EXISTENCIA DE SOLUCIONES CUASIPERIÓDICAS EN UN PROBLEMA RESTRINGIDO DE CUATRO CUERPOS

Àngel Jorba y Jordi Villanueva

Departament de Matemàtica Aplicada I (ETSEIB), Universitat Politècnica de Catalunya, Diagonal 647, 08028 Barcelona (e-mails: `jorba@ma1.upc.es`, `jordi@tere.upc.es`)

Motivación: El Problema Bicircular

En muchos problemas de mecánica celeste es posible modelizar de forma natural las ecuaciones del movimento como sistemas hamiltonianos autónomos a los que añadimos perturbaciones dependientes del tiempo en forma periódica (o más en general cuasiperiódica). Un ejemplo es el problema bicircular que podemos usar para modelizar el movimiento de una pequeña partícula (de masa infinitesimal) en el sistema Tierra-Luna. En este problema se supone que la Tierra y la Luna giran en órbitas circulares alrededor de su centro de masas, y que este gira a su vez alrededor del centro de masas del sistema Tierra-Luna-Sol en órbita circular. El objetivo del modelo es describir el movimiento de una partícula sometida a la atracción de estos tres cuerpos, con especial interes en la dinámica cerca de la Tierra y la Luna. Si al igual que en el RTBP (problema restringido de tres cuerpos) introducimos coordenadas sinódicas mediante un sistema de referencia rotatorio con origen en el cento de masas del sistema Tierra-Luna, que fije la posición de estos dos cuerpos sobre un eje, podemos reescribir las ecuaciones del problema bicircular como un RTBP Tierra-Luna (problema autónomo), más una perturbación periódica debida al Sol. Para más detalles puede consultarse [2] o [4], donde se incluyen algunos resultados numéricos sobre el modelo.

En este tipo de modelos se nos plantea de forma natural la generalización de ciertas soluciones destacadas del problema autónomo al problema perturbado no autónomo: puntos fijos, soluciones periódicas o cuasiperiódicas y variedades invariantes en general. Algunos de estos problemas ya han sido tratados en [3]. Asi, por ejemplo, si en el modelo bicircular prescindimos de la presencia del Sol y consideramos solo el RTBP Tierra-Luna (al que nos referiremos como problema no perturbado) podemos considerar los puntos de libración triangulares L_4 o L_5, que al añadir la perturbación periódica del Sol en el problema bicircular dan lugar a órbitas periódicas con la misma frecuencia que la perturbación del Sol. Ahora bien, en el problema no perturbado los puntos L_4 y L_5 son linealmente estables y poseen tres famílias de órbitas periódicas de Lyapunov. Entonces podemos plantearnos la cuestion de que les sucede a estas órbitas periódicas al añadir la perturbación del sol: la respuesta deseada seria que al igual que los puntos fijos capturan la frecuencia del sol para dar lugar a órbitas periódicas, las órbitas periódicas de Lyapunov al capturar esta frecuencia dan lugar a toros dos dimensionales, esto es, soluciones cuasiperiódicas con dos frecuencias básicas.

Justificar este fenómeno (para un conjunto lo más amplio posible de órbitas periódicas del problema no perturbado) es solo uno de los objetivos que podemos plantearnos dentro del estudio de un problema más general que seria dar una descripción lo más detallada posible de como se organiza el espacio de fases en un problema con perturbaciones periódicas o cuasiperiódicas.

Formulación del Problema

Consideremos un sistema hamiltoniano analítico de n grados de libertad en $\mathbb{C}^{2n}$ de la forma:

$$H = H_0 + \varepsilon H_1,$$

con ε un parámetro $\varepsilon \geq 0$, donde suponemos:

(i) H_0 es autónomo y posee una órbita periódica o en general un toro invariante (lagrangiano) de dimensión r, $0 < r < n$, que supondremos reducible, esto es, que las ecuaciones variacionales normales entorno del toro (es decir, las ecuaciones variacionales restringidas a las direcciones normales al toro) sean reducibles a coeficientes constantes con un cambio dependiendo en el tiempo en las mismas frecuencias básicas que el toro inicial. En el caso de una órbita periódica, la matriz del sistema linealizado depende periódicamente en el tiempo y el teorema de Floquet nos garantiza esta reducción. En el caso cuasiperiódico la reducibilidad en el caso general es un problema abierto, si bien probada en ciertos casos (ver por ejemplo [3]). Si bien esta es solo una condición de tipo técnico, es necesaria para la construcción del esquema usado en la demostración de los resultados.

(ii) Usando el caracter lagrangiano del toro inicial, vamos a suponer que es posible introducir mediante un cambio de coordenadas canónico un sistema de referencia que nos permita describir el toro invariante de H_0 mediante r ángulos, es decir, vamos a suponer que H_0 es de la forma $H_0(\theta, x, I, y, \varepsilon)$, con θ, $I \in \mathbb{C}^r$ y x, $y \in \mathbb{C}^m$, $r + m = n$, con H_0 2π periódico en θ, θ y x posiciones, I y y momentos conjugados, con el toro inicial dado por $x = y = 0$, $I = 0$ y descrito por θ. En estas coordenadas la ecuaciones variacionales normales las podemos tomar como la proyección de los variacionales en las variables (x, y).

(iii) H_1 depende en en el tiempo de forma periódica o cuasiperiódica con s frecuencias básicas independientes.

(iv) Condiciones diofánticas de tipo standard de no resonancia entre ciertas combinaciones de las frecuencias normales del toro inicial, los valores propios de la matriz reducida de las ecuaciones variacionales normales (frecuencias normales), y las frecuencias de la perturbación.

(v) Cierta condición standard de no degeneración del "mapa de frecuencias" de H_0 entorno del toro inicial, que es la generalización para toros de dimensión baja de la condición standard del teorema K.A.M. que nos garantiza la variación de las frecuencias respecto a las variables acción.

(vi) Condiciones genéricas de no degeneración de las frecuencias normales respecto ε, que podemos describir de la forma siguiente: si asumimos depenendencia de H_1 analítica respecto ε e intentamos calcular el toro $r + s$ dimensional que reemplaza al toro inicial en el sistema perturbado mediante un esquema perturbativo (y por tanto en general no convergente) en terminos de una serie de potencias en ε, y a su vez usamos el mismo tipo de esquema formal para calcular la frecuencias normales del toro perturbado, vamos a exigir que la corrección en primer orden de estas frecuencias normales y de la diferencia de frecuencias normales distintas, tenga derivada respecto ε no nula en $\varepsilon = 0$.

Nota: En esta formulación no consideramos los casos extremos $r = 0$ o $r = n$ ya que estos han sido estudiados previamente en [3].

Con estas hipótesis podemos formular los siguientes resultados:

Principales Resultados

Existe un conjunto Cantoriano $\mathcal{E}$ de valores de ε, de manera que para valores de ε suficientemente pequeños, menores que un cierto ε_0, y contenidos en $\mathcal{E}$, el toro inicialmente considerado para $\varepsilon = 0$, da lugar en el sistema perturbado a un toro de dimensión $r + s$ con frecuencias básicas las r del toro inicial (hecho que podemos garantizar mediante la condición de no degeneración del mapa de frecuencias) más las s de la perturbación cuasiperiódica. Además, el flujo lineal entorno del toro obtenido es reducible. Esta reducibilidad, más que un resultado en si, es consecuencia de las tecnicas usadas para la construcción del toro en el sistema perturbado, que para poder obtener un esquema de convergencia cuadrática que controle el efecto de los pequeños divisores, nos obliga tambien a la reducción del flujo lineal.

Para controlar la medida de los valores de ε admisibles, usamos la medida de Lebesgue: la medida relativa del complementario de $\mathcal{E}$ en $[0, \varepsilon]$, es exponencialmente pequeña en ε cuando $\varepsilon \to 0$.

A pesar de todo no nos es posible probar la existencia de toros invariantes en el sistema perturbado para todo valor de ε suficientemente pequeño que preserve las frecuencias del toro inicial. Si queremos garantizar la existencia de toros para todo valor de ε, nos vemos obligados a cambiar de frecuencia.

En este sentido, nos es posible probar un resultado que bajo condiciones genéricas adicionales de no degeneración de las fecuencias normales respecto las variables I (que serian las variables de acción en el caso de formular el teorema K.A.M., con toros de dimensión máxima n), entonces podemos demostrar la existencia de una família r dimensional de toros $r + s$ dimensionales del hamiltoniano perturbado (para un valor de ε fijado), parametrizada por vectores de frecuencias r dimensionales proximos al de las frecuencias del toro inicial.

Idea de la Demostración

La formulación detallada de estos resultados y su demostración puede econtrarse en [6].

La metodología empleada esta basada en la construcción de las soluciones cuasiperiódicas deseadas aplicando un esquema similar al usado en [1] para probar el teorema KAM. En este esquema aparecen los llamados "pequeños divisores" que, en este caso, involucran la frecuencia de la órbita periódica, las frecuencias perturbadoras y las frecuencias normales a la órbita periódica. Para evitar que estos divisores sean demasiado pequeños (y obstaculizen la convergencia de las correspondientes series) necesitamos parámetros que permitan su control, es decir, solo podremos probar convergencia para aquellos valores de los parámetros para los cuales podamos contolar a cada paso del proceso iterativo estos pequeños divisores. De este modo, en el estudio de un toro concreto, las frecuencias intrinsecas del toro estan fijas en todo el proceso iterativo, y solo necesitamos que inicialmente verifiquen una condición de tipo diofántico. Por otro lado las frecuencias normales cambian a cada paso del proceso iterativo y, en principio, no podemos asegurar que en todos los pasos vayan a verificar una condición diofántica adecuada. Por ello, necesitamos controlar las frecuencias normales a la solución. De aqui surgen las dos posiblidades parámetricas consideradas. El control de la medida final del conjunto de valores admisibles de los parámetros se hace mediante el uso de constantes de Lipschitz, de forma análoga a la usada en [3]. Resultados similares pueden encontrarse en [5] en ausencia de perturbaciones cuasiperiódicas, al perturbar un hamiltoniano que posee una família r dimensional de toros invariantes r dimensionales reducibles, pero sin controlar la medida del conjunto de parámetros para el cual se conservan las frecuencias del toro inicial.

Aplicaciones al Modelo Bicircular

Podemos usar estos resultados para intentar derivar consecuencias en el modelo bicircular anteriormente presentado, para explicar la dinámica del problema entorno L_4 y L_5. Si suponemos por un momento la perturbación del Sol suficientemente pequeña, tendriamos que la órbita periódica que reemplaza al punto de equilibrio posee tres famílias cantorianas de toros de dimensión 2, que generalizan en el problema perturbado a las órbitas periódicas de Lyapunov del problema no perturbado.

Además, usando los resultados en un sentido más amplio, y uniendolos a los resultados de [3] en los casos extremos $r = 0$ y $r = 3$, tendriamos la siguiente información sobre el espacio de fases: este contiene toros de dimensiones 1, 2, 3 y 4 que se obtendrian como perturbación de toros de dimensión 0, 1, 2 y 3 del problema autonómo no perturbado.

El problema que tenemos es que no nos es posible considerar la perturbación del Sol lo suficientemente pequeña, ya que entre otros fenómenos es suficientemente grande como para cambiar la estabilidad de las órbitas periódicas que reemplazan a L_4 o L_5, que son inestables en el problema bicircular, si bien el efecto del Sol disminuye a medida que nos alejamos del plano de la "ecliptica" en la dirección vertical, y en particular la perturbación sobre las órbitas periódicas de Lyapunov asociadas a L_4 o L_5 en el RTBP Tierra-Luna disminuye al aumentar la amplitud de la órbita, de manera que para amplitudes suficientemente grandes la region presenta en las simulaciones numéricas de [2] un comportamiento estable, y una fenomenologia que se corresponde con los resultados esperados.

A pesar de todo, si bien no nos es posible justificar estos fenómenos directamente, el uso previo de técnicas de forma normal, promedio o bien de tipo perturbativo, posiblemente nos permitan reescribir el problema (trabajando en el ejemplo concreto) como un nuevo problema autonómo más una perturbación cuasiperiódica de tamaño adecuado para aplicar los resultados descritos anteriormente.

Agradecimientos

La investigación de A. Jorba ha sido parcialmente financiada por las ayudas del CICYT ESP91-0403 y de la UPC PR9409. La investigación de J. Villanueva ha sido financiada por la ayuda de la UPC PR9409.

Bibliografía

[1] Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.M.: "A proof of Kolmogorov's theorem on invariant tori using canonical transformations by the Lie method", Il Nuovo Cimento 79, 201 (1984).

[2] Gómez G., Jorba A., Masdemont J., Simó C.: Study of Poincaré maps for orbits near Lagrangian points. ESOC Contract 9711/91/D/IM(SC), Final Report, 1993.

[3] Jorba A., Simó C.: "On quasiperiodic perturbations of elliptic equilibrium points", por aparecer en SIAM Journal on Mathematical Analysis.

[4] Simó C., Gómez G., Jorba A., Masdemont J.: "The bicircular model near the triangular libration points of the RTBP", en <u>From Newton to Chaos</u>, A. E. Roy, A.B. Steves, eds., pp. 343-370. Plenum, New York (1995).

[5] Eliason L. H.: "Perturbations of stable invariant tori", Ann. Scuola Norm. Su. Pisa 15, 115-148 (1988).

[6] Jorba A., Villanueva J.: "On the persistence of low dimensional invariant tori under quasiperiodic perturbations", en progreso.