CONVERGENCIA DEL PASO A FORMA NORMAL EN SISTEMAS REVERSIBLES

Amadeu Delshams[(1)] y J. Tomás Lázaro[(2)]

(1) Departament de Matemàtica Aplicada I, Universitat Politècnica de Catalunya, Av. Diagonal 647, E-08071 Barcelona.

(2) Departament de Matemàtica Aplicada i Telemàtica, Universitat Politècnica de Catalunya, Av. Víctor Balaguer s/n, E-08800 Vilanova i la Geltrú.

1 Introducción

Birkhoff y, posteriormente, Moser [1], demostraron que todo sistema con dos grados de libertad y hamiltoniano real posee, en un entorno de una solución periódica inestable, una integral analítica real independiente del hamiltoniano. Este hecho completaba el descubrimiento de Poincaré de que en el entorno de una solución periódica estable no existe, en general, una integral independiente del hamiltoniano.

El propósito de este trabajo es la obtención de resultados similares a los alcanzados por Birkhoff y Moser para sistemas con dos grados de libertad invariantes bajo la acción de un cambio de signo en el tiempo y una involución espacial.

Así pues, dada una involución lineal $\mathcal{R}$ de $\mathbb{R}^{2n}$, diremos que un sistema dinmico es
$\mathcal{R}$-*reversible* o, simplemente *reversible*, si es invariante bajo la transformación

$$\begin{array}{ccc} X & \longmapsto & \mathcal{R}X \\ t & \longmapsto & -t \end{array} \tag{1}$$

donde $X \in \mathbb{R}^{2n}$. En principio, las involuciones consideradas son aquéllas que verifican $dim(ker(\mathcal{R} - I)) = n$, es decir las que presentan un hiperplano de dimensión n de puntos fijos.

Nuestro objetivo es pues el estudio del paso a *forma normal* de un sistema reversible en un entorno de una órbita periódica inestable simétrica, es decir $\{\gamma(t)\}$ tal que $\gamma(t+T) = \gamma(t) \quad \forall t \geq 0$, para un cierto $T > 0$ y verificando que $\mathcal{R}\{\gamma(-t)\} = \{\gamma(t)\}$. Tal estudio se reduce a un entorno de un punto fijo hiperbólico mediante el cambio de variables $Y = X - \gamma(t)$. De esta forma el sistema puede escribirse como

$$\dot{Y} = DF(\gamma(t))Y + G(Y,t) \tag{2}$$

donde G es de orden 2 en Y e $DF(\gamma(t)) = -\mathcal{R}DF(\mathcal{R}\gamma(-t))\mathcal{R}$. Así pues, si consideramos la parte lineal de este sistema y definimos $A(t) = (DF \circ \gamma)(t)$ tenemos

$$\dot{Y} = A(t)Y \tag{3}$$

reversible, con $A(t)$ T-periódica y tal que $A(-t) = -\mathcal{R}A(t)\mathcal{R}$.

Nuestra intención es aplicar una especie de *Teoría de Floquet* adaptada al caso reversible. En este sentido tenemos

Proposición 1 *Dado un sistema reversible de la forma*

$$\dot{Y} = A(t)Y \tag{4}$$

con $A(t)$ T-periódica, existe un cambio de variables $Y \mapsto W$ que mantiene la reversibilidad y que lo transforma en uno del tipo

$$\dot{W} = BW \tag{5}$$

con B matriz constante.

Demostración

Notemos que por ser (4) reversible se tiene que $A(-t) = -\mathcal{R}A(t)\mathcal{R}$. Consideremos ahora la primera ecuación variacional asociada a (4)

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{M}(t) & = & A(t)M(t) \\ M(0) & = & I. \end{array} \right. \tag{6}$$

Por la reversibilidad del sistema se obtiene que $M(t) = \mathcal{R}M(-t)\mathcal{R}$, de donde se deduce la existencia de una matriz constante B tal que $e^{Bt} = \mathcal{R}e^{-Bt}\mathcal{R}$. Entonces, el cambio de variables $Y \mapsto W$ dado por

$$Y = P(t)W \tag{7}$$

donde $P(t) = \Phi(t)e^{-Bt}$ siendo $\Phi(t)$ una solución fundamental del sistema (4), con condiciones iniciales sobre la variedad de puntos fijos, transforma el sistema inicial en uno de la forma

$$\dot{W} = BW \tag{8}$$

con B matriz constante verificando $B = -\mathcal{R}B\mathcal{R}$. $\square$

Referente el plano, consideraremos como $\mathcal{R}$ la involución definida como

$$\begin{array}{ccc} x & \longmapsto & y \\ y & \longmapsto & x \end{array}$$

y representada por la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Por lo tanto, si consideramos el origen como un punto fijo hiperbólico, tenemos que nuestro sistema reversible admite una expresión del tipo

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} \dot{x} & = & \omega x & + & f(x,y,t) \\ \dot{y} & = & -\omega y & - & f(y,x,-t) \end{array} \right. \tag{9}$$

con $\omega \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, f analítica en x,y, 2π-periódica en t y continua en t excepto posiblemente para valores enteros de t, donde los límites laterales existen. Supondremos además que f viene dada por una serie de potencias en x,y, comenzando en orden 2, convergente en un entorno del origen de radio independiente de t. Tenemos así el siguiente

Teorema 1 *Dado un sistema reversible del plano del tipo (9) verificando las propiedades anteriores, existe una transformación analítica*

$$(x, y) \longmapsto (\xi, \eta)$$

que mantiene la reversibilidad y que reduce el sistema inicial a uno de la forma

$$\left\{ \begin{array}{rcr} \dot{\xi} & = & F_\eta \\ \dot{\eta} & = & -F_\xi \end{array} \right. \tag{10}$$

con $F = F(\xi\eta) = \omega\xi\eta + \ldots$ serie de potencias dependiendo únicamente de $\xi\eta$ y convergente en un entorno del origen de radio $r > 0$.

Comentario El sistema (10) es un sistema reversible *hamiltoniano*, con función de Hamilton $F(\xi\eta)$ dependiente únicamente del producto $\xi\eta$.

Comentario importante Notemos que F es una integral primera de (10) y, por lo tanto, realizando el cambio de variables inverso obtenemos una integral primera analítica en x,y, 2π-periódica en t del sistema original. De manera que se tiene que *en un entorno de un punto fijo hiperbólico ser reversible es equivalente a ser hamiltoniano.*

La demostración de este teorema se desarrolla en las secciones 2 y 3. En la primera de ellas se calculan formalmente el cambio de variables y la función F resultante del paso a forma normal. La sección 3 está dedicada al estudio de la convergencia de tales series formales.

2 Expansión formal

Análogamente al caso hamiltoniano, tratado por Moser [1] a partir de la primera ecuación variacional asociada a nuestro sistema y teniendo en cuenta que la aplicación flujo a tiempo t es localmente una aplicación que preserva medida, o *a.p.m.*, se deduce la posibilidad de escribir nuestro sistema (9) de la forma siguiente

$$\left\{ \begin{array}{rcr} \dot{x} & = & H_y(x, y, t) \\ \dot{y} & = & -H_y(y, x, -t) \end{array} \right. \tag{11}$$

con $H(x, y, t) = \omega xy + \ldots$, $\omega \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, serie de potencias 2π-periódica en t, analítica en x,y e con las propiedades que presentaba f en (9).

Para no cambiar la naturaleza reversible de nuestro sistema dinámico necesitamos encontrar cambios de variable, en particular cercanos a la identidad, analíticos, de manera que preserven el carácter reversible. Así pues, si consideramos cambios $(x,y) \mapsto (\xi,\eta)$ dados por

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & \xi + \phi(\xi,\eta,t) \\ y & = & \eta + \phi(\eta,\xi,-t) \end{array} \right. \tag{12}$$

con ϕ analítica en ξ,η, continua en t y representada por una serie formal de potencias en ξ,η, de orden 2, tenemos que estos mantienen la reversibilidad. Para su cálculo formal supondremos que H y ϕ vienen representadas por series

$$H(x,y,t) = \omega xy + \ldots = \sum_{n=2}^{\infty} H_n(x,y,t) \tag{13}$$

donde H_n es un polinomio homogéneo de grado n en x,y, e

$$\phi(\xi,\eta,t) = \sum_{k+j\geq 2} \phi_{kj}(t)\xi^k\eta^j \tag{14}$$

de forma que $\phi(\eta,\xi,-t) = \sum_{k+j\geq 2} \phi_{jk}(-t)\xi^k\eta^j$. Así pues, si efectuamos el cambio de variables (12) sobre (11), tenemos que la obtención de la forma normal, en principio formal, viene supeditada a la resolución del siguiente tipo de ecuaciones. Notemos

$$\phi^{(N)} = \sum_{k+j=N} \phi_{kj}(t)\xi^k\eta^j \tag{15}$$

y

$$F(\xi\eta) = \omega + \sum_{m\geq 1} f_{2m}(\xi\eta)^m. \tag{16}$$

y sea N el orden del polinomio en ξ,η resultante de la ecuación (11) y sobre el cual aplicaremos un método recurrente. Entonces para la primera igualdad de dicha ecuación se tienen dos casos:

- **N par.** La ecuación que debemos resolver es

  $$\omega\phi^{(2m)} - \dot{\phi}^{(2m)} = g^{(2m)} \tag{17}$$

  donde $N = 2m$ y $g^{(2m)} = g^{(2m)}(t)$ son funciones conocidas de órdenes anteriores, y cuya solución es

  $$\phi^{(2m)}(\xi,\eta,t) = \sum_{k+j=2m} \phi_{kj}(t)\xi^k\eta^j \tag{18}$$

  con

  $$\phi_{kj}(t) = e^{\omega t}\left(\phi_{kj}(0) + \int_0^t e^{-\omega s} g_{kj}(s)\,ds\right) \tag{19}$$

  siendo

  $$\phi_{kj}(0) = \frac{1}{e^{-2\pi\omega}-1}\int_0^{2\pi} e^{-\omega s} g_{kj}(s)\,ds. \tag{20}$$

- **N impar.** Tenemos dos tipos de ecuaciones a resolver que son

$$\omega \phi_{kj}(t) - \dot{\phi}_{kj}(t) = g_{kj}(t) \quad si \quad k+j = 2m+1 = N, \quad k \neq m+1 \qquad (21)$$

y

$$\omega \phi_{m+1,m}(t) - \dot{\phi}_{m+1,m}(t) = f_{2m} + g_{m+1,m}(t). \qquad (22)$$

La determinación unívoca de los f_{2m} depende de los valores asignados a $\phi_{m+1,m}(0)$. Una manera cómoda de definirlos es

$$\phi_{m+1,m}(0) = 0 \qquad \forall m \geq 1 \qquad (23)$$

o, equivalentemente, imponiendo que la función $\phi_\xi(\xi, \eta, 0)$ no contenga términos de la forma $(\xi\eta)^j$.

La solución de (21) viene dada como un polinomio homogéneo de orden $k+j = N = 2m+1$ del tipo (18) de coeficientes

$$\phi_{kj}(t) = e^{\omega t}\left(\phi_{kj}(0) - \int_0^t e^{-\omega s} g_{kj}(s)\, ds\right) \qquad (24)$$

con

$$\phi_{kj}(0) = \frac{1}{1 - e^{-2\pi\omega}} \int_0^{2\pi} e^{-\omega s} g_{kj}(s)\, ds. \qquad (25)$$

En el caso de la ecuación (22) se tiene, además

$$f_{2m} = \omega \phi_{m+1,m}(0) - \frac{\omega}{1 - e^{-2\pi\omega}} \int_0^{2\pi} e^{-\omega s} g_{m+1,m}(s)\, ds. \qquad (26)$$

Una vez determinado el valor de $\phi_{m+1,m}(0)$, y así el de f_{2m}, la solución para $\phi_{m+1,m}(t)$ se obtiene de forma análoga al caso N par.

Para la resolución de la segunda igualdad en (11) se procede de forma similar.

3 Estudio de la convergencia

Para demostrar la convergencia de las series formales obtenidas en la sección anterior utilizaremos el método de la mayorante de Cauchy. Aunque parece factible su aplicación directa, seguiremos la idea usada por Moser [1] y que supone una pequea variación de las ecuaciones antes de aplicar el método de Cauchy.

Al aplicar el cambio de variables $(x, y) \mapsto (\xi, \eta)$ al sistema (11) se obtienen las ecuaciones

$$(\xi \hat{\phi}_\xi - \eta \hat{\phi}_\eta) F' + \hat{\phi}_t = H_y(\hat{\phi}, \hat{\psi}, t), \qquad (27)$$

$$(\xi \hat{\psi}_\xi - \eta \hat{\psi}_\eta) F' + \hat{\psi}_t = -H_y(\hat{\psi}, \hat{\phi}, -t), \qquad (28)$$

donde

$$\begin{aligned}
\hat{\phi} &= \xi + \phi(\xi, \eta, t), \\
\hat{\psi} &= \eta + \phi(\eta, \xi, -t) =: \eta + \psi(\xi, \eta, t), \\
H &= \omega x y + H^*, \\
F' &= \omega + F^*.
\end{aligned} \tag{29}$$

Si definimos entonces los operadores diferenciales

$$\begin{aligned}
D_1 &= \xi \frac{\partial}{\partial \xi} - \eta \frac{\partial}{\partial \eta}, \\
D_2 &= \xi \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial}{\partial \eta},
\end{aligned} \tag{30}$$

tenemos que (27) y (28) se escriben como

$$\phi_t + \omega(D_1 - 1)\phi + \xi F^* = H_y^*(\hat{\phi}, \hat{\psi}, t) - F^*(D_1 \phi), \tag{31}$$

$$\psi_t + \omega(D_1 + 1)\psi - \eta F^* = -H_y^*(\hat{\psi}, \hat{\phi}, -t) - F^*(D_1 \psi). \tag{32}$$

Definiendo ahora $\Phi = D_2 \phi$ y $\Psi = D_2 \psi$, al aplicar D_2 sobre las anteriores ecuaciones resultan

$$\begin{aligned}
\Phi_t &+ \omega(D_1 - 1)\Phi + D_2(\xi F^*) = \qquad (33) \\
&= (\xi + \Phi) H_{yx}^*(\hat{\phi}, \hat{\psi}, t) + (\eta + \Psi) H_{yy}^*(\hat{\phi}, \hat{\psi}, t) - D_2 F^*(D_1 \phi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_t &+ \omega(D_1 + 1)\Psi - D_2(\eta F^*) = \qquad (34) \\
&= -(\eta + \Psi) H_{yx}^*(\hat{\psi}, \hat{\phi}, -t) - (\xi + \Phi) H_{yy}^*(\hat{\psi}, \hat{\phi}, -t) - D_2 F^*(D_1 \psi)
\end{aligned}$$

Es fácil comprobar que las funciones ϕ, ψ y F' solución de estas ecuaciones también lo son de las ecuaciones planteadas en la sección anterior. Para obtenerla basta observar que en las partes izquierdas de las ecuaciones (34) y (35) el coeficiente del término de orden N en ξ,η depende de los valores de

$$\phi_{kj}(t), \quad \psi_{kj}(t), \quad con \;\; k + j = N, \tag{35}$$

$$f_{2r} \quad si \;\; 2r = N - 1, \tag{36}$$

mientras que en las partes derechas depende de los mismos coeficientes pero para $k + j < N$ y $2r < N - 1$. Un método recurrente es suficiente para su cálculo.

La aplicación del método de Cauchy exige previamente la presentación de una serie de definiciones y resultados.

Definición 1 *Dadas*

$$P(x, y, t) = \sum_{k+j=0}^{\infty} p_{kj}(t) x^k y^j \quad y \quad Q(x, y, t) = \sum_{k+j=0}^{\infty} q_{kj}(t) x^k y^j \tag{37}$$

series formales de potencias, diremos que P está mayorada por Q, *y lo notaremos por* $P \prec Q$*, si se cumple que*

$$|p_{kj}(t)| \leq q_{kj}(t) \qquad \forall k+j \geq 0.$$

Definición 2 *Dada* $P(x,y,t) = \sum\limits_{k+j\geq 0} p_{kj}(t)x^k y^j$ *se define*

$$[P] = \sum_{k\geq 0} \max_{t\in[0,2\pi]} |p_{kk}(t)|(xy)^k \tag{38}$$

Lema 1 *Sea* $P(x+y) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k(x+y)^k$ *con* $p_k \geq 0$*,* $\forall k \geq 1$ *e independientes de* t*. Entonces se verifican*

1. $$x^{-1}[P] \prec \frac{2P}{x+y}. \tag{39}$$

2. $$\left[x^{-1}P\right] \prec \left[\frac{2P}{x+y}\right]. \tag{40}$$

Lema 2 *Sea* $\nu \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ *y* $g(t)$ *función continua a trozos,* 2π*-periódica. Entonces, la ecuación diferencial*

$$\dot{x} + \nu x = g(t)$$

tiene exactamente una solución $x(t)$ *de periodo* 2π*. Además, para esta solución se verifica*

$$|\nu x(t)| \leq M = \max_{t\in[0,2\pi]} |g(t)|.$$

La idea es ahora construir una serie de potencias $X = X(\xi+\eta)$ convergente que mayore las series ϕ, ψ y F a partir de las series Φ, Ψ y F^*. La convergencia de X será obvia pues esta serie se obtendrá como solución de una ecuación algebraica. A esta X le pediremos que verifique las desigualdades

$$\begin{array}{rcl} D_1\Phi + [\Phi] & \prec & X \\ D_1\Psi + [\Psi] & \prec & X \\ (\xi+\eta)D_2F^* & \prec & X \end{array} \tag{41}$$

hasta orden $n-1$. Aprovechando la estructura recurrente de las ecuaciones (34) y (35) se demostrará también para orden n, completando así el proceso inductivo.

Para ello, sabemos que la serie de potencias $H(x,y,t)$ es convergente en un entorno del origen, $x^2+y^2 < \rho_0^2$, con ρ_0 independiente de t, válido también para las series H^*_{xx}, H^*_{xy} y H^*_{yy}. Existe además una constante c, independiente de t y de ω tal que la función

$$\Omega(x+y) = \frac{c(x+y)}{1-c(x+y)} \tag{42}$$

las mayora. Definimos pues $X = X(\xi+\eta)$ como la serie formal

$$X = X_2(\xi+\eta)^2 + X_3(\xi+\eta)^3 + X_4(\xi+\eta)^4 + \dots \tag{43}$$

solución de la ecuación algebraica

$$X = 4\alpha^{-1}\frac{c(\zeta+X)^2 + \frac{X^2}{\zeta}}{1-c(\zeta+X)} \tag{44}$$

donde $\zeta = \xi+\eta$ y $\alpha = \dfrac{|\omega|}{2+4\pi|\omega|}$.

De este modo, tomando esta X, aplicando los lemas 1 y 2 y suponiendo ciertas las desigualdades (41) hasta orden $n-1$, se demuestra que también se verifican para orden n.

Consecuentemente, en virtud de las definiciones de Φ y Ψ se obtiene que X mayora ϕ, ψ y F^*, lo cual prueba su convergencia.

Finalmente, una manera de obtener una estimación del radio de convergencia de las series ϕ, ψ y F es calcularlo para X. Así, utilizando la definición de X como solución de la ecuación algebraica (44) se tiene que las series ϕ, ψ y F son convergentes en un entorno del origen, independiente de t, dado por

$$|\xi|, |\eta| < \frac{\pi^2}{94c}\frac{\omega^2}{(8+16\pi|\omega|)^2} \tag{45}$$

4 Aplicaciones

Este resultado es extensible a una familia uniparamétrica de sistemas diferenciables reversibles del plano dependientes de un parámetro pequeo ϵ. En este sentido y siguiendo el tratamiento dado por Tere M. Seara [2] tenemos

Teorema 2 *Consideremos un sistema reversible dependiendo de manera continua de un parámetro pequeo ϵ*

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} \dot{x} & = & \omega x & + & f(x,y,\frac{t}{\epsilon},\epsilon) \\ \dot{y} & = & -\omega y & - & f(y,x,-\frac{t}{\epsilon},\epsilon) \end{array}\right. \tag{46}$$

con $x=y=0$ punto fijo hiperbólico, $\omega=\omega(\epsilon)$ tal que $\omega(0)\neq 0$, f analítica representada por una serie de potencias en x, y de orden 2 y $2\pi\epsilon$-periódica en t. Entonces, el cambio de variables que proporciona el paso a forma normal es convergente en un entorno del origen de radio $r>0$ independiente de ϵ.

Una aplicación importante de este resultado es el estudio de la amplitud de la banda de comportamiento caótico que proviene del *splitting* o rotura de separatrices de sistemas integrables reversibles a los que se les ha aadido una perturbación que mantiene el carácter reversible.

References

[1] Moser, J. The analytic invariants of an area-preserving mapping near a hyperbolic fixed point. *Comm. on Pure and App. Math.* ,(9): 673–692, (1956).

[2] Seara, Tere M.. Estudi de fenòmens homoclínics en sistemes propers a integrables. *Tesi doctoral, Universitat de Barcelona.* , (1991).