# BLOW-UP NUMÉRICO EN DISCRETIZACIONES DE MODELOS DE REACCIÓN-DIFUSIÓN

J. Martínez Rodríguez[(1)], L. M. Abia Llera[(2)] y J.C. López Marcos[(2)]

(1) Departamento de Economía Aplicada (Matemáticas), Facultad de Ciencias Económicas, Universidad de Valladolid.

(2) Departamento de Matemática Aplicada y Computación, Facultad de Ciencias, Universidad de Valladolid.

## Introducción

En los últimos años se ha despertado un considerable interés en problemas de evolución no lineales cuyas soluciones dejan de estar acotadas en tiempo finito (blow-up). Estos problemas emergen en áreas tan diversas como óptica no lineal, mecánica cuántica, dinámica de fluidos, etc.

Junto al gran número de trabajos publicados, por parte de los investigadores en ecuaciones en derivadas parciales, relativos a los aspectos analíticos del blow-up, aparecen ocasionalmente estudios mediante simulación numérica que buscan caracterizar el perfil de la solución en las proximidades del instante de blow-up. Sin embargo, poco se conoce sobre el comportamiento cerca del blow-up de las soluciones numéricas de las discretizaciones utilizadas en estas simulaciones, así como de la validez de las aproximaciones a los parámetros que caracterizan el blow-up de la solución teórica que de ellas se obtienen.

Consideramos el problema parabólico semilineal

$$u_t - u_{xx} = f(u), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t > 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 < x < 1. \tag{3}$$

Este problema de reacción-difusión es un problema relevante en teoría de combustión [1], donde el blow-up juega un papel importante. Nakagawa [4] y Chen [2] han estudiado parcialmente el fenómeno del blow-up numérico en esquemas en diferencias totalmente discretos del problema (1)-(3), cuando la función de reacción tiene la forma $f(u) = u^p$, $p > 1$. En este trabajo probamos la convergencia del tiempo de blow-up de soluciones de semidiscretizaciones de (1)-(3) al tiempo de blow-up de la solución de (1)-(3), considerando términos de reacción más generales.

## Método semidiscreto

Sea $J$ un entero positivo, y consideramos $h = 1/J$, el diámetro de la red espacial definida por los puntos $x_j = jh$, $j = 0, \ldots, J$. Por $\delta^2$ denotamos el operador de diferencias

divididas centradas de segundo orden. Para aproximar la solución $u$ del problema (1)-(3) utilizamos la solución $\mathbf{U}_h(t) = [U_0(t), \ldots, U_J(t)]^T$ del esquema semidiscreto

$$\frac{d}{dt}U_j - \delta^2 U_j = f(U_j), \quad j = 1, \ldots, J-1, \quad t \geq 0 \tag{4}$$
$$U_0(t) = U_J(t) = 0, \quad t \geq 0, \tag{5}$$
$$U_j(0) = U_j^0, \quad j = 0, \ldots, J, \tag{6}$$

donde $\mathbf{U}_h^0 = [U_0^0, \ldots, U_J^0]^T$ es una aproximación al dato inicial $u_0(x)$ de (1)-(3).

El blow-up se ha caracterizado analíticamente para datos iniciales no negativos [3]. Así mismo vamos a proceder en el caso semidiscreto, estudiando primero cuándo la solución de (1)-(3) es no negativa. Para ello, introducimos las definiciones:

**Definición 1** *Una función* $\mathbf{V} \in \mathcal{C}^1([0,T], I\!R^{J+1})$ *es supersolución de (4)-(6) si*

$$\frac{d}{dt}V_j - \delta^2 V_j \geq f(V_j), \quad j = 1, \ldots, J-1, \quad t \in [0,T],$$
$$V_0(t) \geq 0,\ V_J(t) \geq 0, \quad t \in [0,T]$$
$$V_j(0) \geq U_j^0, \quad j = 0, \ldots, J.$$

*Por otro lado decimos que* $\mathbf{V} \in \mathcal{C}^1([0,T], I\!R^{J+1})$ *es subsolución de (4)-(6) si se verifican las desigualdades contrarias.*

El siguiente resultado nos permite relacionar las subsoluciones y supersoluciones de (4)-(6). Para su demostración hemos utilizado técnicas de comparación estándar.

**Teorema 1** *Sean* $\mathbf{V}$ , $\mathbf{W} \in \mathcal{C}^1([0,T], I\!R^{J+1})$, *respectivamente, subsolución y supersolución de* (4)-(6), *entonces* $\mathbf{V} \leq \mathbf{W}$.

Nótese que si la función reacción es tal que $f(0) \geq 0$, y la condición inicial es no negativa, entonces la función identicamente nula es subsolución de (4)-(6). Además, si $\mathbf{U}_h$ es solución de (4)-(6), entonces también es supersolución y, por tanto, usando el teorema anterior, concluimos que $\mathbf{U}_h \geq \mathbf{0}$. A partir de ahora consideraremos únicamente soluciones no negativas de (4)-(6).

Con respecto a la existencia y unicidad de soluciones, es bien conocido que si $f$ es localmente lipchitziana, ambas propiedades se tienen aseguradas.

### Existencia de blow-up

Para algunos términos no lineales $f(u)$, las soluciones de (4)-(6) no existen para todo instante de tiempo $t \in [0, \infty)$, porque dejan de estar acotadas. Este comportamiento queda caracterizado en la siguiente definición, donde utilizamos la notación

$$||\mathbf{U}_h(t)||_\infty = \max_{j=0,\ldots,J} |U_j(t)|.$$

**Definición 2** *Sea* $\mathbf{U}_h$ *solución no negativa de* (4)-(6). *Decimos que* $\mathbf{U}_h$ *presenta blow-up si existe* $T_b^h < \infty$ *tal que:*

$$\begin{aligned} &i) \quad ||\mathbf{U}_h(t)||_\infty < \infty, \quad t \in [0, T_b^h), \\ &ii) \quad \lim_{t \to T_b^h -} ||\mathbf{U}_h(t)||_\infty = \infty. \end{aligned}$$

*A* $T_b^h$ *se le denomina tiempo de blow-up.*

La norma considerada en $\mathbb{R}^{J+1}$ no juega un papel importante en la definición anterior, debido a que todas las normas son equivalentes. No ocurre así en el problema (1)-(3) donde la existencia de blow-up en la solución es dependiente de la norma elegida para medir el tamaño de $u$ [3].

El siguiente resultado establece una condición necesaria para la existencia de blow-up, además de proporcionar una cota inferior del tiempo en el que se produce.

**Teorema 2** *Sea* $\mathbf{U}_h$ *una solución no negativa de* (4)-(6), *donde la función de reacción* $f$ *es localmente lipschitziana y tal que* $f(z) > 0$, *para* $z \in (0, \infty)$. *Si* $\mathbf{U}_h$ *presenta blow-up en el instante de tiempo* $T_b^h < \infty$, *entonces*

$$\int_{||\mathbf{U}_h(0)||_\infty}^{\infty} \frac{dz}{f(z)} \leq T_b^h < \infty.$$

Nuestro primer paso en el análisis de blow-up numérico consistirá en tratar de determinar bajo qué condiciones las soluciones del esquema (4)-(6) tienen un crecimiento que refleje tal fenómeno. Para ello, introducimos el vector

$$\mathcal{V}_j = \frac{\sin(\pi j h)}{\left( \sum_{m=1}^{J-1} h \sin(\pi m h) \right)}, \quad j = 0, \ldots, J,$$

que es solución del problema

$$\begin{aligned} &-\delta^2 \mathcal{V}_j = \lambda_h \mathcal{V}_j, \quad j = 1, \ldots, J-1, \\ &\mathcal{V}_0 = \mathcal{V}_J = 0, \end{aligned}$$

donde $\lambda_h = (4/h^2)\sin^2(\pi h/2)$, y definimos la función

$$Q(t) = \sum_{j=1}^{J-1} h U_j(t) \mathcal{V}_j,$$

cuyo comportamiento queda caracterizado en el siguiente resultado.

**Proposición 1** *Sea* $\mathbf{U}_h$ *una solución no negativa de* (4)-(6). *Si* $f$ *es una función convexa entonces*

$$\frac{d}{dt}Q \geq f(Q) - \lambda_h Q. \tag{7}$$

Nótese que el tamaño de la solución de (4)-(6) se refleja en el de $Q$. Si el segundo miembro de la desigualdad (7) es no negativo, entonces la función $Q$ es creciente, lo que nos será de utilidad para probar la existencia de blow-up.

**Teorema 3** *Supongamos que:*

*a) la función* $f \in \mathcal{C}^1([0,\infty))$ *es convexa,* $f(z) > 0$ *para* $z \in (0,\infty)$, *y para cada* $\varepsilon > 0$ *tenemos que* $\int_\varepsilon^\infty (1/f(z))dz < \infty$,

*b) existe* $z_0 \geq 0$ *tal que* $f(z)/z$ *es creciente en* $[z_0,\infty)$,

*c) la condición inicial es no negativa y tal que*

$$\mathbf{U}_h(0) \neq \mathbf{0},\ Q(0) \geq z_0,\ f(Q(0)) - \lambda_h Q(0) > 0.$$

*Entonces la solución no negativa* $\mathbf{U}_h$ *de* (4)-(6) *presenta blow-up en un instante de tiempo* $T_b^h$ *con*

$$T_b^h \leq \int_{Q(0)}^\infty \frac{dz}{f(z) - \lambda_h z}.$$

Este teorema establece una condición suficiente para la existencia de blow-up, proporcionando además una cota superior del tiempo en el que se produce.

### Convergencia del tiempo de blow-up semidiscreto

Con el objeto de conocer la validez de las aproximaciones obtenidas con el método propuesto, realizamos un análisis de la convergencia, no sólo de las soluciones de (4)-(6) a las de (1)-(3), sino también del tiempo de blow-up numérico al teórico.

Consideramos $u$ solución de (1)-(3) y, para cada $h$, utilizamos la notación $\mathbf{u}_h(t) = [u(x_0,t),\ldots,u(x_J,t)]^T$. El siguiente teorema establece, para cada intervalo de tiempo fijo $[0,T]$ donde $u$ esté definida, que la solución $\mathbf{U}_h$ de (4)-(6) se aproxima a $u$, cuando $h \to 0$.

**Teorema 4** *Supongamos que:*

*a) la función* $f \in \mathcal{C}^1([0,\infty))$, *y el problema* (1)-(3) *tiene una solución* $u \in \mathcal{C}^{4,1}([0,1] \times [0,T])$,

*b) la condición inicial* $\mathbf{U}_h^0$ *de* (6) *satisface*

$$||\mathbf{U}_h^0 - \mathbf{u}_h(0)||_\infty = o(1), \quad h \to 0.$$

*Entonces, para $h$ suficientemente pequeño, el problema* (4)-(6) *tiene una solución* $\mathbf{U}_h \in \mathcal{C}^1([0,T], I\!R^{J+1})$ *tal que*

$$\max_{t\in[0,T]} ||\mathbf{U}_h(t) - \mathbf{u}_h(t)||_\infty = \mathcal{O}(||\mathbf{U}_h^0 - \mathbf{u}_h(0)||_\infty + h^2), \quad h \to 0.$$

Nótese que si $||\mathbf{U}_h^0 - \mathbf{u}_h(0)||_\infty = \mathcal{O}(h^2)$, cuando $h \to 0$, entonces la convergencia es de segundo orden.

El siguiente teorema establece la convergencia del tiempo de blow-up del problema semidiscreto al de la solución teórica. Usaremos la primera autofunción del problema

$$-v_{xx} = \lambda v, \quad 0 < x < 1, \tag{8}$$
$$v(0) = v(1) = 0, \tag{9}$$

correspondiente al autovalor $\lambda = \pi^2$, y normalizada de modo que $\int_0^1 v(x)\,dx = 1$.

**Teorema 5** *Supongamos que:*

*a) la función* $f \in \mathcal{C}^1([0,\infty), I\!R)$ *es convexa y* $f(z) > 0$ *para* $z \in (0,\infty)$,

*b) existe* $\overline{z} \geq 0$ *tal que* $f(z)/z$ *es creciente en* $[\overline{z},\infty)$ *y* $f(\overline{z}) - \pi^2\overline{z} > 0$,

*c) existe* $T_b < \infty$ *tal que* $u \in \mathcal{C}^{4,2}([0,1]\times[0,T_b), I\!R)$ *y*

$$\lim_{t\to T_b} \int_0^1 u(x,t)\,v(x)\,dx = \infty,$$

*donde* $v$ *está definida como en* (8)-(9).

*d) la condición inicial* $\mathbf{U}_h^0$ *de* (6) *satisface*

$$||\mathbf{U}_h^0 - \mathbf{u}_h(0)||_\infty = o(1), \quad h \to 0.$$

*Entonces, para $h$ suficientemente pequeño, la solución* $\mathbf{U}_h$ *de* (4)-(6) *presenta blow-up en* $T_b^h$ *y*

$$\lim_{h\to 0} T_b^h = T_b.$$


## Agradecimientos

Esta investigación está subvencionada parcialmente por el proyecto DGICYT PB92-0257.


## Bibliografía


[1] Bebernes, J. and Eberly, D.: Mathematical problems from combustion theory. Springer-Verlag, New York (1989).

[2] Chen, Y.-G.: Asimptotic behaviours of blowing-up solutions for finite difference analogue of $u_t = u_{xx} + u^{1+\alpha}$. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo; Sect. IA, Math. **33**, 541-574 (1986).

[3] Friedman A. and McLeod B.: Blow-up of positive solutions of semilinear heat equations. Indiana Univ. Math. J. **34**, 425-447 (1985).

[4] Nakagawa, T.: Blowing up of a finite difference solution to $u_t = u_{xx} + u^2$. Appl. Math. Optim. **2**, 337-350 (1976).