UN ESQUEMA PSEUDOESPECTRAL PARA LAS ECUACIONES DE ZAKHAROV

E. Martínez Arcos, L.M. Abia Llera, J.C. López Marcos

Departamento de Matemática Aplicada y Computación, Universidad de Valladolid, Facultad de Ciencias, Prado de la Magdalena, s/n , 47005-Valladolid.

1 Introducción

En [14] Zakharov introdujo un sistema de ecuaciones en derivadas parciales para modelar la propagación de ondas de Langmuir en plasmas. En forma adimensional y en una dimensión espacial, las ecuaciones de Zakharov son:

$$i\mathbb{E}_t + \mathbb{E}_{xx} = \mathbb{N}\mathbb{E} \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \tag{1.1}$$

$$\mathbb{N}_{tt} - \mathbb{N}xx = \frac{\partial}{\partial x^2}(|\mathbb{E}|^2) \tag{1.2}$$

donde t denota la variable tiempo, x la longitud, $\mathbb{E}(x,t)$ representa la amplitud compleja de un campo eléctrico de altas frecuencias y $\mathbb{N}(x,t)$ la variación de densidad del plasma respecto de un valor de equilibrio.

En [11], se prueba la existencia global de una solución débil para el problema puro de valores iniciales (1.1)-(1.2) y la existencia y unicidad de una solución regular cuando los datos iniciales son regulares.

Métodos numéricos para las ecuaciones (1.1) y (1.2), son estudiados en [6],[3],[2],[8],[7].
Payne, Nicholson y Downie [6], utilizan un método espectral para computar la evolución y colisión de ondas solitarias.
Glassey [2] considera un esquema implícito, conservativo, en diferencias finitas probando la convergencia con estimativos de error suboptimales,de primer orden en una norma de la energía. Recientemente Qianshung Chang y Hong Siang [8] proponen una familia uniparamétrica de métodos en diferencias finitas que origina el método estudiado por Glassey para un determinado valor del parámetro. En [7], prueban estimativos del error optimales de segundo orden.
Frente al inconveniente de un mayor costo operativo por paso del método de Payne et al., debido al cómputo de transformadas discretas de Fourier, se tiene la ventaja de que el uso de métodos espectrales para la discretización espacial origina, para costo computacional fijo, errores de truncacion significativamente menores, lo que les hace competitivos y más eficientes frente a sus análogos en diferencias finitas como los propuestos por Glassey [3] o Qianshun Chang et al. [8].

En el presente trabajo se presenta un esquema espectral de pasos fraccionarios para la resolución del problema L-periódico de valores iniciales dado por (1.1), (1.2) y

$$\mathbb{E}(x+L,t) = \mathbb{E}(x,t), \quad \mathbb{N}(x+L,t) = \mathbb{N}(x,t) \qquad x \in \mathbb{R}, 0 \le t \le T < \infty \tag{1.3}$$

$$\mathbb{E}(x,0) = p(x), \quad \mathbb{N}(x,0) = q(x), \quad \mathbb{N}_t(x,0) = r(x) \qquad x \in \mathbb{R} \tag{1.4}$$

donde $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ son funciones L-periódicas conocidas. En la sección 2 deducimos el algoritmo propuesto. En la sección 3 se calcula la expresión analítica de los solitones solución de (1.1) y (1.2) que serán utilizadas en la experimentación numérica de la sección 4, para finalmente en la sección 5 mostrar algunas conclusiones.

2 Derivación del algoritmo

Para nuestros propósitos conviene reescribir el sistema (1.1), (1.2) en la forma :

$$\mathbb{E}_t = i\mathbb{E}_{xx} - i\mathbb{N}\mathbb{E} \tag{2.5}$$

$$\mathbb{N}_t = \mathbb{P}_x \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \tag{2.6}$$

$$\mathbb{P}_t = \mathbb{N}_x + \frac{\partial}{\partial x}(|\mathbb{E}|^2) \tag{2.7}$$

donde hemos introducido una nueva función L-periódica $\mathbb{P}(x,t)$, tal que satisface la relación:

$$\mathbb{N}_t(x,t) = \mathbb{P}_x(x,t) \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

considerando las condiciones iniciales:

$$\mathbb{E}(x,0) = p(x), \quad \mathbb{N}(x,0) = q(x), \quad \mathbb{P}(x,0) = \int_0^x r(s)ds \qquad x \in \mathbb{R} \tag{2.8}$$

y las condiciones de periodicidad (1.3) junto con:

$$\mathbb{P}(x+L,t) = \mathbb{P}(x,t) \qquad x \in \mathbb{R}, 0 \le t \le T < \infty \tag{2.9}$$

Introduzcamos un esquema de pasos fraccionados para este sistema de la forma siguiente: Si expresamos el sistema $(2.5) - (2.7)$ en la forma compacta:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{v}) = L(\mathbf{v}) + N(\mathbf{v}) \tag{2.10}$$

con $\mathbf{v} = [\mathbb{E}(x,t), \mathbb{N}(x,t), \mathbb{P}(x,t)]^T$ y L , N denotando respectivamente los operadores lineal y no lineal definidos por:

$$L(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} i\frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} (\mathbf{v}) \tag{2.11}$$

y

$$N(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} -i\mathbb{N}\mathbb{E} \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}(|\mathbb{E}|^2) \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

Discretización en tiempo

Si $k > 0$ denota el paso en tiempo, vamos a considerar el esquema que para avanzar de un nivel de tiempo t a otro $t + k$, procede a resolver sucesivamente los sistemas:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{v}) = N(\mathbf{v}), \qquad \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{v}) = L(\mathbf{v})$$

utilizando la solución del primero como condición inicial del segundo.
Denotemos por $\mathbb{E}^n(\cdot)$, $\mathbb{N}^n(\cdot)$, $\mathbb{P}^n(\cdot)$, $0 \leq n \leq [T/k]$ (donde el doble corchete aquí representa parte entera) a las funciones $\mathbb{E}(\cdot, t_n)$, $\mathbb{N}(\cdot, t_n)$ y $\mathbb{P}(\cdot, t_n)$, respectivamente, siendo $\mathbb{E}$, $\mathbb{N}$ y $\mathbb{P}$ las soluciones de $(2.5) - (2.9)$, y $t_n = nk$.
Supuesto calculadas aproximaciones $\mathcal{E}^n(x)$, $\mathcal{N}^n(x)$, $\mathcal{P}^n(x)$, a las funciones solución $\mathbb{E}^n(x)$, $\mathbb{N}^n(x)$ y $\mathbb{P}^n(x)$ respectivamente para $0 \leq n \leq [T/k] - 1$ se obtienen aproximaciónes intermedias $\mathcal{E}_*^{n+1}(x)$, $\mathcal{N}_*^{n+1}(x)$, $\mathcal{P}_*^{n+1}(x)$, como la solución en $t = t_{n+1}$ del problema L-periódico de valores iniciales:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{w}) = N(\mathbf{w}), \qquad t_n < t < t_{n+1} \tag{2.13}$$

$$\mathbf{w}(x, t_n) = \begin{bmatrix} \mathcal{E}^n(x) \\ \mathcal{N}^n(x) \\ \mathcal{P}^n(x) \end{bmatrix} \qquad x \in \mathbb{R} \tag{2.14}$$

que resulta cuando en (2.10) no se tiene en cuenta la evolución debida a los términos lineales. Podemos expresar en forma cerrada la solución de este problema como:

$$\mathcal{E}_*^{n+1}(x) = \exp(-ik\mathcal{N}^n(x))\mathcal{E}^n(x) \tag{2.15}$$

$$\mathcal{N}_*^{n+1}(x) = \mathcal{N}^n(x) \tag{2.16}$$

$$\mathcal{P}_*^{n+1}(x) = \mathcal{P}^n(x) + k\frac{\partial}{\partial x}(|\mathcal{E}^n(x)|^2) \tag{2.17}$$

El paso se completa calculando las aproximaciones $\mathcal{E}^{n+1}(x)$, $\mathcal{N}^{n+1}(x)$ y $\mathcal{P}^{n+1}(x)$ a $\mathbb{E}^{n+1}(x)$, $\mathbb{N}^{n+1}(x)$ y $\mathbb{P}^{n+1}(x)$ respectivamente, mediante la solución en $t = t_{n+1}$ del problema L-periódico de valores iniciales:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{u}) = L(\mathbf{u}), \qquad t_n < t < t_{n+1} \tag{2.18}$$

$$\mathbf{u}(x, t_n) = \begin{bmatrix} \mathcal{E}_*^{n+1}(x) \\ \mathcal{N}_*^{n+1}(x) \\ \mathcal{P}_*^{n+1}(x) \end{bmatrix} \qquad x \in \mathbb{R} \tag{2.19}$$

que tiene en cuenta únicamente el efecto del término lineal de (2.10) en la evolución del sistema.
Notese que el método de separación de variables da en forma cerrada la solución del problema (2.18) - (2.19) en términos de los coeficientes de Fourier de $\mathcal{E}_*^{n+1}(x)$, $\mathcal{N}_*^{n+1}(x)$ y $\mathcal{P}_*^{n+1}(x)$.

Los operadores N y L en (2.10) involucran operadores de derivación respecto a la variable espacial y por tanto para definir completamente el método numérico debemos discretizar en espacio.

Discretización en espacio

Si J es un entero positivo, definimos $h = L/2J$ y consideramos la red discreta de nodos $\{x_j = jh, \quad j \in Z\}$. Definimos Z_h (respectivamente H_h) el espacio de funciones reales (resp. complejas), L-periódicas definidas sobre la red. Así pues, cada elemento $\mathbf{P} \in Z_h$ (resp. $\mathbf{E} \in H_h$) que denotaremos genéricamente por $\mathbf{V}$, es una sucesión de números reales $\{V_j\}_{j=0,\pm1,\pm2,\ldots}$ tal que $V_j = V_{j+2J}$ para $j = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. Debe notarse, que cada elemento $\mathbf{V}$ se puede representar por un vector de $2J$ componentes, ya sean reales o complejas.
Con la notación $[\mathbf{V}]^{\hat{}}_p$, nos referiremos al p-ésimo coeficiente de Fourier discreto de la sucesión $\mathbf{V}$, es decir

$$[\mathbf{V}]^{\hat{}}_p = \frac{1}{2J}\sum_{j=0}^{2J}{}''V_j \exp(-\frac{2\pi}{L}ipjh), \qquad -J \le p \le J,$$

donde la doble prima del sumatorio indica que el primer y último término están multiplicados por 1/2. Diferenciando el interpolante trigonométrico de $\mathbf{V}$, y evaluando el resultado en los puntos de la red, obtenemos la siguiente definición del operador de diferenciación pseudoespectral D

$$(D\mathbf{V})_j = \sum_{p=-J}^{J}{}''[\mathbf{V}]^{\hat{}}_p \exp(\frac{2\pi}{L}ipjh), \qquad -J \le p \le J,$$

Esta relación es equivalente a las fórmulas siguientes para los coeficientes de Fourier discretos

$$[D\mathbf{V}]^{\hat{}}_p = (\frac{2\pi}{L}ip)[\mathbf{V}]^{\hat{}}_p, \qquad -J+1 \le p \le J+1 \tag{2.20}$$

$$[D\mathbf{V}]^{\hat{}}_{-J} = [D\mathbf{V}]^{\hat{}}_J = 0. \tag{2.21}$$

La potencia D^2 es, por definición, la composición del operador DD. Expresiones del tipo $\mathbf{EN}$ o $|\mathbf{E}|^2$ deben entenderse componente a componente.
Denotaremos por $\mathbf{E}^n$, $\mathbf{N}^n$ y $\mathbf{P}^n$ a las aproximaciones de las funciones $\mathcal{E}^n(x)$, $\mathcal{N}^n(x)$ y $\mathcal{P}^n(x)$ respectivamente, evaluadas en la red, donde $\mathbf{E}^n \in H_h$ y $\mathbf{N}^n, \mathbf{P}^n \in Z_h$.
El método numérico en una primera etapa, origina aproximaciones intermedias $\mathbf{E}^{n+1}_*$, $\mathbf{N}^{n+1}_*$ y $\mathbf{P}^{n+1}_*$ que resultan de discretizar (2.13), aproximando el operador de derivación espacial $\dfrac{\partial}{\partial x}$ por el operador discreto de diferenciación pseudoespectral D, obteniendo :

$$E^{n+1}_{*j} = E^n_j \exp(-iN^n_j k), \tag{2.22}$$

$$N^{n+1}_{*j} = N^n_j, \tag{2.23}$$

$$P^{n+1}_{*j} = P^n_j + k(D(|\mathbf{E}^n|^2))_j \tag{2.24}$$

Denotamos por N_k al operador que transforma:

$$N_k \begin{bmatrix} \mathbf{E}^n \\ \mathbf{N}^n \\ \mathbf{P}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}^{n+1}_* \\ \mathbf{N}^{n+1}_* \\ \mathbf{P}^{n+1}_* \end{bmatrix} \tag{2.25}$$

El paso se completa sin más que expresar en términos de los coeficientes de Fourier de $\mathbf{E}_*^{n+1}$, $\mathbf{N}_*^{n+1}$ y $\mathbf{P}_*^{n+1}$ la solución en el instante $t = t_{n+1}$ del sistema:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{N}\\ \mathbf{P}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} iD^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & D\\ 0 & D & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{N}\\ \mathbf{P}\end{bmatrix} \tag{2.26}$$
$$\mathbf{E}(t_n) = \mathbf{E}_*^{n+1}, \qquad \mathbf{N}(t_n) = \mathbf{N}_*^{n+1}, \qquad \mathbf{P}(t_n) = \mathbf{P}_*^{n+1}$$

es decir,

$$\begin{bmatrix}[\mathbf{E}^{n+1}]_p^{\hat{}}\\ [\mathbf{N}^{n+1}]_p^{\hat{}}\\ [\mathbf{P}^{n+1}]_p^{\hat{}}\end{bmatrix} = \exp\left(\begin{bmatrix} -i(\frac{2\pi p}{L})^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & (\frac{2\pi ip}{L})\\ 0 & (\frac{2\pi ip}{L}) & 0\end{bmatrix} k\right)\begin{bmatrix}[\mathbf{E}_*^{n+1}]_p^{\hat{}}\\ [\mathbf{N}_*^{n+1}]_p^{\hat{}}\\ [\mathbf{P}_*^{n+1}]_p^{\hat{}}\end{bmatrix}$$

Utilizaremos L_k para denotar el operador definido por:

$$L_k\begin{bmatrix}\mathbf{E}_*^{n+1}\\ \mathbf{N}_*^{n+1}\\ \mathbf{P}_*^{n+1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{E}^{n+1}\\ \mathbf{N}^{n+1}\\ \mathbf{P}^{n+1}\end{bmatrix} \tag{2.27}$$

El método numérico que consiste en la recurrencia

$$\begin{bmatrix}\mathbf{E}^{n+1}\\ \mathbf{N}^{n+1}\\ \mathbf{P}^{n+1}\end{bmatrix} = L_k N_k\begin{bmatrix}\mathbf{E}^{n}\\ \mathbf{N}^{n}\\ \mathbf{P}^{n}\end{bmatrix} \tag{2.28}$$

con N_k y L_k los operadores definidos por (2.25) y (2.27), respectivamente, requiere para computar la solución en el nivel de tiempo $n+1$ las antritransformadas discretas de Fourier de $\mathbf{E}^n$ y $\mathbf{N}^n$ y la transformada de $|\mathbf{E}^n|^2$, necesarias para la actuación del operador N_k, y una transformación de Fourier de la aproximación intermedia $\mathbf{E}_*^{n+1}$ utilizada por el operador L_k. El orden de consistencia/convergencia en tiempo de este esquema es solamente 1. Una modificación bien conocida, introducida por Strang [10], da lugar a errores $O(k^2)$.
Con nuestra notación la escisión de Strang está determinada por

$$\begin{bmatrix}\mathbf{E}^{n+1}\\ \mathbf{N}^{n+1}\\ \mathbf{P}^{n+1}\end{bmatrix} = N_{k/2}L_k N_{k/2}\begin{bmatrix}\mathbf{E}^{n}\\ \mathbf{N}^{n}\\ \mathbf{P}^{n}\end{bmatrix} \tag{2.29}$$

Sheng [9] ha probado que, para una clase de problemas de valores iniciales la escisión de Strang es optimal. Notese que a la vista de la relación

$$(N_{k/2}L_k N_{k/2})^n = N_{k/2}(L_k N_k)^{n-1}L_k N_{k/2}$$

el costo del método (2.29) es virtualmente el mismo que el (2.28).

3 Expresión analítica de los solitones

Para realizar la experimentación numérica, consideramos soluciones de (1.1)-(1.2) estables con el tiempo llamadas solitones [1], que son encontradas en [6], [3] utilizando el método de la energía [4]. Estas tienen la forma

$$\mathbb{E}x,t = F(x-vt)e^{i\phi(x-ut)} \quad (3.30)$$
$$\mathbb{N}(x,t) = G(x-vt) \quad (3.31)$$

donde v, ϕ, u son constantes reales con $|v| < 1$ y $\phi = \frac{v}{2}$. F y G son funciones L-periódicas de una variable real $\xi = x - vt$ definidas por

$$G(\xi) = \frac{|F(\xi)^2|}{v^2-1} + c_0, \quad (3.32)$$
$$F(\xi) = dn(\frac{\xi}{\sqrt{2(1-v^2)}}, m). \quad (3.33)$$

Aquí

$$c_0 = \frac{\sqrt{2}}{L\sqrt{1-v^2}} 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - m^2 \sin^2 \phi} d\phi$$

y $dn(.)$ denota una función elíptica de Jacobi [13], con m constante apropiada [3].

4 Experimentos numéricos

Ejecutamos el método (2.29) con los siguientes parámetros (elegidos y comprobados en [6]): $L = 20$, $v = 4\pi/L = 0.6283185$; $m = \sqrt{1 - m\prime^2}$ con $m\prime = 4.5147\dot{1}0^{-4}$; $u = -1.73692$; $c_0 = 0.181786$. Para un numero fijo de nodos de la red espacial igual a 64 y en un tiempo final 8, comparamos el error obtenido entre la solución teórica definida en la sección anterior y la numérica del método, en norma del máximo, para distintos valores del paso en tiempo k, observando el orden dos de convergencia, como muestra la Figura 1. Esto es, si dividimos la longitud del paso por 2 el error se divide por 4.

Colisión de dos solitones

En las figuras 2 y 3 se describe la simulación numérica de la colisión de dos ondas solitarias de periodo 20 definidas en un intervalo $0 \leq x \leq 160$, centradas en 70 y 90, con velocidades directamente opuestas y parámetros descritos anteriormente, en diferentes tiempos. En este caso $c_0 = 0.02272323$. Los resultados son análogos a los obtenidos en [6] y [3].
Análisis de eficiencia

Por último hemos comparado la eficiencia de los métodos expuestos, en tiempo final 8 y con un número de nodos en la red espacial fijo, 64 , comparando tiempo de C.P.U. con los errores globales cometidos. Así, para un costo computacional fijo, es el método de escisión el que menores errores comete como se ve en la figura 4.

5 Conclusiones

El método pseudoespectral que aquí se presenta se muestra competitivo frente a los propuestos en la literatura. En integración numérica de ondas unidimensionales los métodos espectrales de paso fraccionario, introducidos por Hardin y Tappert [5] y Tappert [12], son a menudo más ventajosos que los métodos en diferencias finitas o de elementos finitos [2], [8].

Además el algoritmo resultante de esta discretización necesita calcular menos transformadas de Fourier discretas, en cada paso, que el descrito por Payne et al. [6], lo que origina un menor tiempo de C.P.U. para su ejecución.

Referencias

[1] P.G. Drazin and R.S. Johnson, *Solitons: An introduction*, Cambridge University Press, 1989.

[2] R.T. Glassey, *Convergence of an energy-preserving scheme for the Zakharov equations in one space dimension*, Mathematics of Computation. 58 (1992), pp. 83-102.

[3] R.T. Glassey, *Approximate solutions to the Zakharov equations via finite differences*, Journal of Computational Physics. 100 (1992), pp. 377-383.

[4] P.J. Hansen and D.R. Nicholson, Amer. J. Phys. 47 (1979), pp 769

[5] R.H. Hardin and F.D. Tappert, SIAM Rev. Chronicle 15 (1973), pp 423

[6] G.L. Payne, D.R. Nicholson, and R.M. Downie, *Numerical solution of the Zakharov equations*, Journal of Computational Physics. 50 (1983), pp. 482-489.

[7] Qianshun Chang, Boling Guo and Hong Jiang, *Finite difference method for generalized Zakharov equations*, Mathematics of Computation. 64 (1995), pp. 537-553.

[8] Qianshun Chang and Hong Jiang, *A conservative difference scheme for the Zakharov equations*, Journal of Computational Physics. 113 (1994), pp. 309-319

[9] Q. Sheng, *Solving linear partial differential equations by exponential splitting*, prepint, 1987 (unpublished)

[10] G. Strang, *On the construction and comparison of difference schemes*, SIAM J. Numer. Anal. 5 (1968), pp. 506-517

[11] C. Sulem and P.L. Sulem, *Regularity properties for the equations of Langmuir turbulence*, C.R. Acad. Sc. Paris. 289 (1979), pp. 173-176.

[12] F.D. Tappert, Lect. Math. Amer. Math. Soc. 15 (1974), pp 215

[13] E.T. Whittaker and G.N. Watson, *A course of modern analysis*, Cambridge University Press (1965).

[14] V.E. Zakharov, *Collapse of Langmuir waves*, Soviet Physics JETP. 35 (1972), pp. 908-912

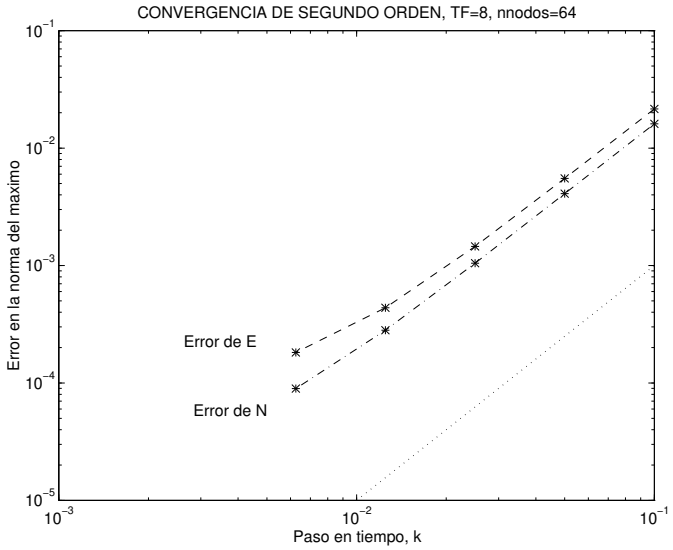
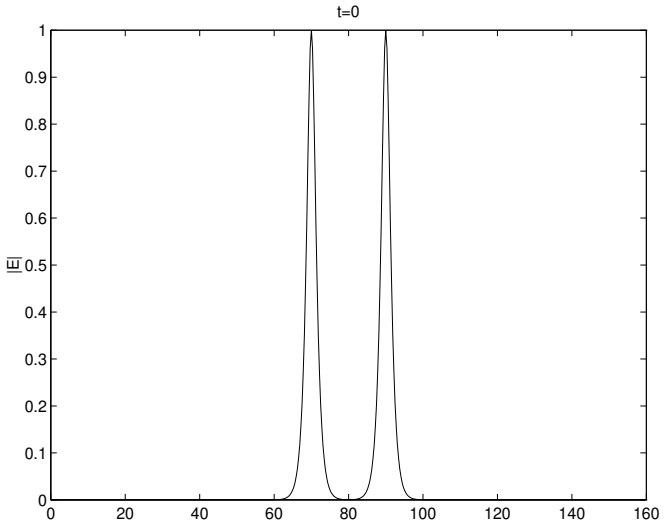
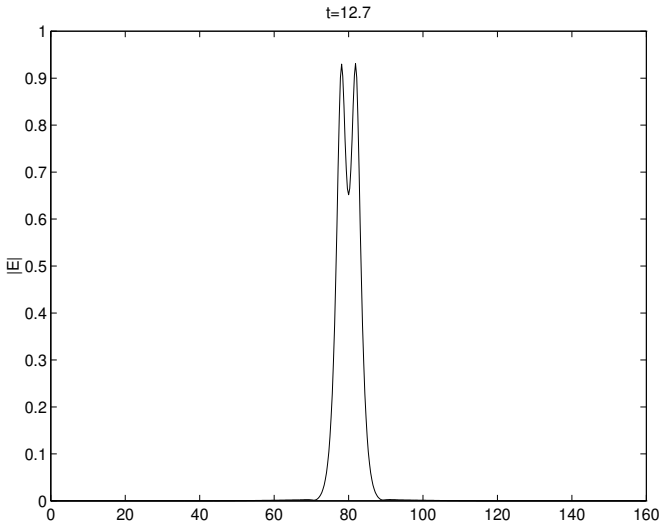
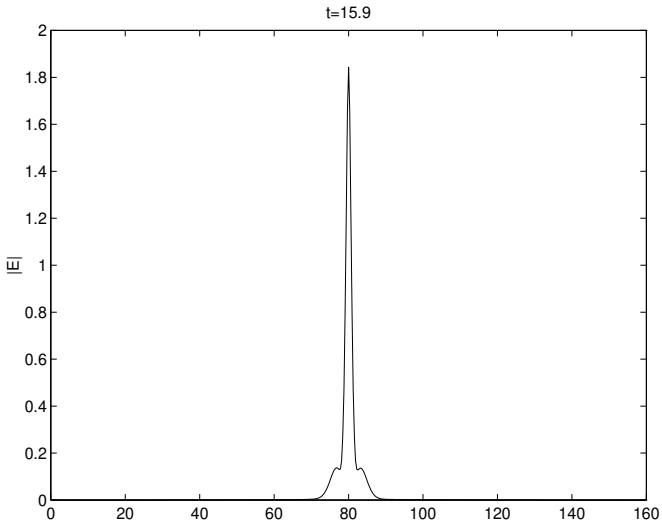
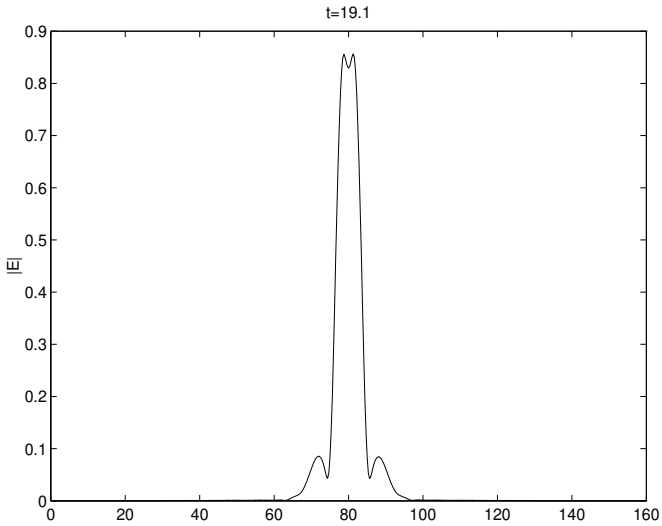


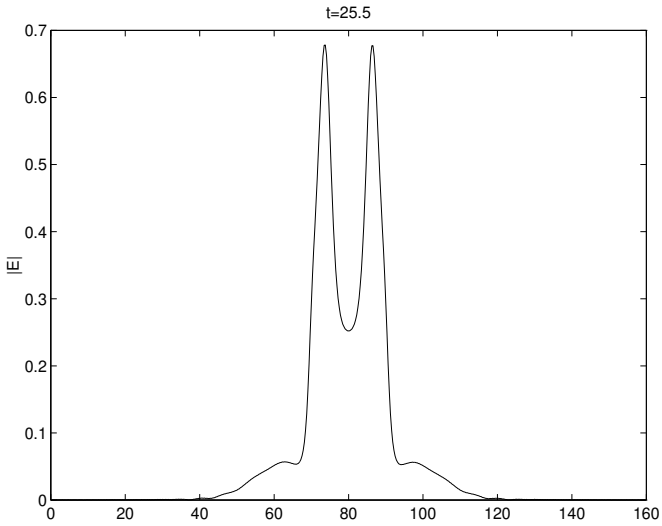
Figure 1: diagrama de convergencia en t = 8 para nnodos = 64




t=12.7
|E|
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
0
20
40
60
80
100
120
140
160


t=15.9
|E|
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2
0
20
40
60
80
100
120
140
160


t=19.1
|E|
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
20
40
60
80
100
120
140
160


t=25.5
|E|
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
20
40
60
80
100
120
140
160

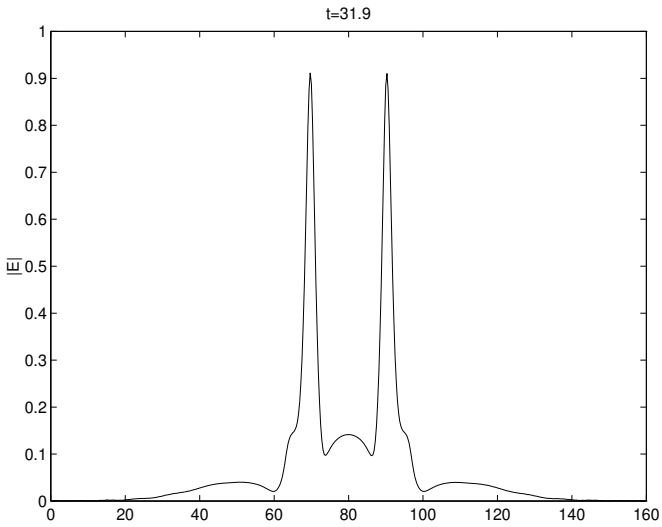
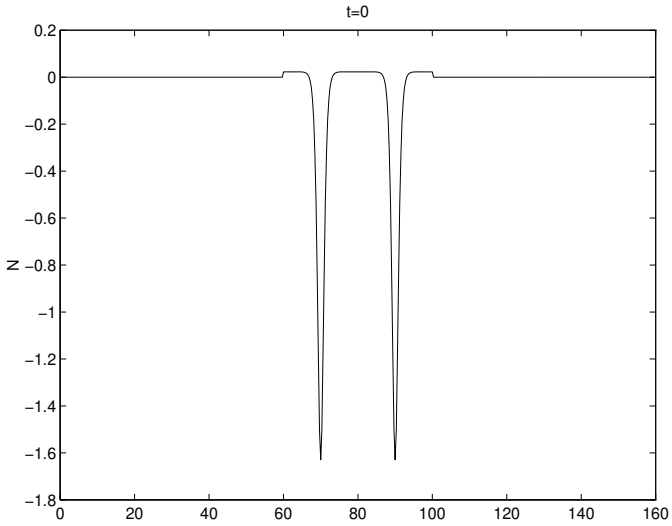
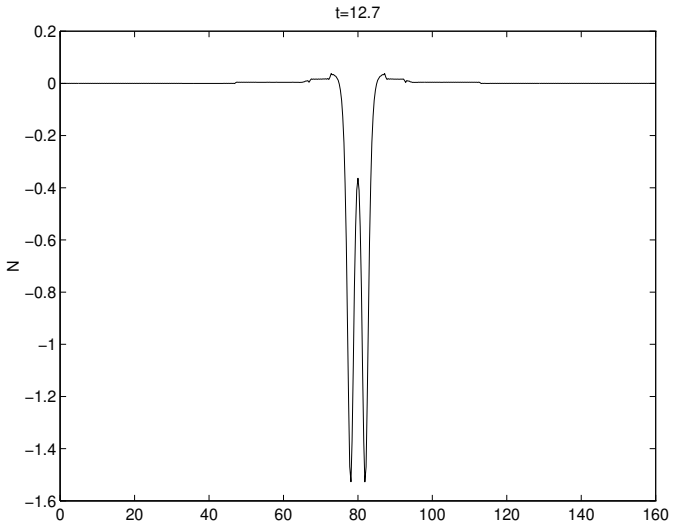
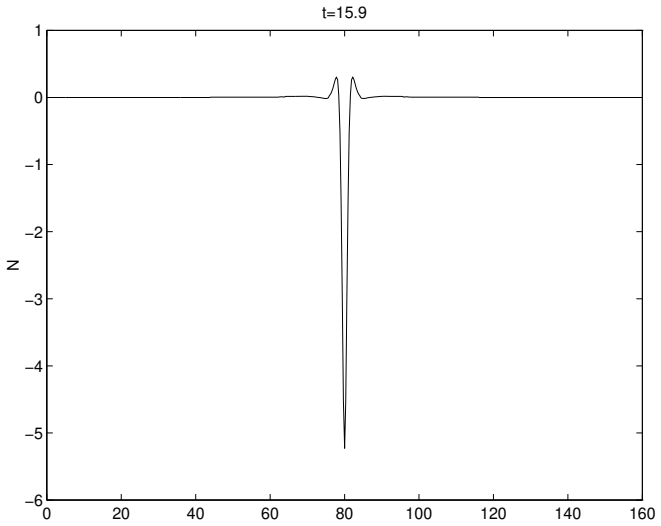
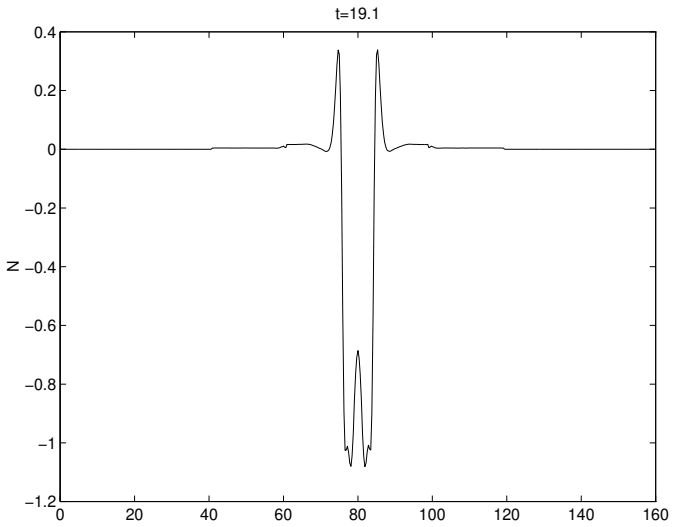


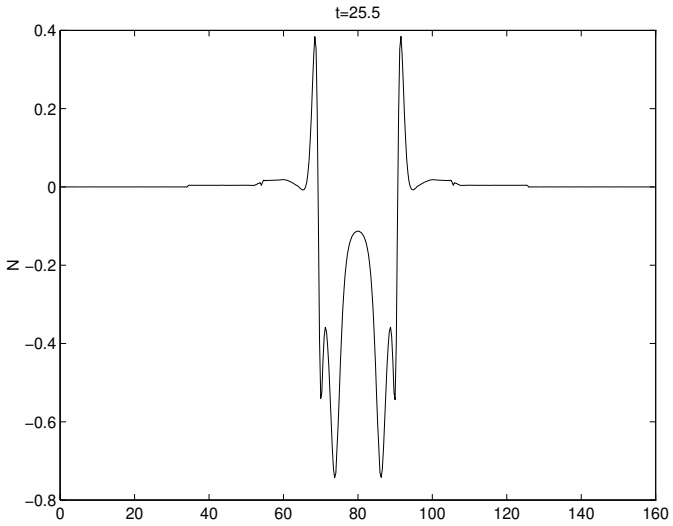
Figure 2: modulo de E durante la colisión




t=12.7
N
0.2
0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
−1
−1.2
−1.4
−1.6
0
20
40
60
80
100
120
140
160


t=15.9
N
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
−6
0
20
40
60
80
100
120
140
160


t=19.1
N
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
−1
−1.2
0
20
40
60
80
100
120
140
160


t=25.5
N
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
0
20
40
60
80
100
120
140
160

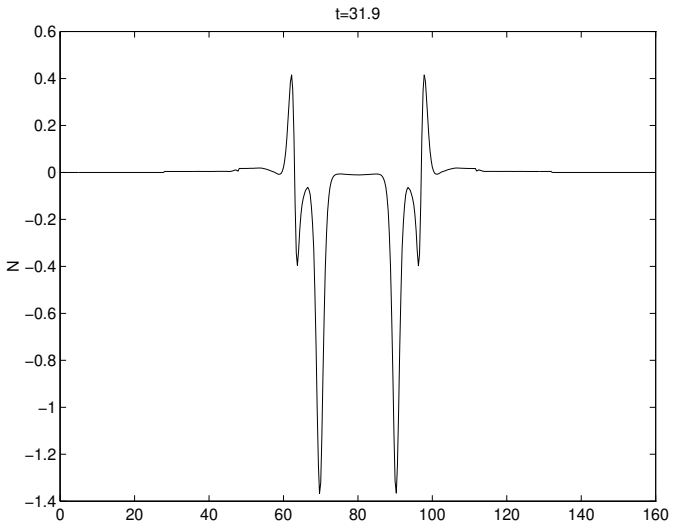


Figure 3: N durante la colisión

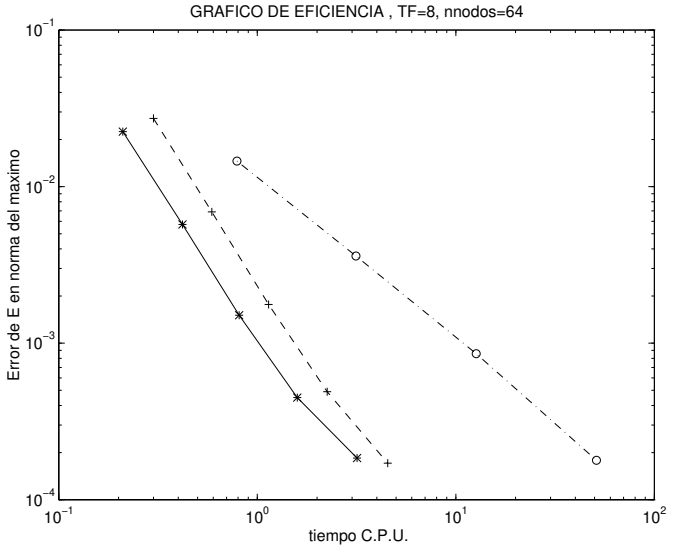


Figure 4: grafico de eficiencia para E

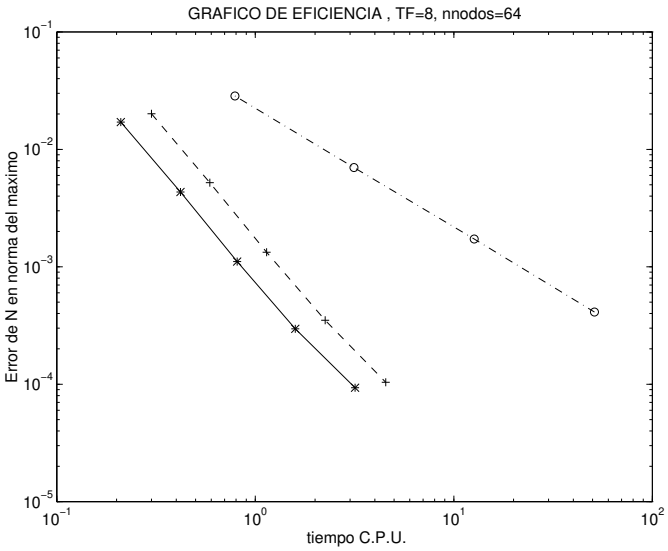


Figure 5: grafico de eficiencia para N