Regularidad L^2 del Problema de Stokes Con Condiciones de Contorno de Tipo Neumann

M. González Burgos*

Resumen

En este trabajo consideramos el problema de la regularidad L^2 del problema estacionario de Stokes cuando imponemos condiciones de contorno de tipo Neumann sobre una parte de la frontera del dominio. Para obtener la demostración del resultado de regularidad, nos basamos en estimaciones uniformes de los cocientes en diferencias de la solución del problema junto con una formulación mixta del problema de Stokes. Como consecuencia de la regularidad L^2 obtenemos un resultado de regularidad para la solución débil del problema de evolución de Stokes con condiciones de contorno de tipo Neumann.

1 Introducción. Planteamiento del problema

En lo que sigue, supondremos que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un abierto acotado múltiplemente conexo ($N = 2$ o 3), con frontera $\partial\Omega$ de clase $C^{0,1}$. Denotamos por γ una componente conexa de $\partial\Omega$ de tal forma que $\partial\Omega \setminus \gamma$ tenga medida superficial positiva. El problema de Stokes con condiciones de contorno de tipo Neumann en un trozo de frontera surge de forma natural cuando se plantea el estudio de la controlabilidad aproximada para las ecuaciones de Stokes o Navier-Stokes cuando el control se ejerce a través de la condición de contorno Dirichlet sobre la frontera γ (cf. [**?**]):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} + (\mathbf{y}\cdot\nabla)\mathbf{y} - \nu\Delta\mathbf{y} + \nabla\pi = 0, \quad \nabla\cdot\mathbf{y} = 0 \quad \text{en} \quad \Omega\times(0,T), \\ \mathbf{y} = \mathbf{v} \quad \text{sobre} \quad \Lambda_T = \gamma\times(0,T), \quad \mathbf{y} = 0 \quad \text{sobre} \quad S_T = (\partial\Omega\setminus\gamma)\times(0,T), \\ \mathbf{y}|_{t=0} = 0 \quad \text{en} \quad \Omega. \end{cases}$$

Aquí, $T > 0$ es un instante final de tiempo y $\nu > 0$ es el coeficiente de viscosidad cinemática.

Consideramos el problema,

$$-\nu\Delta\mathbf{y} + \nabla\pi = \mathbf{f}, \quad \nabla\cdot\mathbf{y} = g \quad \text{en } \Omega, \tag{1}$$

$$(-\pi\,\mathbf{Id} + \nu\nabla\mathbf{y})\cdot\mathbf{n} = \mathbf{b} \quad \text{sobre } \gamma, \tag{2}$$

$$\mathbf{y} = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega\setminus\gamma, \tag{3}$$

*Dpto. de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico, Universidad de Sevilla, Tarfia s/n, 41012 Sevilla.

donde $\mathbf{f}$, g y $\mathbf{b}$ están dadas y donde $\mathbf{Id}$ representa la matriz unidad de orden N y $\mathbf{n}$ denota el vector unitario normal a $\partial\Omega$ y exterior a Ω.

Para el problema (**??**)–(**??**) probaremos un resultado de existencia y unicidad cuando los datos verifican: $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^N$, $g \in L^2(\Omega)$ y $\mathbf{b} \in H^{-1/2}(\gamma)^N$. También veremos que la regularidad de la solución $(\mathbf{y}, \pi)$ aumenta cuando aumenta la regularidad de los datos $\partial\Omega$, $\mathbf{f}$, g y $\mathbf{b}$. Los resultados que presentamos están obtenidos de [**?**] (ver también [**?**, **?**] y las referencias allí citadas para otros resultados relacionados).

Antes de estudiar la existencia y unicidad de solución débil de (**??**)–(**??**), así como la regularidad L^2 de la solución débil, veamos algunas definiciones y resultados previos que nos serán necesarios.

2 Resultados Previos

Comenzamos recordando cómo puede ser descrita la frontera $\partial\Omega$ de un dominio Ω de $\mathbb{R}^N$. La siguiente definición es debida a Nečas (cf. [**?**]):

Definición 1 *Sea $k \in \mathbb{N}$ y $\lambda \in (0, 1]$. Se dice que un abierto acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es de clase $C^{k,\lambda}$ si existen:*

1. *m sistemas de coordenadas cartesianas X_r ($m \in \mathbb{N}$, $1 \leq r \leq m$)*

$$X_r = (x_{r,1}, x_{r,2}, ..., x_{r,N-1}, x_{r,N}) = (x'_r, x_{r,N})$$

2. *Un número $\alpha > 0$ y m funciones*

$$a_r \in C^{k,\lambda}(\bar{\Delta}_r), \quad 1 \leq r \leq m,$$

donde $\Delta_r = \{x'_r \,;\, x'_r \in \mathbb{R}^{N-1}, \quad |x_{r,i}| < \alpha \quad \forall i : 1 \leq i \leq N-1\}$.

3. *Un número $\beta > 0$ tal que*

   (a) *los conjuntos*

$$\Lambda_r = A_r^{-1}(\{(x'_r, x_{r,N}) \,;\, x'_r \in \Delta_r \quad x_{r,N} = a_r(x'_r)\})$$

   son subconjuntos de $\partial\Omega$ (para $1 \leq r \leq m$) y $\partial\Omega = \bigcup_{r=1}^m \Lambda_r$; (aquí las $A_r : X \longrightarrow X_r$, son las transformaciones de coordenadas),

   (b) *para cada $1 \leq r \leq m$ el correspondiente*

$$U_r^+ = A_r^{-1}(\{(x'_r, x_{r,N}) \,;\, x'_r \in \Delta_r \,, \quad a_r(x'_r) < x_{r,N} < a_r(x'_r) + \beta\})$$

   está contenido en Ω,

   (c) *para cada $r = 1, ..., m$, el correspondiente*

$$U_r^- = A_r^{-1}(\{(x'_r, x_{r,N}) \,;\, x'_r \in \Delta_r \,, \quad a_r(x'_r) - \beta < x_{r,N} < a_r(x'_r)\})$$

   está contenido en $\bar{\Omega}^c$.

En tal caso, escribiremos $\Omega \in C^{k,\lambda}$.

■

Hay que hacer notar que $U_r = U_r^+ \cup \Lambda_r \cup U_r^-$ es un abierto de $\mathbb{R}^N$. Es fácil probar que existe un abierto U_0 tal que $U_0 \subset \bar{U}_0 \subset \Omega$ y $\{U_r\}_{r=0}^m$ es un recubrimiento abierto de $\bar{\Omega}$, mientras que $\{U_r\}_{r=1}^m$ lo es de $\partial\Omega$.

Definición 2 *Para* $1 \leq r \leq m$, *pondremos*

$$Q_r(x_r', \xi) = (x_r', a_r(x_r') + \xi) \qquad \forall (x_r', \xi) \in \bar{\Delta}_r \times [-\beta, \beta].$$

■

Está claro que $A_r^{-1} \circ Q_r$ aplica de forma biyectiva $\Delta_r \times (-\beta, \beta)$ sobre U_r, $\Delta_r \times (0, \beta)$ sobre U_r^+, $\Delta_r \times [0, \beta)$ sobre $\Lambda_r \cup U_r^+$ y $\Delta_r \times \{0\}$ sobre Λ_r.

Introduciremos a continuación algunos espacios de divergencia nula que serán fundamentales para el tratamiento de las ecuaciones de Stokes y Navier-Stokes con condiciones de contorno de Neumann sobre un trozo de frontera. Con las hipótesis hechas sobre Ω, $\partial\Omega$ y γ, pongamos

$$\widetilde{\mathcal{V}}(\Omega) = \{\mathbf{v}\,;\, \mathbf{v} \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})^N, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \text{Sop } \mathbf{v} \subset \Omega \cup \gamma\},$$

$$\widetilde{V}(\Omega) = \overline{\widetilde{\mathcal{V}}(\Omega)}^{H^1(\Omega)^N} \quad \text{y} \quad \widetilde{H}(\Omega) = \overline{\widetilde{\mathcal{V}}(\Omega)}^{L^2(\Omega)^N}.$$

Por definición $\widetilde{V}(\Omega)$ y $\widetilde{H}(\Omega)$ son espacios de Hilbert para los productos habituales de $H^1(\Omega)^N$ y $L^2(\Omega)^N$, respectivamente; además, en el caso de $\widetilde{V}(\Omega)$, al tener $\partial\Omega \setminus \gamma$ medida superficial estrictamente positiva, la seminorma del gradiente $|\cdot|_{H_0^1}$ es una norma en $\widetilde{V}(\Omega)$ equivalente a la usual (cf. [**?**]).

Se tiene la siguiente caracterización de $\widetilde{V}(\Omega)$ y $\widetilde{H}(\Omega)$:

Teorema 3 *Se tiene:*

$$\widetilde{H}(\Omega) = \{\mathbf{v}\,;\, \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^N, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \textit{en } \Omega, \quad \gamma_n \mathbf{v} = 0 \quad \textit{sobre } \partial\Omega \setminus \gamma\}$$

y

$$\widetilde{V}(\Omega) = \{\mathbf{v}\,;\, \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^N, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \textit{en } \Omega, \quad \mathbf{v} = 0 \quad \textit{sobre } \partial\Omega \setminus \gamma\}.$$

■

Pasamos seguidamente a definir y a enunciar varios resultados relativos a los cocientes en diferencias. Para la demostración de estos resultados puede verse [**?**]:

Definición 4 *Sea* φ *una función definida en un dominio* Ω *de* $\mathbb{R}^N$. *Dados* $h > 0$ *y* $x \in \Omega$, *tales que* $x + h\mathbf{e}_i \in \Omega$, *se define el cociente de diferencias* $\delta_i^h \varphi$ *como sigue:*

$$\delta_i^h \varphi(x) = \frac{\varphi(x + h\mathbf{e}_i) - \varphi(x)}{h}.$$

■

Lema 5 *Sea $\varphi \in W^{1,r}(\Omega)$, $1 \leq r \leq \infty$ y sea $\Omega' \subset \Omega$ un abierto tal que existe $h_0 > 0$ verificando $\Omega' + h_0\mathbf{e}_i \subset \Omega$. Entonces, para cada $h < h_0$ se tiene que*

$$\delta_i^h \varphi \in L^r(\Omega') \quad y \quad \|\delta_i^h \varphi\|_{L^r(\Omega')} \leq \|D_i \varphi\|_{L^r(\Omega)}\,.$$

■

Lema 6 *Sea $\varphi \in L^r(\Omega)$ $(1 < r < \infty)$ y supongamos que existe una constante $R > 0$ tal que $\delta_i^h \varphi \in L^r(\Omega')$ y $\|\delta_i^h \varphi\|_{L^r(\Omega')} \leq R$ para cada $h < h_0$ y cada Ω' tal que $\Omega' + h_0\mathbf{e}_i \subset \Omega$. Entonces*

$$D_i \varphi \in L^r(\Omega) \quad y \quad \|D_i \varphi\|_{L^r(\Omega)} \leq R.$$

■

Pasamos seguidamente a estudiar los cocientes incrementales $\delta_i^h \varphi$, correspondientes a una función $\varphi \in H^{1/2}(\Delta)$, donde Δ es un abierto acotado de $\mathbb{R}^N$ con frontera $C^{0,1}$. Consideraremos la función ρ_Δ, dada por $\rho_\Delta(x) = d(x, \partial\Delta)$. La regularidad de Δ implica $\rho_\Delta \in W^{1,\infty}(\Delta)$. Utilizando la función ρ_Δ, introducimos el espacio (cf. [**?**])

$$H_{00}^{1/2}(\Delta) = \{u\,;\, u \in H^{1/2}(\Delta),\ \rho_\Delta^{-1/2} u \in L^2(\Delta)\},$$

que posee estructura de espacio de Hilbert para la norma

$$\|u\|_{H_{00}^{1/2}(\Delta)} = (\|u\|^2_{H^{1/2}(\Delta)} + \|\rho_\Delta^{-1/2} u\|^2_{L^2(\Delta)})^{1/2}.$$

El espacio $H_{00}^{1/2}(\Delta)$ está estrictamente contenido en $H^{1/2}(\Delta)$; además, $\mathcal{D}(\Delta)$ es denso en $H_{00}^{1/2}(\Delta)$ y se tiene la siguiente caracterización de $H_{00}^{1/2}(\Delta)'$ (cf. [**?**]):

$$H_{00}^{1/2}(\Delta)' = \{f\,;\ \ f = f_0 + \rho^{-1/2} f_1\,,\ f_0 \in H^{-1/2}(\Delta),\ f_1 \in L^2(\Delta)\}. \tag{4}$$

La importancia de $H_{00}^{1/2}(\Delta)$ y, sobre todo, de la igualdad (**??**), queda patente una vez que se tiene en cuenta el resultado que sigue:

Proposición 7 *El operador diferencial $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ actúa como sigue:*

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathcal{L}(H^s(\Delta); H^{s-1}(\Delta)) \quad \textit{para } s \geq 0, \quad s \neq 1/2,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathcal{L}(H^{1/2}(\Delta); H_{00}^{1/2}(\Delta)').$$

■

Las propiedades de $H_{00}^{1/2}(\Delta)$ que preceden nos permiten generalizar el Lema **??** al caso en que se consideran funciones de $H^{1/2}(\Delta)$:

Lema 8 *Sea $\varphi \in H^{1/2}(\Delta)$ y sea $\Delta' \subset \Delta$ un abierto tal que existe $h_0 > 0$ verificando $\Delta' + h_0\mathbf{e}_i \subset \Delta$. Entonces, para cada $h < h_0$, se tiene que*

$$\delta_i^h \varphi \in H_{00}^{1/2}(\Delta')' \quad y \quad \|\delta_i^h \varphi\|_{H_{00}^{1/2}(\Delta')'} \leq \|D_i \varphi\|_{H_{00}^{1/2}(\Delta)'}$$

Demostración: Razonemos en primer lugar para una función φ de $\mathcal{D}(\Delta)$. Podemos escribir que

$$\delta_i^h \varphi(x) = \frac{\varphi(x + h\mathbf{e}_i) - \varphi(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_0^h D_i \varphi(x + \sigma \mathbf{e}_i)\, d\sigma.$$

Sea $\psi \in \mathcal{D}(\Delta')$. Prolongando ψ por cero fuera de Δ' e introduciendo la nueva variable $\xi = x + \sigma \mathbf{e}_i$ en la integral precedente, resulta que[1]

$$\langle \delta_i^h \varphi, \psi \rangle = \frac{1}{h} \int_0^h \langle D_i \psi, \tau_i^{-\sigma} \psi \rangle\, d\sigma.$$

Si tomamos valores absolutos, podemos acotar el producto de dualidad como sigue:

$$|\langle \delta_i^h \varphi, \psi \rangle| \leq \frac{1}{h} \int_0^h \|D_i \varphi\|_{H_{00}^{1/2}(\Delta)'} \|\tau_i^{-\sigma} \psi\|_{H_{00}^{1/2}(\Delta)}\, d\sigma. \tag{5}$$

Veamos a continuación qué ocurre con la norma de $\tau_i^{-\sigma}\psi$ en $H_{00}^{1/2}(\Delta)$. Por definición,

$$\|\tau_i^{-\sigma} \psi\|_{H_{00}^{1/2}(\Delta)} = (\|\tau_i^{-\sigma} \psi\|_{H^{1/2}(\Delta)}^2 + \|\rho_\Delta^{-1/2} \tau_i^{-\sigma} \psi\|_{L^2(\Delta)}^2)^{1/2}.$$

Realizando el cambio de variable $x = \xi - \sigma \mathbf{e}_i$, obtenemos:

$$\|\tau_i^{-\sigma} \psi\|_{H^{1/2}(\Delta)} = \|\psi\|_{H^{1/2}(\Delta')} \tag{6}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \|\rho_\Delta^{-1/2} \tau_i^{-\sigma} \psi\|_{L^2(\Delta)}^2 &= \int_\Delta \frac{|\psi(x - \sigma \mathbf{e}_i)|^2}{\rho_\Delta(x)}\, dx = \int_{\Delta'} \frac{|\psi(x)|^2}{d(x + \sigma \mathbf{e}_i, \partial\Delta)}\, dx \\ &\leq \int_{\Delta'} \frac{|\psi(x)|^2}{d(x, \partial\Delta')}\, dx, \end{aligned}$$

puesto que, por hipótesis, $\Delta' + \sigma \mathbf{e}_i \subset \Delta$ para $0 < \sigma < h < h_0$. Esta acotación, junto con (**??**), nos dice que

$$\|\tau_i^{-\sigma} \psi\|_{H_{00}^{1/2}(\Delta)} \leq \|\psi\|_{H_{00}^{1/2}(\Delta')}$$

Volviendo a (**??**), deducimos ahora que

$$|\langle \delta_i^h \varphi, \psi \rangle| \leq \|D_i \varphi\|_{H_{00}^{1/2}(\Delta)'} \|\psi\|_{H_{00}^{1/2}(\Delta')}$$

de donde

$$\|\delta_i^h \varphi\|_{H_{00}^{1/2}(\Delta')'} \leq \|D_i \varphi\|_{H_{00}^{1/2}(\Delta)'}$$

Dado que φ es arbitraria en $\mathcal{D}(\Delta)$, $\mathcal{D}(\Delta)$ es denso en $H^{1/2}(\Delta)$ y

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathcal{L}(H^{1/2}(\Delta); H_{00}^{1/2}(\Delta)'),$$

el argumento precedente prueba el Lema.

■

[1] Los productos de dualidad que aparecen en esta Demostración corresponden a $H_{00}^{1/2}(\Delta')'$ y $H_{00}^{1/2}(\Delta')$.

3 Existencia y Unicidad de Solución Débil

Pasamos seguidamente a estudiar el problema de existencia y unicidad de solución débil del problema (**??**)–(**??**). Se tiene:

Teorema 9 *Dadas* $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^N$, $g \in L^2(\Omega)$, $\mathbf{b} \in H^{-1/2}(\gamma)^N$, *existe un único par* $(\mathbf{y}, \pi)$ *de* $H^1(\Omega)^N \times L^2(\Omega)$ *solución de (1)–(3) de tal forma que (**??**) se verifica en el sentido de* $L^2(\Omega)$ *(y por tanto casi por doquier), (**??**) en el sentido de* $H^{-1/2}(\gamma)^N$ *y (**??**) en el sentido de las trazas sobre* $\partial\Omega \setminus \gamma$. *Además, existe una constante* $C > 0$, *que sólo depende de* Ω *y* γ, *tal que*

$$\|\mathbf{y}\|_{H^1} + \|\pi\|_{L^2} \leq C\left(\|\mathbf{f}\|_{L^2} + \|g\|_{L^2} + \|\mathbf{b}\|_{H^{-1/2}}\right). \tag{7}$$

■

Demostración: Para la demostración del teorema utilizamos el marco de la formulación variacional mixta desarrollado en [**?**]. Consideramos los espacios

$$X = \{\mathbf{v}\,;\, \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^N,\ \mathbf{v} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \setminus \gamma\} \quad \text{y} \quad M = L^2(\Omega),$$

y las formas lineales y bilineales (con γ_0 la aplicación traza),

$$a(\mathbf{y}, \mathbf{v}) \equiv \nu \int_\Omega \nabla\mathbf{y} : \nabla\mathbf{v}\, dx \qquad \forall \mathbf{y}, \mathbf{v} \in X,$$

$$\beta(\mathbf{y}, p) \equiv -\int_\Omega p\,(\nabla \cdot \mathbf{y})\, dx \qquad \forall \mathbf{y} \in X,\ \forall p \in M,$$

$$\langle L, \mathbf{v}\rangle \equiv \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}\, dx + \langle \mathbf{b}, \gamma_0\mathbf{v}\rangle_{H^{-1/2}, H^{1/2}} \qquad \forall \mathbf{v} \in X,$$

$$\langle \chi, p\rangle \equiv -\int_\Omega gp\, dx \qquad \forall p \in M.$$

Planteamos el problema mixto

$$\text{Hallar } (\mathbf{y}, \pi) \in X \times M \text{ tal que}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcll} a(\mathbf{y}, \mathbf{v}) + \beta(\mathbf{v}, \pi) & = & \langle L, \mathbf{v}\rangle & \forall \mathbf{v} \in X, \\ \beta(\mathbf{y}, p) & = & \langle \chi, p\rangle & \forall p \in M. \end{array} \right. \tag{8}$$

Para demostrar la existencia y unicidad de solución de (**??**), bastará comprobar que la forma bilineal $\beta(\cdot,\cdot)$ verifica la condición "inf-sup" en el espacio $X \times M$:

$$\inf_{p \in M\setminus\{0\}} \sup_{v \in X\setminus\{0\}} \frac{\beta(v, p)}{\|v\|_X \|p\|_M} \geq \beta_0 \tag{9}$$

con β_0 una constante positiva. Admitamos por el momento el siguiente Lema:

Lema 10 *En las condiciones precedentes, existe* $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(L^2(\Omega); X)$ *tal que, si* $\mathbf{v} = \mathcal{A}p$, *entonces* $\nabla \cdot \mathbf{v} = p$ *en* Ω.

■

Utilizando este resultado, es ya muy fácil probar que $\beta(\cdot,\cdot)$ verifica (**??**). En efecto, sea $p \in L^2(\Omega) \setminus \{0\}$ y sea $\mathbf{z} = -\mathcal{A}p$, se tiene

$$\mathbf{z} \in X, \quad \nabla \cdot \mathbf{z} = -p, \qquad \|\mathbf{z}\|_{H^1} \leq C \, \|p\|_{L^2}$$

(donde C sólo depende de Ω). Para esta elección de $\mathbf{z}$, observamos que

$$\frac{\beta(\mathbf{z}, p)}{\|\mathbf{z}\|_{H^1} \|p\|_{L^2}} \geq \frac{1}{C}$$

y, de aquí, obtenemos la condición "inf-sup" con $\beta_0 = 1/C$. En consecuencia, existe un único par $(\mathbf{y}, \pi)$ en $X \times M$ solución de (**??**).

■

Para demostrar el Lema **??**, sólo hay que tener en cuenta que el operador divergencia $\nabla\cdot$ es un isomorfismo entre $V^\perp$ y $L^2_0(\Omega)$, (cf. [**?**]), siendo

$$V = \{\mathbf{v} \in H^1_0(\Omega)^N \, ; \, \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ en } \Omega\} \quad \text{y} \quad L^2_0(\Omega) = \{p \in L^2(\Omega) \, ; \, \int_\Omega p \, dx = 0\}.$$

■

4 Regularidad L^2

En este apartado seguimos manteniendo las hipótesis sobre el abierto Ω. Probaremos el

Teorema 11 *Sea $m \geq 0$ un entero. Si Ω es de clase $W^{m+2,\infty}$, $\mathbf{f} \in H^m(\Omega)^N$, $g \in H^{m+1}(\Omega)$ y $\mathbf{b} \in H^{m+1/2}(\gamma)^N$, entonces existe un único par*

$$(\mathbf{y}, \pi) \in H^{m+2}(\Omega)^N \times H^{m+1}(\Omega)$$

solución de (1)–(3). Además, existe una constante $C > 0$, que únicamente depende de Ω, γ y m, tal que

$$\|\mathbf{y}\|_{H^{m+2}} + \|\pi\|_{H^{m+1}} \leq C \, (\|\mathbf{f}\|_{H^m} + \|g\|_{H^{m+1}} + \|\mathbf{b}\|_{H^{m+1/2}}).$$

■

Probaremos este resultado para $m = 0$. Para otros valores de m, basta razonar por inducción como en [**?**] y [**?**]. Recordaremos en primer lugar el resultado siguiente, relativo a la regularidad en el interior de Ω (cf. [**?**]):

Teorema 12 *Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^N$ y sea $(\mathbf{y}, \pi) \in H^1(\Omega)^N \times L^2(\Omega)$ solución de*

$$-\nu \Delta \mathbf{y} + \nabla \pi = \mathbf{f}, \quad \nabla \cdot \mathbf{y} = g \quad \text{en } \Omega.$$

Si $\mathbf{f} \in H^m(\Omega)^N$ y $g \in H^{m+1}(\Omega)$ con $m \geq 0$, entonces

$$(\mathbf{y}, \pi) \in H^{m+2}_{\text{loc}}(\Omega)^N \times H^{m+1}_{\text{loc}}(\Omega).$$

Además, cualquiera que sea el abierto $\Omega' \subset\subset \Omega$, existe $C > 0$, que sólo depende de Ω, Ω' y m, tal que

$$\|\mathbf{y}\|_{H^{m+2}(\Omega')^N} + \|\pi\|_{H^{m+1}(\Omega')} \leq C \, (\|\mathbf{f}\|_{H^m} + \|g\|_{H^{m+1}}).$$

■

Pasaremos a continuación a estudiar la regularidad L^2 hasta la frontera. Se tiene,

Teorema 13 *Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^N$ tal que $\Omega \in W^{2,\infty}$. Sea $(\mathbf{y}, \pi) \in H^1(\Omega)^N \times L^2(\Omega)$ solución de (1)–(3). Si $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^N$, $g \in H^1(\Omega)$ y $\mathbf{b} \in H^{1/2}(\gamma)^N$, entonces para cada x_0 de $\partial\Omega$ existe un entorno U de x_0 de forma que*

$$(\mathbf{y}, \pi) \in H^2(U^* \cap \Omega)^N \times H^1(U^* \cap \Omega),$$

cualquiera que sea el abierto $U^* \subset\subset U$. Además, existe $C > 0$, que sólo depende de Ω, U y U^*, tal que

$$\|\mathbf{y}\|_{H^2(U^*\cap\Omega)^N} + \|\pi\|_{H^1(U^*\cap\Omega)} \leq C\,(\|\mathbf{f}\|_{L^2} + \|g\|_{H^1} + \|\mathbf{b}\|_{H^{1/2}}).$$

Demostración: Nos centraremos en el caso en que el punto $x_0 \in \gamma$, puesto que el caso $x_0 \in \partial\Omega\backslash\gamma$ (i.e. condiciones de contorno de tipo Dirichlet) ha sido estudiado por J.A. Bello en [**?**]. Fijado x_0, consideremos el entorno $U = U_{r_0}$ de x_0 dado por la Definición **??** (donde naturalmente las $a_r \in W^{2,\infty}(\Delta_r)$); consideremos también la aplicación

$$\psi = A_{r_0}^{-1} \circ Q_{r_0}$$

(cf. Definición **??**), que es un difeomorfismo de

$$C = \Delta_{r_0} \times (-\beta, \beta) = \{(\xi', \xi_N)\,;\, \xi' \in \mathbb{R}^{N-1},\ |\xi_i| < \alpha\ \forall i : 1 \leq i \leq N-1,\ |\xi_N| < \beta\}$$

en U. Por supuesto, ψ es un difeomorfismo de clase $W^{2,\infty}$, al igual que ψ^{-1}. Haremos la Demostración en varias etapas.

Etapa 1.- Fijado $U^* \subset\subset U$, elegimos $\alpha' < \alpha$ y $\beta' < \beta$ de tal forma que el conjunto

$$C' = \{\xi\,;\, \xi \in \mathbb{R}^N,\ |\xi_i| < \alpha'\ \forall i : 1 \leq i \leq N-1,\ |\xi_N| < \beta'\}$$

verifique $\psi^{-1}(U^*) \subset C'$. Sea $U' = \psi(C')$ y sea $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ tal que $0 \leq \varphi \leq 1$ en U y $\varphi \equiv 1$ en U'. Definimos las funciones $\mathbf{z} = \varphi\mathbf{y}$ y $q = \varphi\pi$. Se tiene entonces que

$$(\mathbf{z}, q) \in H^1(U \cap \Omega)^N \times L^2(U \cap \Omega), \quad \text{Sop}\ \mathbf{z},\ \text{Sop}\ q \subset U \cap \bar{\Omega}, \quad \mathbf{z} = \mathbf{y},\ q = \pi \text{ en } U',$$

$$\left\{\begin{array}{cl} -\nu\Delta\mathbf{z} + \nabla q = \mathbf{f}^*,\ \nabla\cdot\mathbf{z} = g^* & \text{en } U \cap \Omega, \\ (-q\,\mathbf{Id} + \nu\nabla\mathbf{z})\cdot\mathbf{n} = \mathbf{b}^* & \text{sobre } U \cap \gamma, \\ \mathbf{z} = 0 & \text{sobre } \partial U \cap \Omega, \end{array}\right. \tag{10}$$

donde $\mathbf{f}^*$, g^* y $\mathbf{b}^*$ tienen la misma regularidad que $\mathbf{f}$, g y $\mathbf{b}$. Si introducimos el cambio de variable $x = \psi(\xi)$, para $\widetilde{\mathbf{z}} = \mathbf{z} \circ \psi$, $\widetilde{q} = q \circ \psi$, el problema (**??**) se puede escribir como:

$$(\widetilde{\mathbf{z}}, \widetilde{q}) \in H^1(C^+)^N \times L^2(C^+), \quad \text{Sop}\ \widetilde{\mathbf{z}},\ \text{Sop}\ \widetilde{q} \subset C \cap \bar{\mathbb{R}}^N_+$$

$$\begin{aligned} \nu \sum_{i,j=1}^N \int_{C^+} a_{ij} D_i\widetilde{\mathbf{z}} \cdot D_j\widetilde{\mathbf{v}}\, d\xi - \sum_{i,j=1}^N \int_{C^+} \widetilde{q}\, e_{ij}\, D_j\widetilde{v}_i\, d\xi \\ = \sum_{i,j=1}^N \int_{C^+} \widetilde{\mathbf{f}}^* \cdot \widetilde{\mathbf{v}}\, d\xi + \int_{\Delta_{r_0}} \widetilde{\mathbf{b}}^*(\xi', 0) \cdot \widetilde{\mathbf{v}}(\xi', 0)\, d\xi', \quad \forall \widetilde{\mathbf{v}} \in \widetilde{X}, \\ \sum_{i,j=1}^N e_{ij} D_j \widetilde{z}_i = \widetilde{g}^* \quad \text{en } C^+. \end{aligned}$$

donde,

1. $C^+ = \Delta_{r_0} \cap (0, \beta)$,
2. $\widetilde{\mathbf{f}}^* \equiv \mathbf{f}^* \circ \psi \in L^2(C^+)^N$, $\widetilde{g}^* \equiv g^* \circ \psi \in H^1(C^+)$ y

$$\widetilde{\mathbf{b}}^* = \mathbf{b}^* \circ \psi(\xi', 0) \left[1 + \sum_{i=1}^{N-1} \left(\frac{\partial a_{r_0}}{\partial \xi_i} \right)^2 \right]^{1/2}$$

   es una función de $H^{1/2}(\Delta_{r_0})^N$,
3. $\widetilde{X} = \{\widetilde{\mathbf{v}}\,;\, \widetilde{\mathbf{v}} \in H^1(C^+)^N,\ \widetilde{\mathbf{v}} = 0 \text{ sobre } \partial C^+ \cap \mathbb{R}^N_+\}$.
4. Los coeficientes a_{ij} y e_{ij} vienen dados por las fórmulas

$$a_{ij}(\xi) = \sum_{k=1}^{N} e_{ki}(\xi) e_{kj}(\xi) \quad \text{y} \quad e_{ij}(\xi) = ((D_i \psi_j^{-1}) \circ \psi)(\xi)$$

   para $1 \leq i, j \leq N$.

Introduciendo las matrices $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq N}$, $E = (e_{ij})_{1 \leq i,j \leq N}$ y $E' = (e'_{ij})_{1 \leq i,j \leq N}$, donde $e'_{ij}(\xi) = (D_i \psi_j)(\xi)$, se observa que

1. $A = E^T E$ y $EE' = \mathbf{Id}$.
2. Las componentes de A, E y E' están en $W^{1,\infty}(C)$. En lo que sigue, K es una cota superior de las normas en $W^{1,\infty}(C)$ de todas ellas.
3. La matriz A es simétrica y uniformemente definida positiva: Existen dos constantes $\lambda, \Lambda > 0$ tales que el espectro de $A(\xi)$ está contenido en el intervalo $[\lambda, \Lambda]$, cualquiera que sea $\xi \in C$.
4. Las constantes K, λ y Λ dependen de ψ y, por tanto, de Ω.

Etapa 2.- Sean $\alpha_2 \in (\alpha', \alpha)$ y $\beta_2 \in (\beta', \beta)$ tales que el correspondiente

$$C_2 = \{\xi\,;\, \xi \in \mathbb{R}^N,\ |\xi_i| < \alpha_2 \quad \forall i : 1 \leq i \leq N-1,\ |\xi_N| < \beta_2\}$$

verifica Sop $\widetilde{\mathbf{z}}, \widetilde{q} \subset C_2 \cap \bar{\mathbb{R}}^N_+$. Sea $d = \min(\alpha - \alpha_2, \beta - \beta_2)$ y sean

$$\alpha_3 = \frac{\alpha + \alpha_2}{2},\ \alpha_4 = \frac{\alpha + \alpha_3}{2},\ \beta_3 = \frac{\beta + \beta_2}{2},\ \beta_4 = \frac{\beta + \beta_3}{2}$$

Consideramos los conjuntos C_3 y C_4 definidos como C_2 cambiando (α_2, β_2) por (α_3, β_3) y (α_4, β_4), respectivamente. Entonces

$$C' \subset\subset C_2 \subset\subset C_3 \subset\subset C_4.$$

Sean $C_3^+ = C_3 \cap \mathbb{R}^N_+$, $\tilde{\mathbf{v}} \in H^1(C_3^+)^N$ tal que $\tilde{\mathbf{v}} = 0$ sobre $\partial C_3 \cap \mathbb{R}^N_+$ y h tal que $|h| < d/4$. Por la forma de elegir los conjuntos C_2, C_3 y C_4, se tiene que $\delta_k^{-h}\tilde{\mathbf{v}}$ está en $H^1(C_4)^N$, $\delta_k^{-h}\tilde{\mathbf{v}} = 0$ sobre $\partial C_4 \cap \mathbb{R}^N_+$ cuando $1 \le k \le N-1$ y[2]

$$\nu \sum_{i,j=1}^{N} \int_{C^+} a_{ij} D_i \tilde{\mathbf{z}} \cdot D_j(\delta_k^{-h}\tilde{\mathbf{v}})\, d\xi - \sum_{i,j=1}^{N} \int_{C^+} \tilde{q}\, e_{ij}\, D_j(\delta_k^{-h}\tilde{v}_i)\, d\xi$$

$$= \int_{C^+} \tilde{\mathbf{f}}^* \cdot \delta_k^{-h}\tilde{\mathbf{v}}\, d\xi + \int_{\Delta_{r_0}} \tilde{\mathbf{b}}^*(\xi',0) \cdot \delta_k^{-h}\tilde{\mathbf{v}}(\xi',0)\, d\xi'.$$

Denotemos $\widetilde{X_3}$ el espacio

$$\widetilde{X_3} = \{\tilde{\mathbf{v}}\,;\, \tilde{\mathbf{v}} \in H^1(C_3^+)^N,\ \tilde{\mathbf{v}} = 0 \text{ sobre } \partial C_3^+ \cap \mathbb{R}^N_+\}.$$

Aplicando propiedades bien conocidas de los cocientes en diferencias, obtenemos

$$(\delta_k^h \tilde{\mathbf{z}}, \delta_k^h \tilde{q}) \in \widetilde{X_3} \times L^2(C_3^+)$$

$$\nu \sum_{i,j=1}^{N} \int_{C_3^+} a_{ij} D_i(\delta_k^h \tilde{\mathbf{z}}) \cdot D_j \tilde{\mathbf{v}}\, d\xi - \sum_{i,j=1}^{N} \int_{C_3^+} e_{ij} \delta_k^h \tilde{q} D_j \tilde{v}_i\, d\xi$$

$$= T_1(\tilde{\mathbf{v}}) + T_2(\tilde{\mathbf{v}}) + T_3(\tilde{\mathbf{v}}) + T_4(\tilde{\mathbf{v}}) \qquad \forall \tilde{\mathbf{v}} \in \widetilde{X_3}.$$

donde

$$T_1(\tilde{\mathbf{v}}) = -\nu \sum_{i,j=1}^{N} \int_{C^+} \delta_k^h a_{ij}\, \tau_k^h(D_i \tilde{\mathbf{z}}) \cdot D_j \tilde{\mathbf{v}}\, d\xi, \quad T_2(\tilde{\mathbf{v}}) = \sum_{i,j=1}^{N} \int_{C^+} \delta_k^h e_{ij}\, \tau_k^h \tilde{q}\, D_j \tilde{v}_i\, d\xi,$$

$$T_3(\tilde{\mathbf{v}}) = -\int_{C^+} \delta_k^h \tilde{\mathbf{f}}^* \cdot \tilde{\mathbf{v}}\, d\xi \text{ y } T_4(\tilde{\mathbf{v}}) = \int_{\Delta_{r_0}} \delta_k^h \tilde{\mathbf{b}}^* \cdot \tilde{\mathbf{v}}(\xi',0)\, d\xi'.$$

Por otro lado, dado $\tilde{\mu} \in L^2(C_3^+)$, se tiene:

$$\begin{aligned} -\sum_{i,j=1}^{N} \int_{C_3^+} e_{ij}\, \tilde{\mu}\, D_j(\delta_k^h \tilde{z}_i)\, d\xi &= -\sum_{i,j=1}^{N} \int_{C_3^+} \tilde{\mu}(\delta_k^h(e_{ij} D_j \tilde{z}_i) - \delta_k^h e_{ij}\, \tau_k^h(D_j \tilde{z}_i))\, d\xi \\ &= \int_{C_3^+} e_{ij}\, \tilde{\mu}\, \delta_k^h(\tilde{g}^*)\, d\xi + \sum_{i,j=1}^{N} \int_{C_3^+} e_{ij}\, \tilde{\mu}\, \delta_k^h e_{ij}\, \tau_k^h(D_j \tilde{z}_i)\, d\xi \\ &\equiv T_5(\tilde{\mu}) \end{aligned}$$

Consideramos las formas bilineales $\tilde{a}(\cdot,\cdot)$ y $\tilde{\beta}(\cdot,\cdot)$, definidas como sigue:

$$\begin{aligned} \tilde{a}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}) &= \nu \sum_{i,j=1}^{N} \int_{C_3^+} a_{ij} D_i \tilde{\mathbf{u}} \cdot D_i \tilde{\mathbf{v}}\, d\xi \quad \forall \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}} \in \widetilde{X_3} \\ \tilde{\beta}(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mu}) &= -\sum_{i,j=1}^{N} \int_{C_3^+} \tilde{\mu}\, e_{ij}\, D_j \tilde{v}_i\, d\xi \quad \forall (\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mu}) \in \widetilde{X_3} \times L^2(C_3^+). \end{aligned}$$

[2]Naturalmente, el caso $k = N$ necesita ser tratado aparte.

Entonces, es obvio que $(\delta_k^h\widetilde{\mathbf{z}}, \delta_k^h\widetilde{q}) \in \widetilde{X}_3 \times L^2(C_3^+)$ y, además,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \widetilde{a}(\delta_k^h\widetilde{\mathbf{z}}, \widetilde{\mathbf{v}}) + \widetilde{\beta}(\widetilde{\mathbf{v}}, \delta_k^h\widetilde{q}) & = & T_1(\widetilde{\mathbf{v}}) + T_2(\widetilde{\mathbf{v}}) + T_3(\widetilde{\mathbf{v}}) + T_4(\widetilde{\mathbf{v}}) \quad \forall \widetilde{\mathbf{v}} \in \widetilde{X}_3, \\ \widetilde{\beta}(\delta_k^h\widetilde{\mathbf{z}}, \widetilde{\mu}) & = & T_5(\widetilde{\mu}) \quad \forall \widetilde{\mu} \in L^2(C_3^+). \end{array} \right. \tag{11}$$

Etapa 3.- Veamos seguidamente que (**??**) está en las hipótesis de existencia, unicidad y dependencia continua respecto de los datos para una formulación variacional mixta. Es fácil comprobar que T_1, T_2, T_3 y T_4 son formas lineales y continuas sobre $\widetilde{X}_3$, mientras que T_5 lo es sobre $L^2(C_3^+)$. En particular, para acotar el término $T_4(\widetilde{\mathbf{v}})$ hacemos uso del Lema **??** junto con la acotación:

$$\|\widetilde{\mathbf{v}}(\cdot, 0)\|_{H_{00}^{1/2}(\Delta_{r_0})} \leq C(U')\|\widetilde{\mathbf{v}}\|_{H^1(C_3)} \quad \forall \widetilde{\mathbf{v}} \in \widetilde{X}_3.$$

Si escribimos

$$T_1(\widetilde{\mathbf{v}}) + T_2(\widetilde{\mathbf{v}}) + T_3(\widetilde{\mathbf{v}}) + T_4(\widetilde{\mathbf{v}}) = \langle T, \widetilde{\mathbf{v}} \rangle \quad \forall \widetilde{\mathbf{v}} \in \widetilde{X}_3,$$

se tiene que $T \in \widetilde{X}_3'$ y

$$\|T\|_{\widetilde{X}_3'} \leq C(K, U') \left(\|\mathbf{f}^*\|_{L^2(U\cap\Omega)^N} + \|g^*\|_{L^2(U\cap\Omega)} + \|\mathbf{b}^*\|_{H^{1/2}(U\cap\gamma)^N} \right).$$

Una acotación análoga se tiene para $T_5(\widetilde{\mu})$.

Admitamos por un momento el resultado siguiente, cuya demostración será presentada más adelante:

Lema 14 *En las condiciones precedentes, se tiene:*

a) La forma bilineal $\widetilde{a}(\cdot, \cdot)$ es continua y elíptica en $\widetilde{X}_3$.

b) La forma bilineal $\widetilde{\beta}(\cdot, \cdot)$ es continua y verifica la condición "inf-sup" en

$$\widetilde{X}_3 \times L^2(C_3^+).$$

■

Gracias a este Lema se deduce que el par $(\delta_k^h\widetilde{\mathbf{z}}, \delta_k^h\widetilde{q}) \in \widetilde{X}_3 \times L^2(C_3^+)$ es la única solución de (11) y que, además,

$$\begin{array}{rcl} \|\delta_k^h\widetilde{\mathbf{z}}\|_{H^1(C_3^+)^N} + \|\delta_k^h\widetilde{q}\|_{L^2(C_3^+)} & \leq & C\left(\|T\|_{\widetilde{X}_3'} + \|T_5\|_{L^2(C_3^+)} \right) \\ & \leq & C\left(\|\mathbf{f}^*\|_{L^2(U\cap\Omega)^N} + \|g^*\|_{H^1(U\cap\Omega)} + \|\mathbf{b}^*\|_{H^{1/2}(U\cap\gamma)^N} \right), \end{array}$$

donde la constante C depende de K, U y U^*.

Etapa 4.- Sea $\delta = d(U', \partial U)$. Podemos elegir $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ como en la Etapa 1 tal que se anule fuera de $\{x\,;\, x \in U, \quad d(x, \partial U) \geq \delta/2\}$ y verifique

$$|D_i\varphi| \leq \frac{C}{\delta}, \quad |D_{ij}\varphi| \leq \frac{C}{\delta^2} \quad \forall i, j, \quad C > 0.$$

Se deduce de aquí,

$$\|\mathbf{f}^*\|_{L^2(U\cap\Omega)^N} + \|g^*\|_{H^1(U\cap\Omega)} + \|\mathbf{b}^*\|_{H^{1/2}(U\cap\gamma)^N} \leq C(\delta)\,(\|\mathbf{f}\|_{L^2} + \|g\|_{H^1} + \|\mathbf{b}\|_{H^{1/2}}).$$

Por tanto, cualquiera que sea el abierto $C'' \subset\subset C'$, podemos escribir que

$$\|\delta_k^h \widetilde{\mathbf{z}}\|_{H^1(C''_+)^N} + \|\delta_k^h \widetilde{q}\|_{L^2(C''_+)} \leq C(K,U,U')\,(\|\mathbf{f}\|_{L^2(U\cap\Omega)^N} + \|g\|_{H^1(U\cap\Omega)} + \|\mathbf{b}\|_{H^{1/2}(U\cap\gamma)^N}),$$

donde $C''_+ = C'' \cap \mathbb{R}^N_+$. De la desigualdad anterior y del Lema 6, podemos concluir que

$$(D_k\widetilde{\mathbf{z}}, D_k\widetilde{q}) \in H^1(C'_+)^N \times L^2(C'_+)$$

y, además,

$$\|D_k \widetilde{\mathbf{z}}\|_{H^1(C'_+)^N} + \|D_k \widetilde{q}\|_{L^2(C'_+)} \leq C(K,U,U')\,(\|\mathbf{f}\|_{L^2(U\cap\Omega)^N} + \|g\|_{H^1(U\cap\Omega)} + \|\mathbf{b}\|_{H^{1/2}(U\cap\gamma)^N}).$$

Hemos obtenido así que $\widetilde{\mathbf{z}} \in H^1(C'_+)$, $\widetilde{q} \in L^2(C'_+)$ y

$$\begin{array}{rcll} D_{ij}\widetilde{\mathbf{z}} & \in & L^2(C'_+)^N & \forall (i,j) \neq (N,N), \\ D_i\widetilde{q} & \in & L^2(C'_+) & \forall i \neq N. \end{array}$$

Derivando respecto a ξ_N las ecuaciones que verifican $\widetilde{\mathbf{z}}$ y $\widetilde{q}$, es fácil ver también que

$$D_{NN}\widetilde{\mathbf{z}} \in L^2(C'_+)^N \quad \text{y} \quad D_N\widetilde{q} \in L^2(C'_+),$$

y verifican la misma acotación (cf. por ejemplo [**?**]). Por tanto,

$$(\widetilde{\mathbf{z}}, \widetilde{q}) \in H^2(C'_+)^N \times H^1(C'_+).$$

Basta ahora deshacer el cambio de variable que se introdujo en la Etapa 2 para terminar la Demostración.

■

Demostración del Lema ??: Para la demostración del apartado a) basta tener en cuenta las propiedades de las matrices A y E. La demostración del apartado b) se deduce del Lema 10 deshaciendo previamente el cambio de variables $x = \psi(\xi)$ introducido en la Etapa 1.

■

La demostración del Teorema 11 para $m = 0$ se obtiene seleccionando un recubrimiento finito $\{U_j\}_{j=1}^N$ de $\partial\Omega$ de manera que cada U_j cumpla las propiedades satisfechas por el entorno U que proporciona el Teorema 13, un abierto $U_{M+1} \subset\subset \Omega$ que verifique el Teorema 12 y tal que $\bar{\Omega} \subset \cup_{j=1}^{M+1} U_j$ y una partición de la unidad en $\bar{\Omega}$ asociada a este recubrimiento.

■

5 Regularidad L^2 para el Problema de Evolución

Dedicamos esta sección a dar un resultado de regularidad para el problema de evolución de Stokes cuando imponemos el mismo tipo de condiciones de contorno sobre un trozo de frontera:

$$\left\{\begin{array}{c} \dfrac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} - \nu\Delta\mathbf{y} + \nabla\pi = \mathbf{f}, \quad \nabla\cdot\mathbf{y} = 0 \quad \text{en } \Omega\times(0,T), \\ (-\pi\,\mathbf{Id} + \nu\nabla\mathbf{y})\cdot\mathbf{n} = \mathbf{b} \quad \text{sobre } \gamma\times(0,T), \\ \mathbf{y} = 0 \quad \text{sobre } (\partial\Omega\setminus\gamma)\times(0,T), \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 \quad \text{en } \Omega. \end{array}\right. \tag{12}$$

Se tiene:

Teorema 15 *Supongamos que* $\Omega \in W^{2,\infty}$, $\mathbf{f} \in L^2(\Omega\times(0,T))^N$, $\mathbf{y}_0 \in \widetilde{V}$,

$$\mathbf{b} \in L^2(0,T;H^{1/2}(\gamma)^N), \qquad \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \in L^2(0,T;H^{-1/2}(\gamma)^N).$$

*Entonces la solución de (**??**) verifica lo siguiente*

$$\mathbf{y} \in L^2(0,T;H^2(\Omega)^N)\cap L^\infty(0,T;\widetilde{V}),$$

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} \in L^2(Q_T)^N, \qquad \pi \in L^2(0,T;H^1(\Omega)).$$

La demostración se basa en la obtención de mejores estimaciones para las soluciones aproximadas de (**??**) que proporciona el método de Galerkin. Para obtener estas estimaciones, tomaremos la base de $\widetilde{V}$ dada por las autofunciones del problema de Stokes asociado a (1)–(3) que, gracias a los resultados anteriores, son más regulares:

Teorema 16 *Sea* $\Omega \in W^{2,\infty}$. *Existe una sucesión* $\{\lambda_j\}_{j\geq 1}$ *de autovalores de* $\widetilde{A}$,

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_j \leq \lambda_{j+1} \leq ..., \quad \lambda_j \nearrow \infty,$$

y una base ortonormal de $\widetilde{H}$, $\{\mathbf{w}_j\}_{j\geq 1}$, *formada por autofunciones asociadas. Más precisamente,*

$$\mathbf{w}_j \in C^\infty(\Omega)^N \cap H^2(\Omega)^N \cap \widetilde{V}$$

y

$$\int_\Omega \nabla\mathbf{w}_j : \nabla\mathbf{v}\,dx = \lambda_j \int_\Omega \mathbf{w}_j\cdot\mathbf{v}\,dx, \quad \forall \mathbf{v}\in\widetilde{V}$$

para cada j. *Además,* $\mathbf{w}_j$ *se caracteriza por ser, junto con alguna* $q_j \in C^\infty(\Omega)\cap H^1(\Omega)$, *la única solución del problema*

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\Delta\mathbf{w}_j + \nabla q_j &=& \lambda_j\mathbf{w}_j, \quad \nabla\cdot\mathbf{w}_j = 0 \text{ en } \Omega, \\ (-q_j\,\mathbf{Id} + \nabla\mathbf{w}_j)\cdot\mathbf{n} &=& 0 \quad \textit{sobre } \gamma, \\ \mathbf{w}_j &=& 0 \quad \textit{sobre } \partial\Omega\setminus\gamma, \\ \|\mathbf{w}_j\|_{L^2} &=& 1. \end{array}\right.$$

■

Referencias

[1] J.A. Bello, *Tesis,* Universidad de Sevilla, 1992.

[2] J.A. Bello, *L^r regularity for the Stokes and Navier-Stokes problems,* aparecerá en Ann. Mat. Pura ed Appl. (IV), Vol. CLXX, (1995).

[3] E. Fernández Cara, M. González Burgos, *A result concerning controllability for the Navier-Stokes equations,* SIAM J. Control and Optimization, Vol. 33, **No. 4** (1995), p. 1061–1070.

[4] Gilbarg, D., Trudinger, N.S., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order,* 2nd. Edition, Springer-Verlag, Berlin 1983.

[5] Girault, V., Raviart, P.A., *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations,* Springer-Verlag, Berlin 1986.

[6] M. González Burgos, *Tesis,* Universidad de Sevilla, 1993.

[7] Ladyzhenskaya, O.A., *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow, 2nd. Edition,* Gordon and Breach, New York 1969.

[8] Lions, J.L., Magenes, E., *Problèmes aux limites Non Homogènes et Applications,* Vol. 1, Dunod, Gauthiers-Villars, Paris 1968.

[9] Nečas, J., *Les Méthodes Directes en Théorie des Equations Elliptiques,* Masson, Paris 1967.