsilon) + 1} \Bigg)\, dm_0\end{aligned}$$

La convergencia uniforme de $n^-(\xi,\varepsilon)$ nos conduce a

$$\lim_{\varepsilon\to 0^{\pm}} \frac{\gamma_\Gamma(\varepsilon)}{\varepsilon} = -d_1 \frac{(n^-_\Gamma)^2 - 1}{(n^-_\Gamma)^2 + 1} + (d_2 + d_3) \frac{n^-_\Gamma}{(n^-_\Gamma)^2 + 1} = \pm\sqrt{-\eta_\Gamma}\ ,$$

lo que completa la demostración del teorema. □

Supongamos que el potencial inicial g_0 es una función casi-periódica; el flujo Ξ en la base Ω es entonces únicamente ergódico. De acuerdo con los resultados de [4] y [5] la existencia de $\Gamma \in C(\Omega)$ con $q_\Gamma \in C(K_{\mathbb{R}})$ y $\eta_\Gamma < 0$ equivale (bajo la hipótesis de acotación de las soluciones de (1)) a la descomposición de $K_{\mathbb{R}}$ en láminas ergódicas para Φ y cerradas, copias de la base Ω. De aquí se deriva el carácter casi-periódico de las soluciones, de manera que en este caso el Teorema 1 es una simple generalización a la ecuación de Schrödinger ergódica del resultado de Moser-Pöschel. Supongamos sin embargo que la situación es la siguiente: g_0 casi-periódico, soluciones de (1) acotadas no necesariamente casi-periódicas y unicidad ergódica del flujo Φ en $K_{\mathbb{R}}$. Es posible entonces extender las ecuaciones (1) a una nueva base, $K_{\mathbb{R}}$, tal y como se hace al inicio de la demostración del Teorema 1. La acotación de las soluciones conlleva la descomposición de $K_{\mathbb{R}} \times P^1(\mathbb{R})$ en láminas ergódicas para el flujo extendido y cerradas. La unicidad ergódica del flujo en la nueva base permite afirmar que estas láminas cerradas proporcionan funciones continuas en $K_{\mathbb{R}}$ que verifican las hipótesis del teorema, y constituyen por tanto direcciones de paso a dicotomía exponencial.

Referencias

[1] Coppel, W. A.: Dichotomies in stability theory. Lecture Notes in Mathematics, **629**. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1983).

[2] Johnson, R.: Exponential dichotomy, rotation number, and linear differential operators with bounded coefficients. J. Differential Equations **91**, 88-110 (1986).

[3] Moser, J. y Pöschel, J.: An extension of a result by Dinaburg and Sinai on quasi-periodic potentials. Comment. Helv. Math. **59**, 39-85 (1984).

[4] Novo, S. y Obaya, R.: An ergodic classification of bidimensional linear systems. Univ. de Valladolid, preprint (1994).

[5] Núñez, C. y Obaya, R.: Non-tangential limit of the Weyl m-functions for the ergodic Schrödinger equation. Univ. de Valladolid, preprint (1994).

[6] Schwartzman, S.: Asymptotic cycles. Ann. Math **66, No 2**, 270-284 (1957).