SUBGRADIENTES LOCALES EN OPTIMIZACIÓN NO REGULAR

V. NOVO, J. PERÁN y L. RODRÍGUEZ MARÍN

Departamento de Matemática Aplicada
Universidad Nacional de Educación a Distancia

1. Introducción.

Con objeto de obtener criterios de optimización de funciones no diferenciables, se han desarrollado en las dos últimas décadas diferentes teorías de diferenciación generalizada para distintas clases de funciones. Las más conocidas son: la teoría de subdiferenciación de funciones convexas [12], la teoría de Clarke para funciones localmente lipschitzianas [1], la de G-diferenciación de funciones estables [11], la * - derivada [5], la derivada container [15], la G-semidiferencial [4] o la derivada screen [7]. Un estudio comparativo de estos conceptos puede verse en Hiriart-Urruty [8].

La aplicación de estas teorías de diferenciación generalizada a problemas de optimización que contienen funciones o restricciones no diferenciables, en el sentido clásico, ha dado lugar a muchos resultados útiles para la resolución de este tipo de problemas. Algunos de estos resultados pueden verse por ejemplo en [3], [6], [9], [10] o [14].

En este trabajo se introduce el concepto de subgradiente local para funciones semicontinuas inferiormente, se caracteriza su existencia y se dan condiciones de extremo relativo en términos de subgradientes locales.

Se supone que $E=\mathbb{R}^n$, A es un abierto de E, a un elemento de A y f una función real definida en A semicontinua inferiormente (s.c.i.) en a. Se denota por E' el dual topológico de E, por *conv M* la envoltura convexa de M y por *epif* el epígrafe de f dado por:

$$epif = \{ (x,\mu)\in E\times\mathbb{R}: f(x)\le\mu \} .$$

2. Subgradientes locales.

2.1. Definición. $x^* \in E'$ es un subgradiente local de f en a si existe un entorno V de a tal que

$$f(x) \geq f(a) + x^*(x-a) \qquad \forall x \in V.$$

Si $x^* \in E'$ es un subgradiente local de f en a, entonces

$$z - x^*(x-a) - f(a) = 0$$

es un hiperplano H de apoyo del epígrafe de f restringida a V en el punto $(a,f(a))$. Recíprocamente, si H es un hiperplano de apoyo de $epif|_V$ en a, entonces x^* es un subgradiente local de f en a. En este caso, es claro que existe $\delta > 0$ tal que

$$\frac{f(a+tv) - f(a)}{t} \geq x^*(v)$$

para todo $v \in E$ y $0 < t < \delta$.

Como consecuencia inmediata de la definición de subgradiente local, el punto a es un mínimo relativo de f si y sólo si 0 es un subgradiente local de f en a.

2.2. Teorema. f posee un subgradiente local x^* en a si y sólo si $(a,f(a))$ es un elemento de la frontera de $conv\ [epif|_V]$.

Demostración. Si x^* es un subgradiente local de f en a, entonces $z - x^*(x-a) - f(a) = 0$ es un hiperplano de apoyo de $epif|_V$ en a y $epif|_V$ está contenido en uno de los semiespacios cerrados D que determina. Como $conv\ [epif|_V] \subset D$ y $(a, f(a)) \in conv\ [epif|_V] \cap D$,se tiene que $(a, f(a)) \in Fr\ conv\ [epif|_V]$.

Recíprocamente, si $(a, f(a)) \in Fr\ conv\ [epif|_V]$ existe al menos un hiperplano de apoyo $z - x^*(x-a) - f(a) = 0$ del conjunto en el punto, por lo tanto x^* es un subgradiente local de la función $h(x) = inf\ \{\mu \in \mathbb{R}:\ (x,\mu) \in conv\ [epif|_V]\}$ en a. Como consecuencia x^* es un subgradiente local de f en a.

2.3. Definición. Se llama derivada direccional inferior generalizada de f en a según el vector $v \neq 0$ y se denota por $f_I'(a;v)$ al límite

$$f_I'(a;v) = \liminf \left\{ \frac{f(a+t_n v_n) - f(a)}{t_n} :\ \forall (t_n) \downarrow 0,\ \forall (v_n) \to v \right\}$$

Análogamente, la derivada direccional superior generalizada de f en a según el vector $v \neq 0$ se define por:

$$f_S'(a;v) = \limsup \left\{ \frac{f(a+t_n v_n)-f(a)}{t_n} : \forall (t_n)\downarrow 0,\ \forall (v_n)\to v \right\}$$

$f_I'(a;.)$ y $f_S'(a;.)$ son aplicaciones de E en la recta real completada, en la que se considera la extensión de las operaciones para $+\infty$ y $-\infty$ introducidas en el Análisis Convexo (véase [12], pag. 24). Se comprueba fácilmente que ambas aplicaciones son positivamente homogéneas y en caso de que sus imágenes en v coincidan, el valor común es la derivada radial usual del Análisis Convexo [12]. Además si se generaliza la derivada f_S^o, definida por Clarke [1] para funciones localmente lipschitzianas, y la correspondiente derivada inferior f_I^o al caso de funciones s.c.i., de modo que tomen valores en $\overline{\mathbb{R}}$,

$$f_I^o(a;v) = \liminf_{x\to a,\, t\downarrow 0} \frac{f(x+tv)-f(x)}{t}$$

$$f_S^o(a;v) = \limsup_{x\to a,\, t\downarrow 0} \frac{f(x+tv)-f(x)}{t}$$

es claro que para todo v de E se verifica que:

$$f_I^o(a;v) \le f_I'(a;v) \le f_S'(a;v) \le f_S^o(a;v)$$

Por otro lado

$$f_S^o(a;-v) = \limsup_{x\to a,\, t\downarrow 0} \frac{f(x-tv)-f(x)}{t} = \limsup_{x\to a,\, t\downarrow 0} - \frac{f(x-tv+tv)-f(x-tv)}{t} =$$

$$= \limsup_{y\to a,\, t\downarrow 0} - \frac{f(y+tv)-f(y)}{t} = - \liminf_{y\to a,\, t\downarrow 0} \frac{f(y+tv)-f(y)}{t} = - f_I^o(a;v).$$

2.4. Nota. En general las cuatro derivadas son diferentes. Sea $f(x)=x\,sen\frac{1}{x}$, $x\neq 0$, $f(0)=0$, se tiene $f_I^o(0,1)=-\infty$, $f_I'(0,1)=-1$, $f_S'(0,1)=1$ y $f_S^o(0,1)=\infty$.

2.5. Proposición. Si x^* es un subgradiente local de f en a, entonces para todo v de E se cumple que:

$$f_I^o(a;v) \le x^*(v) \le f_I'(a;v).$$

Demostración. Sea $v\in E$. Por ser x^* un subgradiente local de f en a, existe una bola $B(a,r)$ tal que

$$f(x) \ge f(a) + x^*(x-a) \qquad \forall x \in B(a,r)$$

entonces para cualquier par de sucesiones $t_n\downarrow 0$, $v_n\to v$ tales que $\|t_n v_n\| \le r$ se tiene

$$\frac{1}{t_n}[f(a+t_n v_n)-f(a)] \geq x^*(v_n)$$

tomando límites inferiores resulta $f_I'(a;v) \geq x^*(v)$. Por otra parte

$$-f_I^o(a;-v) = f_S^o(a;v) \geq f_I'(a;v) \geq x^*(v)$$

de donde

$$f_I^o(a;-v) \leq -x^*(v) = x^*(-v).$$

Como consecuencia inmediata se tiene la siguiente condición necesaria de extremo.

2.6. Corolario. Si a es un mínimo local de f, entonces

$$f_I^o(a;v) \leq 0 \leq f_I'(a;v).$$

para todo v de E.

2.7. Proposición. Si $f_I'(a;v) > x^*(v)$ para todo $v \in E$, $v \neq 0$, entonces x^* es un subgradiente local de f en a.

Demostración. Si no es un subgradiente local de f en a, para cada n existe ,