SOBRE EL OPERADOR DIFERENCIAL DE BESSEL-CLIFFORD DE TERCER ORDEN

N. Hayek *
V. Hernández Suárez†
F. Cabrera Suárez ‡

1. Introducción

Muchos problemas de contorno y de valor inicial de la física matemática están vinculados a los operadores diferenciales de Bessel de orden arbitrario u operadores hiperbesselianos. Estos operadores de orden arbitrario $m \geq 1$ vienen definidos,

$$\begin{aligned} B &= x^{\alpha_0} D x^{\alpha_1} D x^{\alpha_2} ... D x^{\alpha_m} = \\ &= x^{-\beta} \left(xD + \beta\gamma_1 \right) ... \left(xD + \beta\gamma_m \right) \end{aligned} \tag{1}$$

con $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_m$ reales, tal que

$$\beta = m - \sum_{k=0}^{m} \alpha_k > 0 \qquad \text{y} \qquad \gamma_k = \frac{1}{\beta} \left(\alpha_k + ... + \alpha_m - m + k \right) \ , \ k = 1, ..., m$$

siendo $D \equiv \frac{d}{dx}, 0 < x < \infty$.

Esta clase de operadores fueron investigados por Dimovski [1], [2] , quien desarrolló cálculos operacionales y transformadas integrales para los mismos. Posteriormente, sus teorías fueron generalizadas y relacionadas con el Cálculo fraccionario por Dimovski y Kiryakova [3], [4], [10], [11], Mc Bride, Betancor y Barrios.

Ejemplos de (1) son ,

*Dpto. Análisis Matemático, U. La Laguna (nhayek@ull.es)
†Dpto. Matemáticas, U. Las Palmas de G.C. (vhdez@dma.ulpgc.es)
‡Dpto. Matemáticas, U. Las Palmas de G.C. (frank@dma.ulpgc.es)

de segundo orden,

$$B_{\gamma}=x^{-2}\left(xD+\gamma\right)\left(xD-\gamma\right), \qquad (2)$$

y de orden $m>1$,

$$\widetilde{B}_m=D^m=\left(\tfrac{d}{dx}\right)^m, \qquad (3)$$

(Es el más simple operador hiperbesseliano)

Estos operadores se estudian generalmente en los espacios funcionales,

$$C_{\alpha}^{(i)}\equiv\left\{f\left(x\right)=x^p\widetilde{f}\left(x\right);p>\alpha,\widetilde{f}\in C^{(i)}[0,\infty)\right\},i=0,1,2...$$

siendo

$$\alpha=\max_k\left[-\beta\left(\gamma_k+1\right)\right]$$

Cálculos operacionales, transformadas integrales, soluciones de las correspondientes ecuaciones diferenciales para otros casos especiales de (1) han sido investigados por muchos autores: Hayek [6], [7], Hayek y Hernández [8], [9], Ditkin y Prudnikov, etc.

En [3], [4], [10], [11], se analizó la conexión de los operadores (1) con las funciones hipergeométricas generalizadas G de Meijer [5],

$$G_{p,q}^{m,n}\left[\sigma\left|\begin{array}{c}(a_k)_1^p\\(b_l)_1^q\end{array}\right.\right]=\frac{1}{2\pi i}\int_{\ell}\frac{\prod\limits_{l=1}^{m}\Gamma\left(b_l-s\right)\prod\limits_{k=1}^{n}\Gamma\left(1-a_k+s\right)}{\prod\limits_{l=m+1}^{q}\Gamma\left(1-b_l+s\right)\prod\limits_{k=n+1}^{p}\Gamma\left(a_k-s\right)}\sigma^s ds \qquad (4)$$

siendo $\sigma\neq 0$.

Las (4) son soluciones de las ecuaciones diferenciales hiperbesselianas de orden arbitrario,

$$By(x)=\lambda y(x)+f(x)$$

siendo λ una constante, f(x) una función dada y B el operador diferencial anteriormente definido.

Otras técnicas útiles en el estudio de (1) incluyen a los operadores generalizados de integración fraccionaria con las funciones G. Para un entero m $\geq 1, \beta > 0$ real, $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_m$ y $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_m \geq 0$ reales arbitrarios, definimos un operador de integración fraccionaria de orden múltiple $\delta = (\delta_1, \delta_2, ..., \delta_m)$, (operador múltiple de Erdélyi-Kober) como,

$$I_{\beta,m}^{(\gamma_k),(\delta_k)} f(x) = \int_0^1 G_{m,m}^{m,0} \left[\sigma \,\middle|\, \begin{matrix} (\gamma_k + \delta_k)_1^m \\ (\gamma_k)_1^m \end{matrix} \right] f(x\sigma^{\frac{1}{\beta}}) d\sigma \qquad (5)$$

Para m=1, tenemos las integrales fraccionarias,

$$I_{\beta,1}^{\gamma,\delta} f(x) = I_{\beta}^{\gamma,\delta} f(x) = \int_0^1 \frac{(1-\sigma)^{\delta-1} \sigma^{\gamma}}{\Gamma(\delta)} f\left(x\sigma^{\frac{1}{\beta}}\right) d\sigma \qquad (6)$$

de orden $\delta > 0$.

Los operadores (5) fueron introducidos por Kiryakova [11].

2. Operadores de Bessel-Clifford de tercer orden

Hayek [6] investigó la ecuación diferencial de Bessel-Clifford de segundo orden,

$$\widetilde{B}_{\gamma} y(x) = -y(x)$$

relacionada con el operador tipo Bessel

$$\widetilde{B}_{\gamma} = x^{-\gamma} D x^{\gamma+1} D = x^{-1} (xD + \gamma) xD \qquad (7)$$

Una de sus soluciones es la función de Bessel-Clifford de segundo orden,

$$C_{\gamma}(x) = x^{-\frac{\gamma}{2}} J_{\gamma}\left(2\sqrt{x}\right) = \frac{{}_0F_1(\gamma+1; -x)}{\Gamma(\gamma+1)} = G_{0,2}^{1,0} \left[x \,\middle|\, \begin{matrix} \\ 0, -\gamma \end{matrix} \right] \quad (8)$$

Posteriormente, en [7] Hayek definió las funciones de Bessel-Clifford de tercer orden,

$$C_{\mu,\gamma}(x) = \frac{{}_0F_2(\mu+1, \gamma+1; -x)}{\Gamma(\gamma+1)\Gamma(\mu+1)} = G_{0,3}^{1,0} x \left[x \,\middle|\, \begin{matrix} \\ 0, -\mu, -\gamma \end{matrix} \right] \qquad (9)$$

dependiendo de dos índices y estudiadas con más detalles por Hayek y Hernández [7], [8], [9]. Las (9) están conectadas con el operador diferencial de Bessel-Clifford de tercer orden, escrito en la forma,

$$\begin{gathered}B_{\mu,\gamma} = x^{-\mu} D x^{\mu-\gamma+1} D x^{\gamma+1} D = \\ = x^2 D^3 + (\mu+\gamma+3)\, x D^2 + (\mu+1)\,(\gamma+1)\, D\end{gathered} \tag{10}$$

siendo los parámetros: m = 3, $\alpha_0 = -\mu, \alpha_1 = \mu-\gamma+1, \alpha_2 = \gamma+1, \alpha_3 = 0$, luego $\beta = 1, \gamma_1 = \mu, \gamma_2 = \gamma, \gamma_3 = 0$, y $\alpha = \max\{-\mu, -\gamma, 0\} - 1 \geq -1$. Supongamos que $\mu - \gamma \neq 0, \pm 1, \pm 2, ...$La solución del problema inicial,

$$B_{\mu,\gamma} y\,(x) = f(x)$$

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$$

define el operador lineal inverso a la derecha $L_{\mu,\gamma}$ de $B_{\mu,\gamma}$,

$$B_{\mu,\gamma} L_{\mu,\gamma} = I$$

A $L_{\mu,\gamma}$ se le denomina operador integral de Bessel-Clifford y lo podemos representar como una integral fraccionaria en la forma,

$$\begin{gathered}y(x) = L_{\mu,\gamma} f(x) = x I_{1,3}^{(\mu,\gamma,0),(1,1,1)} f\,(x) = \\ \\ = x \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 x_1^{\mu} x_2^{\gamma} f(x, x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 = \\ \\ = x \int_0^1 G_{3,3}^{3,0} \left[\sigma \left| \begin{array}{c} \mu+1, \gamma+1, 1 \\ \mu, \gamma, 0 \end{array} \right. \right] f\,(x^{\sigma})\, d\sigma\end{gathered} \tag{11}$$

Usando propiedades de los operadores de Erdélyi-Kober y de las funciones G, se infiere,

$$L_{\mu,\gamma}\,\{C_{\mu,\gamma}\,(x)\} = -C_{\mu,\gamma}\,(x) \Rightarrow B_{\mu,\gamma}\,\{C_{\mu,\gamma}\,(x)\} = -C_{\mu,\gamma}\,(x)$$

de donde $y(x) = C_{\mu,\gamma}(x)$ satisface la ecuación diferencial de Bessel-Clifford de tercer orden

$$x^2 y''' + (\mu+\gamma+3)\, xy'' + (\mu+1)(\gamma+1)\, y' + y = 0 \qquad (12)$$

Para desarrollar cálculos operacionales del tipo Mikusinski para (10), necesitamos convoluciones del operador lineal $L_{\mu,\gamma}$ (11) . Se obtiene el siguiente resultado, de la teoría general de los operadores hiperbesselianos de orden m > 1 (Dimovski [1], [2], Dimovski y Kiryakova [4]).

Teorema 1.

Si $\lambda \geq \max\{\mu, \gamma, 0\}$ y (o) representa la operación auxiliar

$$(fog)(x) = x \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 A(x, t_1, t_2, t_3)\, dt_1 dt_2 dt_3 \qquad (13)$$

donde

$$A(x, t_1, t_2, t_3) = f[xt_1t_2t_3]\, g[x(1-t_1)(1-t_2)(1-t_3)]\, [t_1(1-t_1)]^{\mu}\, [t_2(1-t_2)]^{\gamma}$$

Entonces, las operaciones definidas por medio de integrales fraccionarias generalizadas de la forma (5)

$$\left(f \overset{\lambda}{*} g\right)(x) = x^{\lambda} I_{1,3}^{(2\mu,2\gamma,0),(\lambda-\mu,\lambda-\gamma,\lambda)}\{(fog)(x)\} \qquad (14)$$

son convoluciones del operador lineal $L_{\mu,\gamma}$ en el espacio lineal C_α .

Demostración.

Por definición, la operación $(*)$ será una convolución del operador $L_{\mu,\gamma}$ en C_α , si se satisfacen las condiciones de bilinealidad, asociatividad, conmutatividad y $L_{\mu,\nu}\left(f \overset{\lambda}{*} g\right) = (L_{\mu,\gamma} f) \overset{\lambda}{*} g$ para $f, g \in C_\alpha$. Estas propiedades son verificadas fácilmente para funciones de la forma $f(x) = x^p, g(x) = x^q \in C_\alpha$, usando el producto convolucional,

$$x^p \overset{\lambda}{*} x^q = Ax^{p+q+\lambda+1}, p > \alpha, q > \alpha \qquad (15)$$

siendo

$$A = \frac{\Gamma\left(\mu+p+1\right)\Gamma\left(\mu+q+1\right)\Gamma\left(\gamma+p+1\right)\Gamma\left(\gamma+q+1\right)\Gamma\left(p+1\right)\Gamma\left(q+1\right)}{\Gamma\left(\mu+\lambda+p+q+2\right)\Gamma\left(\gamma+\lambda+p+q+2\right)\Gamma\left(\lambda+p+q+2\right)}$$

Entonces, en virtud del teorema de Weierstrass, las funciones arbitrarias de C_α pueden ser aproximadas por funciones de la forma

$$f(x) = x^p P_n(x) \text{ y } g(x) = x^q Q_n(x),$$

con p, q $> \alpha$ y P(x) , Q(x) polinomios.

3. Transformada integral de Laplace-Obrechkoff para los operadores de Bessel-Clifford

Buscamos una transformada integral semejante a las transformadas de Laplace y Meijer

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{f(x); z\right\} &= \textstyle\int_0^\infty e^{-zx} f(x)dx \\ K_\gamma\left\{f(x); z\right\} &= \textstyle\int_0^\infty \sqrt{z_x} K_\gamma(z_x) f(x)dx \end{aligned} \tag{16}$$

(K_γ es la función de Bessel de tercera especie) y correspondiente a los operadores de Bessel-Clifford [10], [11]. Dimovski [2] demostró que una modificación de una transformada integral, debida a Obrechkoff, puede ser usada como transformada base del cálculo operacional para operadores hiperbesselianos (1).

Dimovski y Kiryakova [3] encontraron una nueva representación de la transformada de Obrechkoff en términos de las funciones G,

$$\mathcal{O}\left\{f(x); z\right\} = \beta z^{-\beta(\gamma_m+1)+1} \quad \textstyle\int_0^\infty G_{0,m}^{m,0}\left[(zx)^\beta \,\middle|\, \begin{matrix} \\ \left(\gamma_k - \frac{1}{\beta}+1\right)_1^m \end{matrix}\right] f(x)dx \tag{17}$$

A la transformada integral de la forma

$$\mathcal{O}_{\mu,\gamma}\left\{f(x); z\right\} = \textstyle\int_0^\infty G_{0,3}^{3,0}\left[zx \,\middle|\, \begin{matrix} \\ \mu, \gamma, 0 \end{matrix}\right] f(x)dx \tag{18}$$

la denominamos transformada integral de Laplace-Obrechkoff, correspondiente al operador diferencial de Bessel-Clifford $B_{\mu,\gamma}$.

Para una función transformable del espacio

$$\Omega_{\mu,\gamma} \equiv \left\{ f \in C_{\alpha} = C_{\max\{-\mu,-\gamma,0\}-1}; f(x) = \mathbf{O}\left(\exp\left(\rho\,(x)^{\frac{1}{3}}\right)\right), x \to \infty \right\} \qquad (19)$$

la integral (18) define una función analítica de z en el semiplano Rez $> \rho$.

Usando propiedades de las funciones G, se pueden determinar imágenes de varias funciones básicas $f \in \Omega_{\mu,\gamma}$.

Por ejemplo,

$$\mathcal{O}_{\mu,\gamma}\left\{x^{p-1} C_{\mu,\gamma}(x); z\right\} = \frac{1}{(z+1)^{p}}$$

para $p > 1$.
Existe la siguiente relación entre (18) y los operadores de Bessel-Clifford.

Teorema 2.

Para una función f(x) transformable del espacio (19) , se tiene,

$$\mathcal{O}_{\mu,\gamma}\left\{L_{\mu,\gamma} f(x); z\right\} = \frac{1}{z}\mathcal{O}_{\mu,\gamma}\left\{f(x); z\right\} \qquad (20)$$

Por otra parte si f(x) satisface las condiciones iniciales nulas $f^{(i)}(x) = 0, i = 0, 1, 2, ...$ entonces

$$\mathcal{O}_{\mu,\gamma}\left\{B_{\mu,\gamma} f(x); z\right\} = z\mathcal{O}_{\mu,\gamma}\left\{f(x); z\right\} \qquad (21)$$

4. Ejemplos

Las técnicas de la transformada integral de Laplace-Obrechkoff desarrolladas anteriormente pueden ser usadas, por ejemplo, para resolver problemas de valor inicial para ecuaciones diferenciales de la forma

$$P\left(B_{\mu,\gamma}\right) y(x) = f(x)$$

siendo P un polinomio con coeficientes constantes, incluyendo el operador de Bessel-Clifford de tercer orden.

4.1

Consideremos el problema de valor inicial

$$\begin{aligned} B_{\mu,\gamma}y(x) &= -\lambda y(x) \\ y\,(0) = y'(0) &= y''(0) = 0 \end{aligned} \qquad (22)$$

Denotando $\mathcal{O}_{\mu,\gamma}\left\{f(x);z\right\} = Y\left(z\right)$ y aplicando (18) a (22) y teniendo en cuenta (21), se tiene

$$Y(z) = \frac{1}{z+\lambda} \Rightarrow y(x) = C_{\mu,\gamma}\left(\lambda x\right)$$

4.2

El problema

$$\begin{aligned} B_{\mu,\gamma}y(x) &= f(x) \\ y(0) = y'(0) &= y''(0) = 0 \end{aligned} \qquad (23)$$

se transforma en,

$$zY(z) = F(z) \Rightarrow y(x) = \mathcal{O}^{-1}(z^{-1}) * f(x)$$

quedando,

$$y(x) = \frac{1 * f(x)}{\Gamma\left(\mu+1\right)\Gamma\left(\gamma+1\right)} = L_{\mu,\gamma}f(x) \qquad (24)$$

4.3

Sea el problema de valor inicial (p > α)

$$\begin{aligned} B_{\mu,\gamma}y(x) &= \lambda y(x) + x^{p} \\ y(0) = y'(0) &= y''(0) = 0 \end{aligned} \qquad (25)$$

el cual se transforma en

$$zY(z) = \lambda Y(z) + z^{-p-1}\Gamma\left(\mu+\rho+1\right)\Gamma\left(\gamma+\rho+1\right)\Gamma\left(\rho+1\right)$$

o sea

$$Y(z) = A\frac{z^{-\rho-1}}{z-\lambda}$$

siendo

$$A = \Gamma\left(\mu+\rho+1\right)\Gamma\left(\gamma+\rho+1\right)\Gamma\left(\rho+1\right)$$

Luego

$$y(x) = A\mathcal{O}^{-1}\left(z^{-\rho-1}\right) * \mathcal{O}^{-1}\left(\tfrac{1}{z-\lambda}\right) = x^{\rho} * C_{\mu,\gamma}(-\lambda x)$$

Calculando esta convolución posteriormente, como en (13) y (14), se infiere,

$$y(x) = Ax^{\rho+1}G^{1,1}_{1,4}\left[-\lambda x \middle| \begin{array}{c} 0 \\ 0, -\mu-\rho-1, -\gamma-\rho-1, -\rho-1 \end{array}\right] =$$

$$= \frac{{}_1F_3\left(1; \mu+\rho+2, \gamma+\rho+2, \rho+2; \lambda x\right)}{\left(\mu+\rho+1\right)\left(\gamma+\rho+1\right)\left(\rho+1\right)}$$

5. Referencias

[1] I. Dimovski, **Operational calculus for a class of differential operators**. C. R. Acad. Bulg. Sci. 19, No 12 (1966), 1111-1114.

[2] I. Dimovski, **On a Bessel-type integral transform due to N.Obrechkoff.** C. R. Acad. Bulg. Sci. 27, No 1 (1.974), 23-26.74.

[3] I. Dimovski and V. Kiryakova, **Complex inversion formulas for the Obrechkoff transform**. Pliska 4 (1981), 110-116.

[4] I. Dimovski and V. Kiryakova, **Transmutations, convolutions and fractional powers of Bessel-type operators via Meijer's G-function**. Proc. Complex Anal. and Appl-s. Varna 1983. Sofia (1.985), 45-66.

[5] A. Erdélyi (ed.) **Higher Transcendental Functions**, v. 1,2. McGraw-Hill, N. York (1953); v. 3 (1955)

[6] N. Hayek, **Estudio de la ecuación diferencial xy"+(ν + 1) y' + y = 0 y de sus aplicaciones.**Collect., Math.18, No 1-2 (1967), 57-174.

[7] N. Hayek, **Funciones de Bessel-Clifford de tercer orden**. Actas XII Jornadas Luso-Esp. de Mat. (Braga) (1987), 346-351.

[8] N. Hayek and V. Hernández Suárez, **Sobre las funciones de Bessel-Clifford de tercer orden.** Actas del XII C.E.D.Y.A., Oviedo (1991), 135-140.

[9] N. Hayek and V. Hernández Suárez, **Representación integrales de las funciones de Bessel-Clifford de tercer orden**. Rev. Acad. de Cie. Zaragoza 47 (1991), 51-60.

[10] V. Kiryakova, **An application of Meijer 's G-function to Bessel type operators**. Proc. Constr. Function Theory. Varna'84. Sofia (1984), 457-462.

[11] V. Kiryakova, **Generalized Fractional Calculus and Applications.** Pitman Res. Note in Math. series No 301, Logman: London etc. (co-publ. John Wiley & Sons. N. York) (1.994).