Una forma eficiente de usar el método Galerkin no lineal

Julia Novo [*] Bosco García-Archilla[†] Edriss S. Titi[‡]

Abstract

Se presenta un método Galerkin postprocesado para la discretización de ecuaciones en derivadas parciales de tipo disipativo. Se muestra que, en el caso de modos de Fourier, este método presenta, para problemas en una y dos dimensiones espaciales, el mismo orden de convergencia que el método Galerkin no lineal. Las ventajas de este nuevo método se extienden a las ecuaciones de Navier-Stokes en dos dimensiones con condiciones de contorno periódicas.

1 Introducción

Los métodos Galerkin no lineales (NLG) [13] son discretizaciones espaciales de ecuaciones en derivadas parciales disipativas que han recibido bastante atención en los últimos años.

Una de sus principales ventajas es que presentan mayor orden de convergencia que los clásicos métodos Galerkin. Sin embargo, algunos estudios numéricos recientes [8], [18] muestran que su mayor precisión se obtiene con un coste computacional elevado, lo que conduce, en muchas situaciones, a hacerlos menos efectivos que los métodos clásicos.

[*]Departamento de Matemática Aplicada y Computación. Universidad de Valladolid, Valladolid, España.

[†]Departamento de Matemáticas. Universidad Autónoma de Madrid, Madrid, España.

[‡]Department of Mathematics. University of California at Irvine, Irvine, California

Las ecuaciones con las que vamos a tratar son ejemplos de ecuaciones en derivadas parciales disipativas que pueden escribirse en forma abstracta como

$$\frac{du}{dt} + \nu Au + R(u) = f, \tag{1}$$

con u en un espacio de Hilbert adecuado H.

Aquí, $\nu > 0$ es un escalar, $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ es un operador densamente definido, no acotado, autoadjunto y positivo, con inverso compacto. En muchos casos de interés, A es $-\Delta$ ó Δ^2, con condiciones de contorno adecuadas. El operador $R : D(R) \subset H \longrightarrow H$ es no lineal y verifica $D(A) \subset D(R)$. Puede decirse que A reúne las derivadas espaciales de mayor orden, mientras que R agrupa derivadas espaciales de orden más bajo y términos no lineales.

Ejemplos de ecuaciones que pueden escribirse de esta forma son la ecuación de Burgers

$$u_t + uu_x - \nu u_{xx} = f, \tag{2}$$

las ecuaciones de reacción-difusión (RD)

$$u_t = \nu u_{xx} + \sum a_l u^l + f, \tag{3}$$

y la ecuación de Kuramoto-Sivashinsky (KS)

$$u_t + 4\Delta^2 u + \theta(\Delta u + uu_x) = f, \tag{4}$$

entre otras. Estos son ejemplos sencillos de ecuaciones disipativas que se usan habitualmente como modelos para estudiar otros sistemas más complicados que rigen muchos fenómenos físicos (ver [14] y las referencias que allí aparecen).

Dadas las características de A, sus autofunciones $\{w_1, w_2, ...\}$ con autovalores asociados $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ...$ forman un conjunto ortonormal y completo en H. Denotaremos por $H_m = \text{span}\,\{w_1, w_2, ..., w_m\}$, es decir, el espacio generado por las m primeras autofunciones del operador A, P_m, la proyección ortogonal de H en H_m y $Q_m = I - P_m$ su complemento.

Dada u solución de (1) definimos $p = P_m u$ y $q = Q_m u$ y la ecuación (1) se reescribe como el sistema

$$\frac{dp}{dt} + \nu Ap + P_m R(p+q) = P_m f, \qquad p \in H_m, \tag{5}$$

$$\frac{dq}{dt} + \nu Aq + Q_m R(p+q) = Q_m f, \qquad q \in Q_m H. \tag{6}$$

La idea de que para $m \gg 1$ la dinámica de las frecuencias altas, q, pueda estar determinada de alguna forma por la de las frecuencias bajas, p, nos conduce al concepto de variedad inercial [7].

En una ecuación en derivadas parciales disipativa como (1), una variedad inercial (IM), cuando existe, es una variedad suficientemente regular, de dimensión finita e invariante por el flujo de (1), que atrae exponencialmente a todas las soluciones cuando el tiempo tiende a infinito. Tal variedad debe contener necesariamente al atractor global.

Sin embargo, hay todavía muchas ecuaciones en derivadas parciales disipativas para las cuales no se conoce la existencia de variedad inercial. Y, cuando existe, no se posee en general una forma explícita de dicha variedad inercial.

2 Métodos numéricos

La discretizacion de la ecuación (1) por el método Galerkin estándar, basado en las autofunciones $w_j, j = 1, 2, ...$ (también conocido como método Galerkin espectral), proyecta la ecuación en H_m. La solución numérica $u_m \in H_m$ se obtiene resolviendo

$$\frac{d}{dt}u_m + \nu Au_m + P_m R(u_m) = P_m f, \qquad u_m(0) = P_m u(0). \tag{7}$$

Los métodos Galerkin no lineales [13] se crearon en conexión con las variedades inerciales.

En una variedad inercial, las frecuencias altas, q, de la solución u pueden depender explícitamente de las frecuencias bajas mediante una relación del tipo $q = \Phi(p)$. De esta forma u puede ser descrita por (5) junto con Φ. Es decir, podemos eliminar q del sistema (5) - (6) y obtener

$$\frac{d}{dt}p + \nu Ap + P_m R(p + \Phi(p)) = P_m f, \tag{8}$$

que es la forma inercial de la ecuación.

Nótese que se ha reducido así la ecuación en derivadas parciales original a un sistema dinámico de dimensión finita.

Puesto que no siempre se conoce la existencia de variedad inercial, y, aunque se conozca su existencia, no se conoce, en general, la expresión exacta de Φ, los métodos Galerkin no lineales reemplazan dicha variedad por una variedad inercial aproximada. Las variedades inerciales aproximadas (AIM) atraen también las órbitas de (1) exponencialmente en un pequeño entorno. En particular, el atractor global se incluye en ese entorno. Se ha probado [6] por ejemplo que las ecuaciones de Navier-Stokes en dos dimensiones poseen AIM mientras que la existencia de variedades inerciales exactas no es conocida para estas ecuaciones. Incluso para ecuaciones que poseen IM la AIM es útil puesto que proporciona aproximaciones al atractor por variedades finito-dimensionales que están definidas explícitamente.

La solución de la ecuación (1) por el método NLG, es entonces, $y_m + \Phi_{app}(y_m)$, donde $y_m \in H_m$ se obtiene resolviendo

$$\frac{d}{dt}y_m + \nu A y_m + P_m R(y_m + \Phi_{app}(y_m)) = P_m f. \tag{9}$$

Diversas relaciones aproximadas han sido introducidas en [2], [3], [6], [13], [16]. En [2], [3], [16] se introduce una familia de aplicaciones $\Phi_j, j = 1, 2, ..$ con propiedades de aproximación cada vez mejores. En este trabajo sólo se ha usado Φ_1 definida por

$$\Phi_{app}(y_m) = \Phi_1(y_m) = (\nu A)^{-1} \left\{ -Q_m R(y_m) + Q_m f \right\}. \tag{10}$$

El resto de las Φ_j son excesivamente costosas como para resultar ventajosas desde el punto de vista computacional [9].

Hay que decir aquí que, en la práctica, el NLG no trabaja con Φ_1 tal como está definida en (10), dado que esta expresión involucra infinitas frecuencias, sino con $P_{m_1}\Phi_1$. La elección de m_1 se hace de forma que el error cometido al no considerar las frecuencias correspondientes a $Q_{m_1}\Phi_1$ sea despreciable frente al error del NLG.

Si pasamos ahora a hablar de la precisión de los métodos hay que tener en cuenta que está limitada por la capacidad de aproximación de los espacios a los que pertenece la solución. Para el Galerkin estándar este espacio es H_m mientras que para el NLG es el grafo de Φ_1. Hay que considerar además, que

los errores producidos dependen de la regularidad de la solución, lo cual a su vez está en relación con la regularidad del término fuente f.

En los artículos [6], [12] se muestra que, bajo ciertas condiciones, si $f \in D(A^\alpha)$ vamos a tener que para la aproximación u_m dada por el Galerkin estańdar se verifica

$$\|u - u_m\| \leq C\lambda_{m+1}^{-1-\alpha},$$

mientras que para la dada por el NLG se tiene la estimación

$$\|u - (y_m + \Phi_{app}(y_m))\| \leq C\lambda_{m+1}^{-\alpha-\beta},$$

donde $\beta > 1$. Por ejemplo, $\beta = 3/2$ para la ecuación de Burgers o las ecuaciones de Navier-Stokes y $\beta = 7/4$ para la ecuación de Kuramoto-Sivashinski.

Por tanto, podemos decir que la principal ventaja del NLG es que su solución, $y_m + \Phi_{app}(y_m)$, es una mejor aproximación a la solución u de (1) que la solución u_m del Galerkin. Esto se ha probado teóricamente en [4] y comprobado en la práctica en [9], [12], [18] (ver también las referencias que allí aparecen).

Desde el punto de vista práctico, sin embargo, no está claro en la actualidad si la mejor precisión del NLG compensa su alto coste computacional. Nótese que al dar un paso en tiempo con el NLG, no sólo se debe calcular Φ_{app} cada paso (o cada varios pasos) sino que además el término $R(y_m+\Phi_{app}(y_m))$, es, en general, computacionalmente mucho más costoso que $R(u_m)$.

Los puntos de vista sobre si este coste extra merece la pena o no para la ventaja obtenida en precisión difieren. Las conclusiones alcanzadas por ejemplo en [11], [5], [17] y las de [8], [9] y [18] son completamente opuestas.

3 Galerkin postprocesado

Dejando a un lado la discusión, vamos apresentar ahora un nuevo método, consistente en un Galerkin postprocesado, que pretende recuperar la precisión del NLG en un nivel de tiempo $T > 0$ a partir de la solución obtenida con el Galerkin estándar. Más precisamente, el método consiste en añadir a la solución $u_m(T)$ obtenida con el Galerin estándar, es decir, integrando la ecuación con dicho método en un intervalo de tiempo $[t_0, T]$, las frecuencias altas $\Phi_{app}(u_m(T))$. El error así obtenido $\|u(T) - (u_m(T) + \Phi_{app}(u_m(T)))\|$, al menos para m suficientemente grande, es aproximadamente el mismo que

el obtenido con el método Galerkin no lineal. Nótese que de esta forma los pasos en tiempo se hacen con el Galerkin estándar, que es más barato, y sólo una vez que la integración está completa una única evaluación de Φ_{app} nos devuelve las ventajas del método Galerkin no lineal.

Los resultados que presentamos se limitan al caso en que las autofunciones de A son exponenciales complejas o productos tensoriales de éstas. De hecho este es el único caso en el que el método NLG, en esta formulación, es aplicable en la práctica, en el sentido en que sus autofunciones son conocidas y fáciles de evaluar.

3.1 Experimentos numéricos

Presentamos ahora algunos experimentos correspondientes a la ecuación de Burgers (2), y a la de reacción-difusión

$$\frac{d}{dt}u = \nu u_{xx} + u - u^3 + f,$$

con condiciones de contorno Dirichlet homogéneas

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t \geq 0.$$

Nótese que con la notación de (1), A es $-\partial_{xx}$. Las autofunciones de A son entonces $w_j = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\text{sen}(jx)$, y los autovalores son $\lambda_j = j^2, j = 1, 2, ...$

Para la integración en tiempo se usó el código VODE [1]. Para cada valor de m, número de frecuencias en H_m, se llevó a cabo cada experimento con distintos valores de la tolerancia variando entre 10^{-4} y 10^{-13}. El menor error obtenido fue seleccionado para el gráfico. Normalmente hay un valor, que depende de m, para el cual reducir la tolerancia no mejora los errores. Esto es debido a que el error procedente entonces de la discretización temporal es menor que el que procede de la discretización espacial. Con estas consideraciones podemos estar seguros de que los errores observados son los debidos a la discretización espacial, y no dependen, por tanto, del integrador temporal utilizado.

Mostramos diagramas en los que aparecen los errores cometidos por los métodos en la norma de $L^2[0,\pi]$, con distintos valores del parámetro m. El valor m del número de grados de libertad se representa en el eje horizontal y el correspondiente al error en el vertical. El error $\|u - u_m\|$ del Galerkin

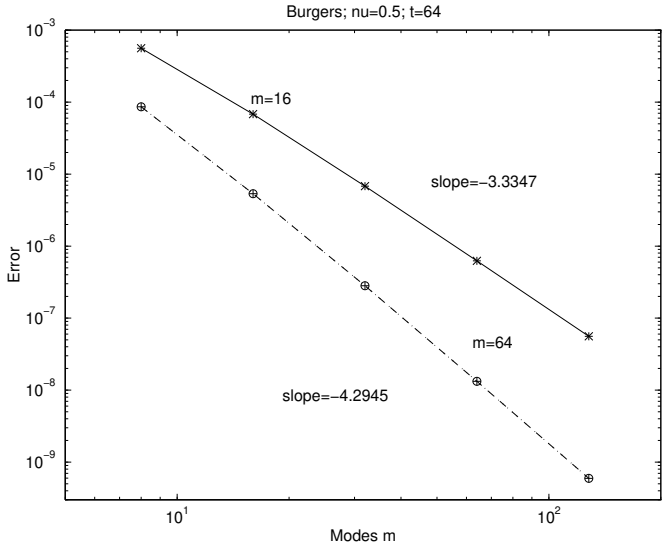

Figure 1: Errores para la ecuación de Burgers con $\nu = 0.5$: $*$ Galerkin estándar, $\circ$ NLG, $+$ Galerkin postprocesado

está representado por asteriscos $(*)$ y unido por linea continua; el error $\|u - (y_m + \Phi_1(y_m))\|$ del NLG por círculos, y unido por linea de puntos, y el error $\|u - (u_m + \Phi_1(u_m))\|$ del nuevo método por cruces $(+)$ y linea discontinua.

Los primeros experimentos (figuras 1 y 2) corresponden a la ecuación de Burgers (2) forzada con la función pico

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le \pi/4, \\ \dfrac{4}{\pi}(x - \dfrac{\pi}{4}), & \pi/4 \le x \le \pi/2, \\ \dfrac{4}{\pi}(\dfrac{3\pi}{2} - x), & \pi/2 \le x \le 3\pi/4, \\ 0, & 3\pi/4 \le x \le \pi. \end{cases}$$

Las figuras 1 y 2 muestran diagramas de convergencia para $\nu = 0.5$ y $\nu = 0.05$ respectivamente. Los errores están medidos en tiempo $T = 64$ en ambos casos. El tiempo final se eligió para que la solución estuviera en el estado estacionario.

Para $\nu = 0.5$ los resultados del NLG y del nuevo método no se distinguen. Los errores de estos dos métodos son entre 10 y 100 veces más pequeños que

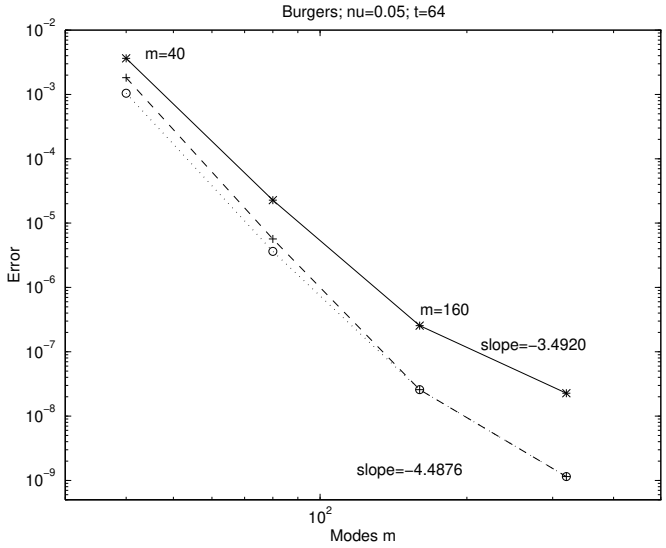

Figure 2: Errores para la ecuación de Burgers con $\nu = 0.05$: $*$ Galerkin estándar, $\circ$ NLG, $+$ Galerkin postprocesado

los del Galerkin. La medida de las pendientes de las gráficas muestra que el orden de convergencia del Galerkin es una unidad menor (en términos de $m = \lambda^{1/2}$) que el de los otros dos métodos. Esto confirma los órdenes predichos por la teoría para estos métodos.

Los resultados para $\nu = 0.05$ son similares a los anteriores, pero muestran cómo el NLG es ligeramente más preciso que el nuevo método para valores pequeños de m. Se observa de nuevo que ambos métodos muestran mejor orden de convergencia que el Galerkin.

Para la ecuación de RD con el mismo término fuerza, independiente del tiempo, los resultados que obtuvimos son los mismos que los de las figuras 1 y 2, vease [15]. Probamos también con un término fuerza dependiente del tiempo: en las figuras 3 y 4 el término fuerza es $f(x)(1 + \text{sen}(2\pi\text{t})/3)$ y la condición inicial $u(0, x) = \text{sen(x)}$ como antes. La solución es ahora casi periódica en tiempo. El valor del parámetro ν es 0.002.

El comportamiento de los métodos en la figura 3 es similar al de la figura 1. Las medidas de las pendientes de las gráficas muestran que el orden de convergencia del NLG y el nuevo método es dos unidades mayor que el del

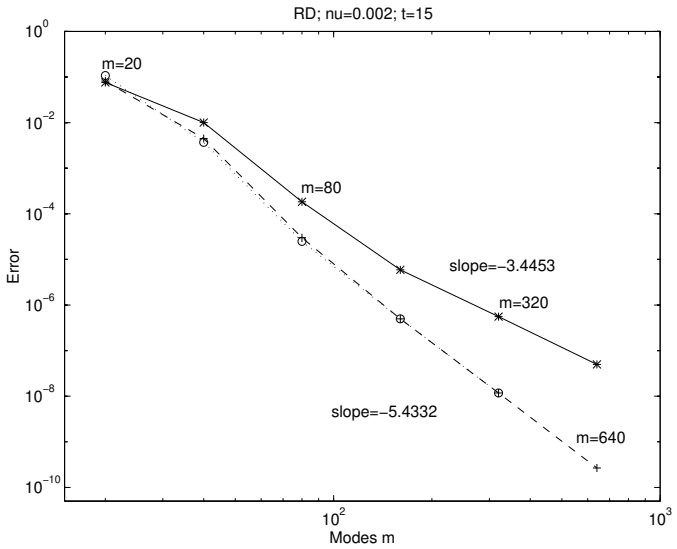

Figure 3: Errores para la ecuación de RD con $\nu = 0.002$: $*$ Galerkin estándar, $\circ$ NLG, $+$ Galerkin postprocesado.

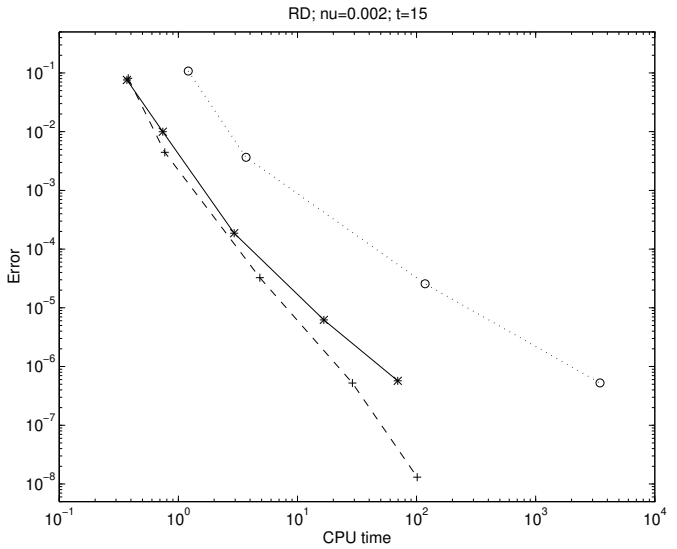

Figure 4: Diagrama de eficiencia para la ecuación de RD con $\nu = 0.002$: $*$ Galerkin estándar, $\circ$ NLG, $+$ Galerkin postprocesado.

Galerkin. Esto está de acuerdo con las cotas teóricas de que se dispone para los errores de los métodos.

La figura 4 muestra los errores de la figura 3 pero ahora en el eje de abcisas se ha representado la menor cantidad de tiempo de CPU necesario para conseguirlos. Se puede ver que el método menos eficiente es, con mucho, el NLG. Nótese por ejemplo cómo obtener un error por debajo de 10^{-6} para el NLG precisa 30 veces más tiempo que para cualquiera de los otros dos métodos. Además se ve cómo el nuevo método verdaderamente mejora la eficiencia del Galerkin, dado que cualquier error que se pretenda obtener se puede conseguir con el nuevo método en menos tiempo. La diferencia se hace más acusada al hacer tender el error a 0.

Se aprecia en la figura 4 un detalle de cierta importancia práctica. Para un valor de m dado el coste del nuevo método es mayor que el del Galerkin (aunque el menor error obtenido compensa el aumento de coste).

La razón no es sólo la evaluación extra de Φ_1 que precisa el nuevo método. Tiene que ver también con la integración en tiempo. En los experimentos de la figura 4 la tolerancia del integrador temporal es la más grande con la que se aprecian ya los errores procedentes de la discretización espacial. Puesto que en el nuevo método el error espacial es mucho menor que el del Galerkin, la tolerancia que se precisa es más pequeña, lo que lleva a un aumento en el número de pasos en tiempo, y por tanto, en el coste del método.

3.2 Análisis de los resultados

En [10] hemos probado que el nuevo método posee el mismo orden de convergencia que el NLG para varias ecuaciones. Nos hemos centrado en el caso unidimensional en la ecuación de Burgers (2), las ecuaciones de RD (3) y la de KS (4), y en dos dimensiones en las ecuaciones de NS

$$\begin{gathered} u_t + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = \nu \Delta u + g, \\ \operatorname{div}(u) = 0. \end{gathered}$$

en el dominio $\Omega = [0, 2\pi]^2$ con condiciones de contorno periódicas.

No vamos a hacer aquí una descripción detallada del análisis realizado pero sí avanzaremos una explicación de cómo es posible que el nuevo método iguale en precisión al NLG. La clave de nuestro análisis es el hecho de que la solución del Galerkin estándar u_m converge mucho más rápido a la proyección

$p = P_m u$ de la solución teórica que a la propia solución u. Esto no es sorprendente pues por ejemplo al resolver un problema lineal con coeficientes constantes $u_m = P_m u$. Nótese además que el hecho de que u_m sea una mejor aproximación a $P_m u$ que a u es de limitado interés desde el punto de vista práctico, dado que el error que se desea hacer pequeño es $u - u_m$ y no $P_m u - u_m$. Esto explica por qué se ha prestado tan poca atención a $P_m u - u_m$.

Debido a la ortogonalidad podemos descomponer el error del nuevo método como

$$\|u - (u_m + \Phi_1(u_m))\|^2 = \|P_m u - u_m\|^2 + \|q - \Phi_1(u_m)\|^2.$$

Nótese ahora que

$$\|q - \Phi_1(u_m)\| \leq \|q - \Phi_1(P_m u)\| + \|\Phi_1(P_m u) - \Phi_1(u_m)\|.$$

Dado que Φ_1 satisface la condición de Lipschitz

$$\|\Phi_1(p_1) - \Phi_1(p_2)\| \leq K\|p_1 - p_2\| \quad p_1, p_2 \in H_m$$

con K independiente de m, se tiene que el error del nuevo método depende sólo de $\|q - \Phi_1(p)\|$ y de $\|P_m u - u_m\|$. Puesto que $\|q - \Phi_1(p)\| = O(\lambda_{m+1}^{-\alpha-\beta})$ nuestro principal teorema trata la acotación de $\|P_m u - u_m\|$. Probamos que se verifica $\|P_m u - u_m\| = O(\lambda_{m+1}^{-\alpha-\beta})$ de donde se deduce ya el orden del nuevo método.

Un análisis completo y riguroso de los hechos anteriores aparece en [10].

4 Conclusiones

Se presenta un nuevo método numérico para la integración de ecuaciones en derivadas parciales disipativas. Este nuevo procedimiento se muestra superior al Galerkin estándar en el sentido de que posee mayor orden de convergencia que este método con un coste computacional no mucho mayor. También destaca sobre el Galerkin no lineal porque, a igualdad de órdenes de convergencia, el coste del Galerkin postprocesado es considerablemente más bajo. Esta igualdad de órdenes se ha probado en el caso de modos de Fourier y para un numeroso grupo de ecuaciones unidimensionales y ecuaciones bidimensionales tales como las Navier-Stokes. Los experimentos numéricos corroboran los resultados teóricos obtenidos.

References

[1] P. N. Brown, G. D. Byrne and A. C. Hindmarsh, VODE: a variable coefficient ODE Solver, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* 10, 1989, 1038–1051.

[2] A. Debusssche and M. Marion, On the construction of families of approximate inertial manifolds, *J. Diff. Eq.* 100, 1992, 173–201.

[3] C. Devulder and M. Marion, A class of numerical algorithms for large time integration: the nonlinear Galerkin method, *SIAM J. Numer. Anal.* 29, 1992, 462–483.

[4] C. Devulder, M. Marion and E. S. Titi, On the rate of convergence of Nonlinear Galerkin methods, *Math. Comp.* 60, 1993, 495–514.

[5] T. Dubois, F. Jauberteau, M. Marion and R. Temam, Subgrid modelling and interaction of small and Large wavelengths in turbulent flows, *Comp. Phys. Comm.* 65, 1991, 100–106.

[6] C. Foias, O. Manley and R. Temam, Modelling of the interaction of small and large eddies in two dimensional turbulent flows, *RAIRO* M^2AN 22, 1988, 93–114.

[7] C. Foias, G. R. Sell and R. Temam, Inertial manifolds for nonlinear evolutionary equations, *J. Differential Equations* 73, 1988, 309–353.

[8] B. García-Archilla, Some practical experience with the time integration of dissipative equations (aparecerá *J. Comp. Phys.*).

[9] B. García-Archilla and J. de Frutos, Time integration of the nonlinear Galerkin method, *IMA J. Num. Anal.* 14, 1994, 1–24.

[10] B. García-Archilla, J. Novo y E.S. Titi, A postprocessed Galerkin and the nonlinear Galerkin method (prepublicación).

[11] F. Jauberteau, C. Rosier and R. Temam, A nonlinear Galerkin method for the Navier-Stokes equations, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 8, 1990, 245–260.

[12] D. A. Jones, L. G. Margolin and E. S. Titi, On the effectiveness of the approximate inertial manifold —A computational study (aparecerá en Theor. Comp. Fluid Dynam.)

[13] M. Marion and R. Temam, Nonlinear Galerkin Methods, *SIAM J. Numer. Anal.* 26, 1989, 1139–1157.

[14] B. Nicolaenko, B. Scheurer & R. Teman, Some global dynamical properties of a class of pattern formation equations, *Comm. Par. Diff. Eqs.* 14, 1989, 245-297.

[15] J. Novo, *Eficiencia computacional de variedades inerciales aproximadas,* Msc Thesis, Universidad de Valladolid, 1995.

[16] R. Temam, Attractors for the Navier-Stokes equations: localization and approximation, *J. Fac. of Sci.*, The University of Tokio, IA, 36, (1989), 629–647.

[17] R. Temam, Dynamical systems, turbulence and the numerical solution of the Navier Stokes equations, in *Proceedings of the 11th International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics (Williamsburg)*, eds. D. Dwoyer and R. Voigt, (Lecture Notes in Physics, Springer-Verlag, Berlin 1990).

[18] R. Wallace and D. Sloan, Numerical solutions of a nonlinear dissipative system using a pseudospectral method and inertial manifolds, Strathclyde Mathematics Research Report No. 31, 1993.