El método de Newton bajo condiciones fuertes de Kantorovich. Aplicación a ecuaciones diferenciales e integrales

José M. Gutiérrez y Miguel A. Hernández
Universidad de La Rioja, Dpto. de Matemáticas y Computación
C/ Luis de Ulloa s/n, 26004, Logroño

Resumen

Se estudia el método de Newton en espacios de Banach bajo condiciones distintas a las habituales de Kantorovich, comparándose los resultados obtenidos en ambas situaciones. Como aplicación, se obtiene información acerca de la existencia y unicidad de solución para algunas ecuaciones diferenciales e integrales.

1 Introducción

Sea la ecuación

$$F(x) = 0, \tag{1}$$

donde F es un operador no lineal definido entre los espacios de Banach X e Y. El método de Newton

$$x_{n+1} = x_n - F'(x_n)^{-1}F(x_n), \quad n \geq 0, \tag{2}$$

es quizá el proceso iterativo más conocido y utilizado para encontrar una solución de (1). En muchos casos, encontrar de forma explícita dicha solución es inviable, por lo que nos conformaremos con encontrar una aproximación o simplemente con obtener alguna información acerca de la existencia y

unicidad de solución de (1) en una determinada región. A este respecto, el método de Newton también nos es útil.

Al trabajar en espacios de Banach, podemos aplicar los resultados obtenidos a problemas tan diversos como ecuaciones escalares, ecuaciones diferenciales o ecuaciones integrales.

En este trabajo, se analiza la convergencia del método de Newton bajo unas condiciones más restrictivas que las clásicas consideradas por otros autores ([6], [7], [9]), denominadas condiciones de Kantorovich. Podemos encontrar, sin embargo, un conjunto de puntos de salida, más amplio que el habitual, para los que la sucesión (2) es convergente. A partir de estas aproximaciones iniciales damos unos resultados de existencia y unicidad de solución para ciertas ecuaciones diferenciales e integrales.

2 El método de Newton bajo condiciones fuertes de Kantorovich

A partir de ahora, supondremos que el operador F que aparece en (1) es dos veces diferenciable Fréchet en una bola

$$\Omega_0 = \overline{B(x_0, r_0)} = \{x \in X;\ \|x - x_0\| \leq r_0\}$$

(denotaremos $B(x_0, r_0)$ a la correspondiente bola abierta). Supongamos también que existe el operador $\Gamma_0 = F'(x_0)^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$ (espacio de operadores lineales y acotados de Y en X) y que F'' satisface una condición tipo Lipschitz

$$\|\Gamma_0 \left[F''(x) - F''(x_0)\right]\| \leq k\|x - x_0\|, \quad x \in \Omega_0. \tag{3}$$

La mayoría de los autores estudian el proceso (2) bajo las denominadas condiciones de Kantorovich, esto es,

(I) $\|\Gamma_0 F(x_0)\| \leq a$,

(II) $\|\Gamma_0 F''(x)\| \leq M$, $x \in \Omega_0$,

(III) $aM \leq 1/2$ y además

$$\frac{1-\sqrt{1-2aM}}{M} \leq r_0,$$

o incluso condiciones más débiles [1], [11] [13], como son las obtenidas reemplazando **(II)** por

(II') $\|\Gamma_0 [F'(x) - F'(y)]\| \leq M\|x-y\|$, $x, y \in \Omega_0$,

o por

(II") $\|\Gamma_0 [F'(x) - F'(y)]\| \leq M\|x-y\|^p$, $x, y \in \Omega_0$, $p \in [0,1]$.

No obstante, el considerar condiciones más fuertes (como la dada por (3)) también tiene su interés ya que se puede garantizar la convergencia de (2) en situaciones en las que no se verifican las condiciones de Kantorovich, como veremos posteriormente.

En el siguiente resultado se prueba la convergencia del método de Newton en condiciones más fuertes que las de Kantorovich. La demostración puede verse en [4], donde se encuentra la función mayorizante que nos ayuda a probar la convergencia, en este caso un polinomio de tercer grado en lugar del clásico polinomio de segundo grado. También se garantiza la unicidad de solución y se dan estimaciones del error cometido en función de las raíces de dicho polinomio.

Teorema 2.1 *Supongamos que F satisface*

$$\|\Gamma_0 F(x_0)\| \leq a, \qquad \|\Gamma_0 F''(x_0)\| \leq b$$

y (3). Supongamos también que el polinomio

$$p(t) = \frac{k}{6}t^3 + \frac{b}{2}t^2 - t + a \tag{4}$$

tiene dos raíces positivas $r_1 \leq r_2$, esto es, $p(m) \leq 0$ con

$$m = \frac{2}{b + \sqrt{b^2 + 2k}}.$$

Entonces, si $r_1 \leq r_0$, la sucesión $\{x_n\}$ definida en (2) es convergente a x^*, solución de (1) en $\overline{B(x_0, r_1)}$. Además la solución es única en $B(x_0, r_2)$ si

$r_1 < r_2$ o en $\overline{B(x_0, r_1)}$ si $r_1 = r_2$. Por último, si $r_1 < r_2$, podemos dar las siguientes estimaciones del error en función de las raíces de p (denotamos $-r_3$ a la raíz negativa de p) :

$$(r_2 - r_1)\frac{\alpha^{2^n}}{r - \alpha^{2^n}} \leq r_1 - t_n \leq (r_2 - r_1)\frac{\theta^{2^n}}{R - \theta^{2^n}},$$

donde

$$0 < r = \frac{r_3 - r_2}{r_3 - r_1} < 1, \quad 0 < R = 1 - \frac{r_2 - r_1}{r_3 + r_1} < 1,$$

$$0 < \alpha = r\frac{r_1}{r_2} < 1, \quad 0 < \theta = R\frac{r_1}{r_2} < 1.$$

Si $r_1 = r_2$, entonces

$$r_1 \left(\frac{r_3 - r_1}{2r_3 - r_1}\right)^n \leq r_1 - t_n \leq \frac{r_1}{2^n}.$$

Notas. • La siquiente condición es equivalente a que $p(m) \leq 0$ (ver [14])

$$a \leq \frac{b^2 + 4k - b\sqrt{b^2 + 2k}}{3k(b + \sqrt{b^2 + 2k})}.$$

Algunas condiciones suficientes, más sencillas de probar, pueden encontrarse en [5]:

$$a - \frac{1}{2b} + \frac{k}{6b^3} \leq 0,$$

$$6ab^3 + 9a^2k^2 + 18abk \leq 3b^2 + 8k$$

ó

$$3ak^2 + 3bk + b^3 \leq [b^2 + 2k]^{3/2}. \tag{5}$$

• Se puede obtener un resultado similar al teorema anterior (ver [4]) si exigimos, en lugar de (3), que F'' satisfaga

$$\|\Gamma_0 \left[F''(x) - F''(x_0)\right]\| \leq k\|x - x_0\|^p, \quad x \in \Omega_0, \quad p \geq 0.$$

En este caso, la función "test" que nos ayuda aprobar la convergencia, la unicidad de solución y nos proporciona estimaciones del error es

$$f(t) = a - t + \frac{b}{2}t^2 + \frac{k}{(p+1)(p+2)}t^{p+2},\ t \geq 0.$$

Veamos un ejemplo [5] en el que no se cumplen las condiciones de Kantorovich y sí se cumplen las condiciones del teorema anterior.

Ejemplo 1. Sean $X = [-1, 1]$, $Y = \mathbb{R}$, $f : X \to Y$ el polinomio

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{3}$$

y $x_0 = 0$.

Manteniendo la misma notación tenemos que $a = 2/5$, $M = 8/5$, $b = 2/5$ y $k = 6/5$. En consecuencia, $aM = 16/25 > 1/2$, luego no se cumplen las condiciones de Kantorovich y no se puede garantizar la convergencia de la sucesión de Newton empezando en x_0.

Sin embargo,

$$3ak^2 + 3bk + b^3 = \frac{404}{125} < \frac{512}{125} = (b^2 + 2k)^{3/2},$$

por tanto, se cumple la condición (5) y se puede aplicar el Teorema 2.1 para probar la convergencia de la sucesión de Newton. ■

En algunos casos, la convergencia de (2) se puede establecer indistintamente por el Teorema de Kantorovich o por el Teorema 2.1. Nos podemos preguntar entonces qué resultado nos proporciona una mejor información acerca de las soluciones de la ecuación (1). Sabemos que en las condiciones del Teorema 2.1, localizamos la solución de (1) en función de las raíces del polinomio (3). En las condiciones de Kantorovich, la información la obtenemos del polinomio

$$q(t) = \frac{M}{2}t^2 - t + a. \tag{6}$$

Denotando $\widehat{r}_1 \leq \widehat{r}_2$ a las raíces de q, tenemos que

$$p(\widehat{r}_j) = \frac{\widehat{r}_j^2}{2}\left(\frac{k}{3}\widehat{r}_j - (M - b)\right), \quad j = 1, 2.$$

Observar entonces que

$$p(\widehat{r}_1) \leq 0 \Longleftrightarrow k\left(1-\sqrt{1-2aM}\right) \leq 3M(M-b),$$

$$p(\widehat{r}_2) \leq 0 \Longleftrightarrow k\left(1+\sqrt{1-2aM}\right) \leq 3M(M-b).$$

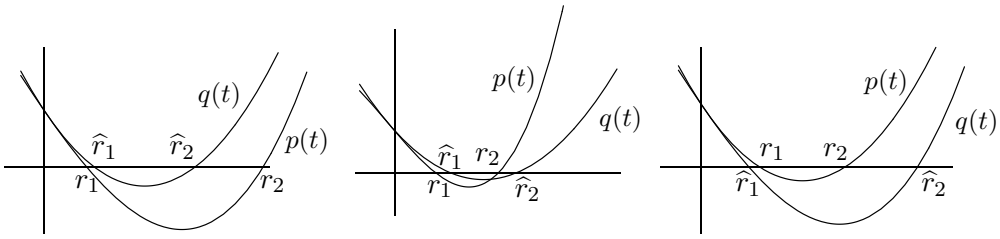

Figura 1:

Podemos distinguir tres casos:

Caso 1. $k\left(1+\sqrt{1-2aM}\right) \leq 3M(M-b)$. Entonces $r_1 \leq \widehat{r}_1$, $\widehat{r}_2 < r_2$ y, por tanto, la solución x^* está en $\overline{B(x_0, r_1)}$ y es única en $B(x_0, r_2)$.

Caso 2. $k\left(1-\sqrt{1-2aM}\right) \leq 3M(M-b) < k\left(1+\sqrt{1-2aM}\right)$. En esta situación $r_1 \leq \widehat{r}_1$, $r_2 < \widehat{r}_2$, luego, la solución x^* está en $\overline{B(x_0, r_1)}$ y es única en $B(x_0, \widehat{r}_2)$.

Caso 3. $3M(M-b) \leq k\left(1-\sqrt{1-2aM}\right)$. Tenemos ahora que $\widehat{r}_1 \leq r_1$, $r_2 < \widehat{r}_2$ y, en consecuencia, la solución x^* está en $\overline{B(x_0, \widehat{r}_1)}$ y es única en $B(x_0, \widehat{r}_2)$.

3 Aplicación a ecuaciones diferenciales e integrales

A continuación vamos a emplear los resultados de la sección anterior para estudiar algunas ecuaciones diferenciales e integrales, en concreto para garantizar la existencia y unicidad de solución para ellas.

Así, por ejemplo, consideramos el espacio $X = \{y \in C^1[0,\tau];\, y(0) = 0\}$ con la norma

$$\|y\| = \max_{t\in[0,\tau]} |y(t)| + \lambda \max_{t\in[0,\tau]} |y'(t)|,$$

con $\lambda > 0$ que se determinará más adelante.

Vamos a estudiar la ecuación diferencial

$$\begin{cases} y'(t) - \phi(t, y(t)) = 0, \\ y(0) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Suponemos que $\phi(t, u)$ es continua y tiene derivada segunda continua respecto a u en la región

$$0 \leq t \leq \tau, \quad |u - y_0(t)| \leq \delta, \quad y_0 \in X.$$

Sea $\Omega = \{y \in X; \|y - y_0\| \leq \delta\}$ y $F : \Omega \subseteq X \to C[0, \tau]$ el operador definido por

$$F(y)(t) = y'(t) - \phi(t, y(t)), \quad y \in \Omega.$$

El problema de resolver la ecuación diferencial (7) es equivalente al de encontrar una solución de $F(y) = 0$.

Para $y_0 \in \Omega$, tenemos

$$F'(y_0)y(t) = y'(t) - \phi'_u(t, y_0(t))y(t),$$

$$F''(y_0)xy(t) = -\phi''_{u^2}(t, y_0(t))x(t)y(t),$$

con $x, y \in \Omega$.

Sea $\Gamma_0 = F'(y_0)^{-1}$. Nuestro objetivo es encontrar una cota superior para $\|\Gamma_0\|$. Para ello sea $x = \Gamma_0(y)$. Entonces x es solución de la ecuación diferencial

$$x' = y(t) + \phi'_u(t, y_0(t))x,$$

esto es, [2], [12],

$$x(t) = \psi(t) \int_0^t \frac{y(s)}{\psi(s)}\, ds,$$

con $\psi(t) = \exp\left(\int_0^t \phi'_u(s, y_0(s))\, ds\right)$.

Observar que

$$\max_{t\in[0,\tau]} |x(t)| \leq \tau \frac{\max_{t\in[0,\tau]} |\psi(t)|}{\min_{t\in[0,\tau]} |\psi(t)|} \|y\|$$

y que

$$\max_{t\in[0,\tau]} |x'(t)| \leq \max_{t\in[0,\tau]} |\phi'_u(t, y_0(t))| \max_{t\in[0,\tau]} |x(t)| + \|y\| \leq \theta\|y\|,$$

con

$$\theta = 1 + \tau \max_{t\in[0,\tau]} |\phi'_u(t, y_0(t))| \frac{\max_{t\in[0,\tau]} |\psi(t)|}{\min_{t\in[0,\tau]} |\psi(t)|}.$$

En consecuencia,

$$\|\Gamma_0\| \leq \lambda\theta + \tau \frac{\max_{t\in[0,\tau]} |\psi(t)|}{\min_{t\in[0,\tau]} |\psi(t)|}. \tag{8}$$

A partir de esta cota podemos dar resultados sobre existencia y unicidad de solución de la ecuación diferencial (7), aplicando el Teorema 2.1.

Teorema 3.1 *Para $y_0 \in \Omega$, supongamos que se cumplen las siguientes condiciones:*

(i) $|y'_0(t) - \phi(t, y_0(t))| \leq a', \quad t \in [0, \tau].$

(ii) $|\phi'_u(t, y_0(t))| \leq M_1, \quad t \in [0, \tau].$

(iii) $|\phi''_{u^2}(t, y_0(t))| \leq b', \quad t \in [0, \tau].$

(iv) $|\phi''_{u^2}(t, u) - \phi''_{u^2}(t, v)| \leq k'|u - v|,\ t \in [0, \tau],\ |u - y_0(t)| \leq \delta,\ |v - y_0(t)| \leq \delta.$

Sean $\theta_1 = \tau e^{2\tau M_1}$, $\theta_2 = 1 + M_1\theta_1$, $B = \theta_1 + \lambda\theta_2$, $a = a'B$, $b = b'B$ y $k = k'B$. Si el polinomio

$$p(t) = \frac{k}{6}t^3 + \frac{b}{2}t^2 - t + a$$

tiene dos raíces reales positivas $r_1 \leq r_2$ y se cumple $m \leq \delta$ (m es el mínimo de p), entonces la ecuación diferencial (7) tiene solución y^* definida en $[0, \tau]$. Además

$$|y^*(t) - y_0(t)| \leq r_1, \quad t \in [0, \tau]$$

y la solución es única en la región $|u - y_0(t)| \leq r_2$.

Demostración. Se sigue sin más que tener en cuenta que

$$\max_{t\in[0,\tau]} |\psi(t)| \leq e^{\tau M_1}, \quad \min_{t\in[0,\tau]} |\psi(t)| \geq e^{-\tau M_1},$$

y, por (8), $\|\Gamma_0\| \leq \theta_1 + \lambda\theta_2 = B$. Como

$$\|\Gamma_0 F(x_0)\| \leq \|\Gamma_0\| \|F(x_0)\| \leq Ba' = a,$$

y, análogamente

$$\|\Gamma_0 F''(x_0)\| \leq b, \quad \|\Gamma_0[F''(y) - F''(y_0)]\| \leq k\|y - y_0\|,$$

el resultado es consecuencia inmediata del Teorema 2.1. ∎

Notar que si tomamos $B = \theta_1$ y el polinomio p tiene dos raíces positivas distintas, podemos garantizar la existencia de solución tomando λ suficientemente pequeño.

Nota. Si en lugar de exigir **(iv)** se supone que $\phi''_{u^2}(t,u)$ está acotada para $t \in [0,\tau]$ y $|u - y_0(t)| \leq \delta$, se cumplen las condiciones clásicas de Kantorovich, y se obtienen resultados similares a partir de un polinomio de segundo grado [6].

Consideramos ahora la ecuación integral

$$x(s) = \int_0^1 K(s,t,x(t))\,dt, \quad s \in [0,1], \tag{9}$$

donde $K(s,t,u)$ es una función continua en todos sus argumentos y tiene derivadas continuas de cualquier orden. Definimos en un espacio de funciones X el operador F de manera que $F(x) = y$, con

$$y(s) = x(s) - \int_0^1 K(s,t,x(t))\,dt.$$

Queremos resolver la ecuación $F(x) = 0$. Para ello, partimos de una aproximación inicial x_0. Supongamos que X y K son lo suficientemente buenos para que $F'(x_0)$ se obtenga derivando bajo el signo integral, es decir, si $z = F'(x_0)x$, entonces

$$z(s) = x(s) - \int_0^1 K'_u(s,t,x_0(t))x(t)\,dt. \tag{10}$$

Es bien conocido [6], [8], que el operador $\Gamma_0 = F'(x_0)^{-1}$ tiene la forma $w = \Gamma_0(y)$ con

$$w(s) = y(s) + \int_0^1 G(s,t)y(t)\,dt,$$

y $G(s,t)$ resolvente de la ecuación (10) para el núcleo $K(s,t) = K'_u(s,t,x_0(t))$. Entonces, si

$$\int_0^1 |G(s,t)|\,dt \leq B', \quad s \in [0,1],$$

se tiene que $\|\Gamma_0\| \leq 1 + B' = B$.

A partir de esta cota, podemos establecer resultados de existencia y unicidad de solución para la ecuación (9) como consecuencia del Teorema 2.1.

Teorema 3.2 *En la situación anterior, supongamos que además se cumple*

(i) $\left|\int_0^1 K(s,t,x_0(t))\,dt - x_0(s)\right| \leq a', \quad s \in [0,1].$

(ii) $\left|\int_0^1 K''_{u^2}(s,t,x_0(t))\,dt\right| \leq b', \quad s \in [0,1].$

(iii) $\left|\int_0^1 [K''_{u^2}(s,t,u) - K''_{u^2}(s,t,v)]\,dt\right| \leq k'|u-v|$, *para* s, u *y* v *satisfaciendo* $s \in [0,1], \quad |u - x_0(s)| \leq \delta, \quad |v - x_0(s)| \leq \delta.$

Sean $a = a'B$, $b = b'B$ *y* $k = k'B$. *Si el polinomio*

$$p(t) = \frac{k}{6}t^3 + \frac{b}{2}t^2 - t + a$$

tiene dos raíces reales positivas $r_1 \leq r_2$ *y se cumple* $m \leq \delta$ *(*m *es el mínimo de* p*), entonces la ecuación integral (9) tiene solución* x^* *definida en* $[0,1]$. *Además*

$$|x^*(t) - x_0(t)| \leq r_1, \quad t \in [0,1]$$

y la solución es única en la región $|u - x_0(t)| \leq r_2$.

Ejemplo 2. Para ilustrar los comentarios anteriores, consideramos el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(t) = t + \operatorname{sen} y(t), \\ y(0) = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Resolver dicho problema es equivalente a encontrar una solución de la ecuación $F : X \to C[0,1]$, donde $X = \{y \in C^1[0,1];\, y(0) = 0\}$ y

$$F(y)(t) = y'(t) - t - \operatorname{sen} y(t).$$

En el espacio X consideramos la norma

$$\|y\| = \max_{t\in[0,1]} |y(t)| + \lambda \max_{t\in[0,1]} |y'(t)|,$$

con $\lambda > 0$ que se determinará más adelante, y en el espacio $C[0,1]$, consideramos la norma del máximo.

Si tomamos como aproximación inicial $y_0(t) = 0$ se sigue, a partir de las expresiones de las derivadas del operador F, que existe $\Gamma_0 = F'(x_0)^{-1}$, definido por

$$\Gamma_0 y(t) = e^t \int_0^t e^{-s} y(s)\, ds,$$

que

$$\|\Gamma_0 F(y_0)\| = \max_{t\in[0,1]} \|t + 1 - e^t\| + \lambda \max_{t\in[0,1]} \|1 - e^t\| = e - 2 + \lambda(e-1) \equiv a,$$

y que

$$\|\Gamma_0 F''(y_0)\| = 0 \equiv b.$$

Además, para $y \in X$,

$$\|\Gamma_0 F''(y)\| \leq e - 1 + \lambda e \equiv M,$$

$$\|\Gamma_0 [F''(y) - F''(y_0)]\| \leq (e - 1 + \lambda e)\|y - y_0\|,$$

luego $k = e - 1 + \lambda e$. Denotamos a_0, b_0, M_0 y k_0 a los correspondientes límites cuando λ tiende a cero de a, b, M y k, esto es,

$$a_0 = e - 2,\ b_0 = 0,\ M_0 = k_0 = e - 1.$$

Si analizamos los polinomios

$$q_0(t) = \frac{M_0}{2} t^2 - t + a_0, \quad p_0(t) = \frac{k_0}{6} t^3 + \frac{b_0}{2} t^2 - t + a_0$$

vemos que q_0 no tiene raíces reales (por tanto, el polinomio q que se obtiene usando el Teorema de Kantorovich tampoco) y, sin embargo, p_0 sí que tiene

raíces reales. Entonces, tomando λ suficientemente pequeño, tenemos que el polinomio p definido en (4), que podemos escribir

$$p(t) = p_0(t) + \lambda e \left(1 + \frac{t^3}{6}\right)$$

también tiene raíces reales y estas coinciden prácticamente con las de p_0: $r_1 = 1.0465$, $r_2 = 1.111$. Así, podemos garantizar que el problema de valor inicial (11) tiene solución y^* definida en $[0, 1]$ y satisfaciendo

$$|y^*(t) - y_0(t)| \leq r_1, \quad t \in [0, 1].$$

Además, la solución es única en la región $|u - y_0(t)| \leq r_2$. ∎

4 Otras consecuencias

A continuación vamos a analizar algunas consecuencias del Teorema 2.1. En primer lugar vamos a suponer, en lugar de la existencia del operador Γ_0, que existe un operador cercano a Γ_0.

Teorema 4.1 *Supongamos que existe un operador $\Gamma \in \mathcal{L}(Y, X)$ con inverso continuo y que además se satisfacen las siguientes condiciones:*

(1) $\|\Gamma F(x_0)\| \leq a'$,

(2) $\|\Gamma F'(x_0) - I\| \leq c < 1$

(3) $\|\Gamma F''(x_0)\| \leq b'$

(4) $\|\Gamma \left[F''(x) - F''(x_0)\right]\| \leq k'\|x - x_0\|$, $x \in \Omega_0$.

En esta situación, si el polinomio

$$p'(t) = \frac{k'}{6}t^3 + \frac{b'}{2}t^2 - (1 - c)t + a' \tag{12}$$

tiene raíces positivas, $r_1' \leq r_2'$, y $r_1' \leq r_0$, entonces la ecuación (1) tiene una solución $x^* \in \overline{B(x_0, r_1')}$, y esta es única en $B(x_0, r_2')$ si $r_1' < r_2'$ o en $\overline{B(x_0, r_1')}$ si $r_1' = r_2'$.

Demostración. A partir de (3) y, teniendo en cuenta el Lema de Banach, se tiene que existe $U = [\Gamma F'(x_0)]^{-1}$ y además

$$\|U\| = \|[\Gamma F'(x_0)]^{-1}\| \leq \frac{1}{1-c}.$$

En consecuencia, existe $\Gamma_0 = F'(x_0)^{-1} = U\Gamma$. Además

$$\|\Gamma_0 F(x_0)\| = \|U\Gamma F(x_0)\| \leq \frac{a'}{1-c},$$

$$\|\Gamma_0 F''(x_0)\| = \|U\Gamma F''(x_0)\| \leq \frac{b'}{1-c},$$

y, para $x \in X$,

$$\|\Gamma_0[F''(x) - F''(x_0)]\| = \|U\Gamma[F''(x) - F''(x_0)]\| \leq \frac{k'}{1-c}\|x - x_0\|.$$

El resultado se sigue sin más que aplicar el Teorema 2.1 al polinomio

$$\frac{k'}{6(1-c)}t^3 + \frac{b'}{2(1-c)}t^2 - (1-c)t + \frac{a'}{1-c}$$

o, equivalentemente, al polinomio dado por (12). ∎

En ocasiones, podemos sustituir la ecuación $F(x) = 0$ por otra ecuación más sencilla y, que en cierta manera, aproxima a (1). Podemos suponer que (1) es de la forma

$$F(x) \equiv \Pi(x) + \mu R(x) = 0, \tag{13}$$

donde μ representa un operador de $\mathcal{L}(Y, X)$. En particular, μ puede ser un coeficiente numérico.

Sea x_0 una solución de la ecuación simplificada $\Pi(x) = 0$. Este punto x_0 puede ser un valor conveniente para la aproximación inicial de la solución de (13). Podemos enunciar así la siguiente consecuencia del Teorema 4.1:

Corolario 4.2 *Supongamos que*

(1) $\Pi(x_0) = 0$,

(2) *Existe* $\Gamma = \Pi'(x_0)^{-1}$ *y* $\|\Gamma\| \leq B$,

(3) $\|R(x_0)\| \leq \eta$, $\|R'(x_0)\| \leq \alpha$,

(4) $\|\Pi''(x_0)\| \leq \beta_1$, $\|R''(x_0)\| \leq \beta_2$,

(5) $\|\Pi''(x) - \Pi''(x_0)\| \leq \kappa_1\|x-y\|$, $\|R''(x) - R''(x_0)\| \leq \kappa_2\|x-x_0\|$, $x \in \Omega_0$.

Entonces, si $\|\mu\|B\alpha < 1$ *y el polinomio*

$$p(t) = \frac{B(\kappa_1 + \kappa_2\|\mu\|)}{6}t^3 + \frac{B(\beta_1 + \beta_2\|\mu\|)}{2}t^2 - (1 - \alpha B\|\mu\|)t + B\eta\|\mu\|$$

tiene raíces positivas $r_1'' \leq r_2''$, *la ecuación (13) tiene solución* $x^* \in \overline{B(x_0, r_1'')}$, *y esta solución es única en* $B(x_0, r_2'')$ *si* $r_1'' < r_2''$ *o en* $\overline{B(x_0, r_1'')}$ *si* $r_1'' = r_2''$.

Demostración. Se sigue inmediatamente sin más que tomar $\Gamma = \Pi'(x_0)^{-1}$ en el Teorema 4.1. ∎

Como aplicación, desarrollamos el caso de una ecuación integral

$$x(t) = \int_0^1 K(s,t,x(s))\,ds, \tag{14}$$

con $K(s,t,u)$ continua y con derivadas parciales continuas.

Para encontrar una aproximación inicial x_0 suficientemente próxima a la solución consideramos, en lugar del núcleo $K(s,t,u)$, un núcleo más sencillo de la forma

$$H(s,t,u) = \sum_{k=1}^{m} h_k(s,u)w_k(t)$$

donde $\{w_k\}_{k=1}^m$ es un sistema de funciones linealmente independientes. Encontrar la solución de una ecuación integral con este tipo de núcleos (llamados núcleos degenerados) es un problema sencillo (ver [8]). Así, se sabe que la solución de la ecuación integral

$$x(t) = \int_0^1 H(s,t,x(s))\,ds,$$

es de la forma

$$x_0(t) = \sum_{k=1}^{m} A_k w_k(t),$$

donde A_k, $k = 1, \ldots, m$, se obtienen como soluciones del sistema

$$A_j = \int_0^1 h_j(s, x_0(s))\, ds = \int_0^1 h_j\left(s, \sum_{k=1}^{m} A_k w_k(s)\right) ds, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Tomamos x_0 así obtenido como una aproximación inicial de (14). Encontrar una solución de (14) es equivalente a resolver

$$F(x) \equiv \Pi(x) + \mu R(x) = 0$$

con

$$\Pi(x)(t) = x(t) - \int_0^1 H(s, t, x(s))\, ds,$$

$$R(x)(t) = \int_0^1 [H(s, t, x(s)) - K(s, t, x(s))]\, ds,$$

$$\mu = 1.$$

Sin más que aplicar el Corolario 4.2, podemos obtener información sobre la existencia y unicidad de solución de (14). Ilustramos estos comentarios con el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3. Sea la ecuación integral

$$x(t) = 1 - \frac{7}{6}t + \int_0^1 st \operatorname{sen} x(s)\, ds, \quad 0 \le t \le 1, \quad x \in C[0, 1]. \tag{15}$$

En este caso $K(s, t, u) = st \operatorname{sen} u$. Tomamos como núcleo aproximado

$$H(s, t, u) = stu.$$

Elegimos como aproximación inicial de (15) la solución de la ecuación integral

$$x(t) = 1 - \frac{7}{6}t + \int_0^1 H(s, t, x(s))\, ds = 1 - \frac{7}{6}t + \int_0^1 stx(s)\, ds,$$

que se comprueba fácilmente es

$$x_0(t) = 1 - t, \quad 0 \le t \le 1.$$

Para hallar $\Pi'(x_0)^{-1}$, buscamos la solución de la ecuación integral

$$x(t) = f(t) + \int_0^1 H'(s, t, x_0(s))x(s)\, ds = f(t) + \int_0^1 stx(s)\, ds,$$

que es

$$x(t) = f(t) + \frac{3}{2}\int_0^1 stf(s)\,ds.$$

Así, $\Gamma_0 = \Pi'(x_0)^{-1}$ está definido de la siguiente manera:

$$\Gamma_0 y(t) = y(t) + \frac{3}{2}\int_0^1 stf(s)\,ds, \quad y \in C[0,1].$$

En esta situación, tenemos que

$$\|\Gamma_0\| \leq \frac{7}{4} \equiv B.$$

$$|R(x_0)(t)| = \left|\int_0^1 [H(s,t,x_0(s) - K(s,t,x_0(s))]\,ds\right|$$

$$\leq \int_0^1 st|1 - s - \operatorname{sen}(1-s)|\,ds \leq \int_0^1 \frac{s^4}{6}\,ds = \frac{1}{30},$$

luego

$$\|R(x_0)\| \leq \frac{1}{30} \equiv \eta.$$

$$|R'(x_0)(t)| = \left|\int_0^1 [H'_u(s,t,x_0(s) - K'_u(s,t,x_0(s))]\,ds\right|$$

$$\leq \int_0^1 st|1 - \cos(1-s)|\,ds \leq \frac{1}{2}\int_0^1 s(1-s)^2\,ds = \frac{1}{24},$$

por tanto,

$$\|R'(x_0)\| \leq \frac{1}{24} \equiv \alpha.$$

Con la notación del Corolario 4.2, es inmediato comprobar que $\beta_1 = \kappa_1 = 0$. Además,

$$|R''(x_0)(t)| = \left|\int_0^1 [H''_{u^2}(s,t,x_0(s) - K''_{u^2}(s,t,x_0(s))]\,ds\right|$$

$$= \int_0^1 st\operatorname{sen}(1-s)\,ds \leq \int_0^1 s(1-s)\,ds = \frac{1}{6},$$

y así, $\beta_2 = 1/6$. Por último, sin más que aplicar el Teorema del valor medio, se deduce que $\kappa_2 = 1/2$.

Por otra parte, si acotamos $R''(u)$ en un punto cualquiera (condición de Kantorovich) obtenemos

$$|R''(u)(t)| = \left| \int_0^1 st \operatorname{sen} u(s)\, ds \right| \leq \frac{1}{2} \equiv M.$$

La información acerca de la existencia y unicidad de la ecuación integral (15) la obtenemos analizando las raíces de los polinomios que aparecen en (4) y en (6), que en este caso particular son

$$p(t) = \frac{7}{48}\left(t^3 + t^2 - \frac{89}{14}t + \frac{2}{5}\right),$$

$$q(t) = \frac{7}{48}\left(3t^2 - \frac{89}{14}t + \frac{2}{5}\right).$$

Las raíces positivas de p son $r_1 = 0.0636$ y $r_2 = 2.0318$. Las raíces de q son $\widehat{r}_1 = 0.0645$ y $\widehat{r}_2 = 2.0541$. Como se puede ver estamos en la situación del caso 2, y podemos asegurar que (15) tiene una solución $x^* \in C[0,1]$ verificando

$$|x^*(t) - x_0(t)| \leq r_1, \quad t \in [0,1].$$

Además esta solución es única en la región

$$|u - x_0(t)| \leq \widehat{r}_2, \quad t \in [0,1].$$

Referencias

[1] Argyros, I.K., Newton-like methods under mild differentiability conditions with error analysis, *Bull. Austr. Math. Soc.*, **37**, (1988), 131–147.

[2] Braun, M., "Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones", Grupo Editorial Iberoamérica, 1985.

[3] Gutiérrez, J.M., Hernández, M.A. and Salanova, M.A., Accesibility of solutions by Newton's method, *Inter. J. Computer Math.*, **57**, (1995), 239-247.

[4] Gutiérrez, J.M., Newton's method under strong-type Kantorovich conditions, Pub. Sem. G. Galdeano, Serie II, Sección 1, n^o 7, Univ. Zaragoza, 1995.

[5] Huang, Z., A note onr the Kantorovich theorem for Newton iteration, *J. Comput. Appl. Math.*, **47**, (1993), 211–217.

[6] Kantorovich, L.V. and Akilov, G.P., "Functional Analysis", Pergamon Press, 1982.

[7] Ostrowski, A.M., "Solution of Equations in Euclidean and Banach Spaces", Academic Press, 1943.

[8] Porter, D. y Stirling, D.S.G., "Integral equations, a practical treatment, from spectral theory to applications", Cambridge, 1990.

[9] Rall, L.B., "Computational Solution of Nonlinear Operator Equations", Robert E. Krieger Publishing Company, Inc., 1979.

[10] Rheinboldt, W.C., A Unified Convergence Theory for a Class of Iterative Process, *SIAM J. Numer. Anal.,* **5**, (1968), 42–63.

[11] Rockne, J., Newton's method under mild differentiability conditions with error analysis, *Numer. Math.,* **18**, (1972), 401–412.

[12] Simmons, F., "Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas", McGraw-Hill, 1977.

[13] Yamamoto, T., A convergence theorem for Newton-like methods in Banach Spaces, *Numer. Math.,* **51**, (1987), 545–557.

[14] Yamamoto, T., On the Method of Tangent Hyperbolas in Banach Spaces, *J. Comput. Appl. Math.,* **21**, (1988), 75–86.