ESTABILIDAD LINEAL EN CALENTAMIENTO UNIDIMENSIONAL

H. Herrero(1), A. M. Mancho(2) y C. Pérez-García(2)
(1) Departamento de Matemática Aplicada
Universidad Complutense de Madrid
28040 Madrid, España
(2) Departamento de Física y Matemática Aplicada
Facultad de Ciencias, Universidad de Navarra
31080 Pamplona, Navarra, España

1 Introducción

La comprensión de la convección en calentamiento unidimensional es un problema importante dentro de la teoría general de la convección. El tipo de experimento fuente de inspiración de este estudio consiste en una caja rectangular de dimensiones l (eje x), L (eje y) y D (eje z) con aceite de silicona hasta un nivel d y con un hilo metálico en el fondo, en el medio y a lo largo de la caja, que es calentado [1], un esquema del sistema se puede ver en la fig. 1. Al calentar el hilo se produce una diferencia de temperaturas muy pequeña ΔT, entre las dos capas de la caja y se forma el estado básico que consiste en dos rollos convectivos separados por el plano vertical a lo largo del hilo (véase la fig. 2). Se ha calculado una solución numérica de las ecuaciones básicas para este estado (véase la fig. 4) y se ha hecho un estudio de estabilidad lineal de esta solución teniendo en cuenta efectos de empuje y termocapilaridad. De este análisis se deduce que los rollos sufren una bifurcación a ondas estacionarias o viajeras en la superficie dependiendo de la profundidad de la caja y del gradiente de temperatura (véase la fig. 3). El índice de transferencia de calor entre el líquido y la atmósfera es también importante para que ocurra la bifurcación.

2 Estado básico

Después de realizar varias suposiciones justificadas por la situación física y varios cambios de variable (adimensionalización) [2] se llega a las siguientes ecuaciones que rigen el fenómeno:
La ecuación de continuidad:

$$\nabla \cdot u = 0 \tag{1}$$

las ecuaciones de Navier-Stokes:

$$\partial_t u + (u \cdot \nabla) u = Pr(-\nabla p + \Delta u + RC\rho e_z) \tag{2}$$

la ecuación de balance de energía:

$$\partial_t \Theta + u \cdot \nabla \Theta = \Delta \Theta \tag{3}$$

donde las variables dependientes del espacio y el tiempo son: $u = (u_1, u_2, u_3)$ que es la velocidad del fluido, p la presión y Θ la temperatura, que son funciones reales definidas en un dominio $\Omega = [0,\Gamma] \times (-\infty,\infty) \times [0,1] \times \mathbb{R}^+$, en el que tomamos la mitad de la caja en la dirección x por ser el problema simétrico con respecto a $x = 0$, donde el límite de este intervalo es la relación de aspecto $\Gamma = l/2d$, resultado de la adimensionalización, en la dirección y tomamos toda la recta real porque este tamaño de la caja no influye en el comportamiento global del experimento y en el eje z el límite es 1 también después de los cambios de variable, e_z es el vector unitario en la dirección z.

Las características del fluido quedan resumidas en la densidad ρ, la densidad media ρ_0, la difusividad térmica κ, la viscosidad cinemática ν, el coeficiente de expansión α, el número de Prandtl $Pr = \nu/\kappa$, que por ser grande en este caso es considerado infinito y $C = 1/(\alpha\rho_0\Delta T)$. El parámetro de control de la bifurcación, regida por el gradiente de temperatura, es el número de Rayleigh $R = g\alpha\Delta T d^3/\kappa\nu$.

El campo de velocidades puede expresarse mediante un potencial:

$$u = \nabla \times \nabla \times e_z\phi = (\partial_x\partial_z\phi, \partial_y\partial_z\phi, -(\partial_x^2 + \partial_y^2)\phi) \tag{4}$$

en términos de este potencial las condiciones de contorno son:

$\underline{z = 0}$

$$\begin{aligned} \Theta &= \exp(-x^2/\beta) && (5)\\ \partial_x\phi &= 0 && (6)\\ \partial_x\partial_z\phi &= 0 && (7) \end{aligned}$$

$\underline{z = 1}$

$$\begin{aligned} Bi\Theta &= -\partial_z\Theta && (8)\\ -\partial_z^2\phi &= Ma\Theta && (9) \end{aligned}$$

La ec.(5) indica el calentamiento debido al hilo en la superficie inferior y las ecs.(6,7) dan cuenta de que dicha superficie es rígida. La ec.(8) se refiere a la transferencia de calor en la superficie superior (indicada por el número de Biot Bi) y la ec.(9) de los efectos de tensión superficial (representados por el número de Marangoni Ma).

$\underline{x = 0}$

$$\begin{aligned} \partial_x\Theta &= 0 && (10)\\ \partial_x\phi &= 0 && (11)\\ \partial_x^3\phi &= 0 && (12) \end{aligned}$$

$\underline{x = \Gamma}$

$$\begin{aligned} Bi_{pv}\Theta &= -\partial_x\Theta && (13)\\ \partial_x\phi &= 0 && (14)\\ \partial_x^2\phi &= 0 && (15) \end{aligned}$$

Estas condiciones significan derivabilidad en $x = 0$, debido a que consideramos sólo una mitad de la caja. La pared vertical derecha $x = \Gamma$ es aislante ($B_{pv} = 0$) y rígida.

La solución numérica para la temperatura, calculada mediante un esquema en diferencias finitas, se puede apreciar en la fig. 4, donde se observa que el campo de temperaturas está muy localizado en torno a $x = 0$ para profundidades pequeñas y que para números de Biot grandes el calor se pierde fácilmente en la superficie. Estas gráficas están tomadas en el momento de la inestabilidad, con lo que ya se aprecia que profundidades grandes y números de Biot medios favorecen la inestabilidad.

3 Análisis de estabilidad lineal

Tomamos una perturbación del estado básico que tiene la forma de la estructura bifurcada:

$$u_b(x,z) + \tilde{u}(x,z)e^{\lambda t + iky}$$

$$\Theta_b(x,z) + \tilde{\Theta}(x,z)e^{\lambda t + iky}$$

Introducimos estas expresiones en las ecuaciones hidrodinámicas y obtenemos ecuaciones para las perturbaciones:

$$\begin{aligned}
(\lambda - \Delta + u_x\partial_x + u_z\partial_z)\tilde{\Theta}(x,z) + \partial_x\Theta\tilde{u}_x(x,z) + \partial_z\Theta\tilde{u}_z(x,z) &= 0 \\
\Delta^2\tilde{u}_z(x,z) + R\Delta_1\tilde{\Theta}(x,z) &= 0
\end{aligned}$$

Resolvemos estas ecuaciones localmente en un entorno de $x = 0$ donde los campos son de variables separadas, en z tomamos un desarrollo en polinomios de Chebyshev y en x un simple desarrollo de Taylor porque es una buena aproximación situarse para este estudio muy cerca del hilo calentador.

$$\begin{aligned}
\tilde{\Theta}(x,z) &= \tilde{\Theta}(z)(1 + ax^2 + bx^4) \\
\tilde{u}_z(x,z) &= \tilde{u}_z(z)(1 + cx^2 + rx^4) \\
\tilde{u}_x(x,z) &= \tilde{u}_x(z)(ex + fx^3)
\end{aligned}$$

El método numérico utilizado para resolver las ecuaciones de las perturbaciones es un método Tau con desarrollos en polinomios de Chebyshev. El resultado de estos cálculos son los autovalores que nos van a permitir deducir la estabilidad de la solución estado básico: $\lambda(k, R, Ma, B, u_b, \Theta_b)$, donde se podían haber sustituído R y Ma por ΔT y d (véase ref.[2]).

4 Conclusiones

En los resultados de estabilidad marginal se aprecia una clara diferencia entre profundidades grandes y pequeñas, las profundidades pequeñas dificultan la inestabilidad y por lo tanto requieren un gradiente de temperaturas mayor para generarla. También para estas profundidades se observa una diferencia notable dependiendo del número de Biot, se distingue entre números de Biot pequeños y medios-grandes. Para números de Biot pequeños la inestabilidad ocurre para gradientes de temperatura altos, mientras que para números de Biot medios y grandes ocurre para gradientes de temperatura bajos, con lo que inestabilidad se ve favorecida. Es curioso que la dependencia de los umbrales de estabilidad con el número de Biot no es monótona. Esto se debe a que para profundidades pequeñas la transferencia de calor con la atmósfera es, en proporción, mayor, la capa de líquido es más delgada y se necesita un gradiente de temperatura mayor para mantener el calor en el líquido antes de que se pierda por la superficie libre, por otra parte los efectos de tensión superficial que facilitan la inestabilidad son, en este caso, irrelevantes y la inestabilidad es consecuencia únicamente del empuje, por lo que se requiere un gradiente de temperatura grande para producir la inestabilidad. Por último decir que este análisis es sólo válido para profundidades menores de 4mm donde reproduce los resultados experimentales.

Agradecimientos

Nos gustaría agradecer al grupo experimental del departamento de Física y Matemática Aplicada de la Universidad de Navarra, formado por Hector Mancini, Javier Burguete, Angel Garcimartín y Diego Maza por facilitarnos los datos experimentales imprescindibles para la realización del presente estudio y a Michael Bestehorn por su ayuda en el campo numérico.

También agradecemos la financiación por parte de los proyectos de investigación PIUNA 14 (Universidad de Navarra) y DGICYT PB93-0708.

Bibliografía

[1] J. Burguete, H. Mancini and C. Pérez-García, Europhys. Lett. **23**, 401 (1993).
[2] A. M. Mancho, H. Herrero, M. Bestehorn and J. Burguete, enviado a Physica D.

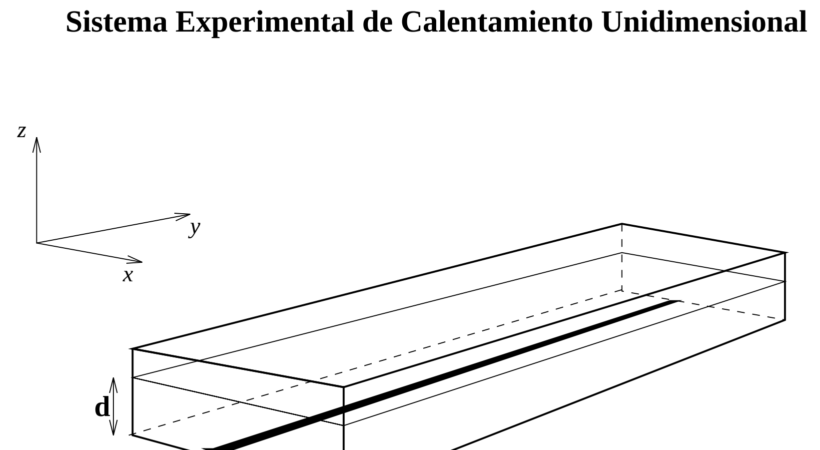

Figure 1: El sistema experimental consiste en una caja de dimensiones l (eje x), L (eje y) y D (eje z) llena de aceite de silicona hasta un nivel d que llamamos profundidad, en el fondo de la caja hay una estrecha banda metálica, que será calentada posteriormente, que es el hilo calentador

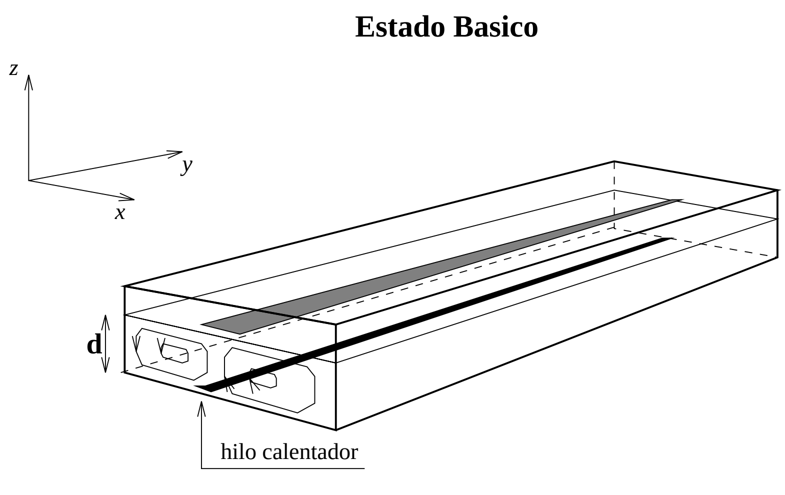

Figure 2: Se calienta el hilo y enseguida aparecen un par de rollos paralelos al hilo calentador que llenan toda la celda, que constituyen el estado básico. Lo que se percibe por métodos ópticos desde arriba es una banda oscura en el centro que corresponde a la parte más caliente y dos bandas más claras a ambos lados que son zonas más frías.

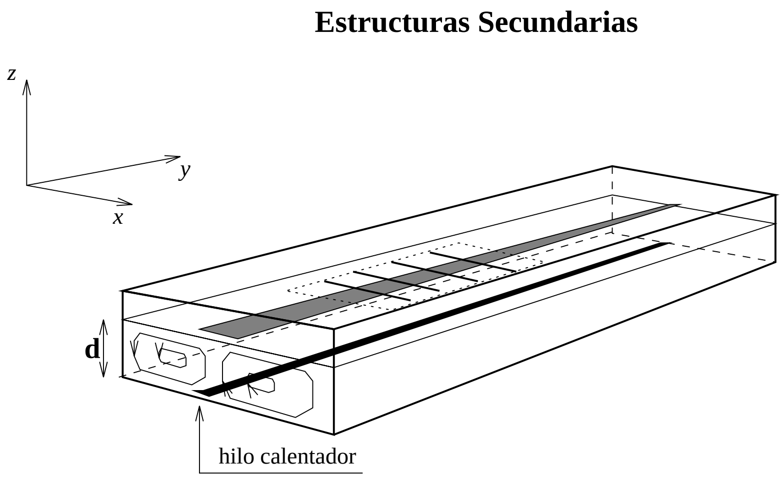

Figure 3: Aumentando la diferencia de temperaturas en la zona del hilo el estado básico pierde estabilidad y se observan unas bandas oscuras perpendiculares al hilo calentador que corresponden a una distribución inhomogénea de temperaturas, es una estructura secundaria. Dependiendo de la profundidad esta estructura puede ser estacionaria o viajar.

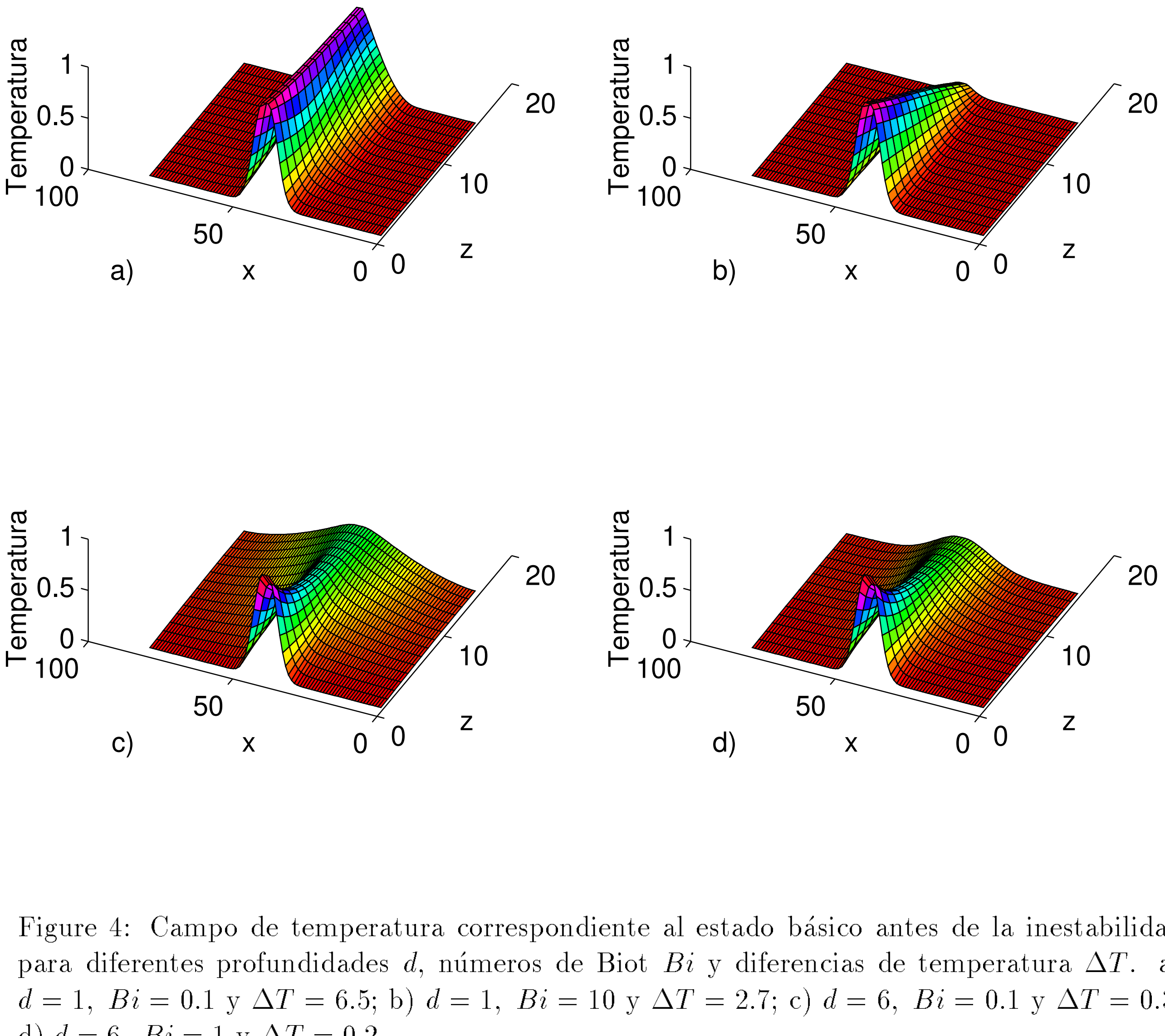

Figure 4: Campo de temperatura correspondiente al estado básico antes de la inestabilidad para diferentes profundidades d, números de Biot Bi y diferencias de temperatura ΔT. a) $d = 1,\ Bi = 0.1$ y $\Delta T = 6.5$; b) $d = 1,\ Bi = 10$ y $\Delta T = 2.7$; c) $d = 6,\ Bi = 0.1$ y $\Delta T = 0.3$; d) $d = 6,\ Bi = 1$ y $\Delta T = 0.2$.