FILTRADO DE PROCESOS SEMIPERIÓDICOS MULTIDIMENSIONALES.

Félix Galindo Soto y Javier Sanz Gil

Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática
Facultad de Ciencias, Universidad de Valladolid

El objetivo fundamental de la presente comunicación es el estudio de los filtros en el espacio de las señales semiperiódicas multidimensionales y, en particular, la caracterización de aquellos filtros que llevan asociada una función de transferencia continua en el toro multidimensional.

Las señales discretas multidimensionales han sido objeto recientemente de varios estudios por su aplicación al tratamiento de imágenes, tomografía asistida por ordenador, estudio de los recursos terrestres vía satélite, radar, reducción de ruidos,... ([2], [5]). De entre ellas, las señales periódicas poseen un interés especial debido al papel fundamental jugado por la transformación de Fourier en la teoría de la señal, así como la rapidez computacional que permite el uso de la transformada rápida de Fourier. En nuestro estudio de la literatura existente, notamos la carencia de una base teórica sólida sobre la que deben descansar los conceptos fundamentales (análisis armónico, filtrado, etc.).

Las sucesiones semiperiódicas surgen al completar el espacio de las sucesiones periódicas con la norma del superior. I.D. Berg en [1] demuestra que el citado espacio es el álgebra de Banach de funciones continuas $\mathcal{C}(\Delta)$, donde Δ es un grupo compacto. Posteriormente, M. Núñez en [6] y [7] obtiene un resultado análogo dando más información sobre el grupo Δ. Se puede comprobar que Δ es homeomorfo al anillo de Prüfer ([8]). La generalización de estos resultados al caso multidimensional permite probar que los filtros de las señales semiperiódicas k-dimensionales quedan caracterizados en términos de las medidas de Borel de un determinado grupo compacto Δ_k. Gracias a la particular estructura del citado grupo probamos que si se imponen determinadas condiciones de regularidad a las transformadas de Fourier-Stieltjes de las medidas de Borel (funciones de transferencia del filtro) en Δ_k dichas medidas están concentradas en $\mathbb{Z}^k$.

§1. Conceptos previos.

Llamaremos *señal discreta* a una función compleja definida en $\mathbb{Z}^k$. Para su representación emplearemos una de las siguientes notaciones: $\{x(\mathbf{n})\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^k}$ o $\underset{\sim}{x}$.

Una señal discreta $\{x(\mathbf{n})\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^k}$ se dice *periódica* si existe un matriz $\mathbf{T} = (t_{ij})$ regular, de orden k, con coeficientes en $\mathbb{Z}$, tal que para cada $j = 1, 2, \ldots, k$, se verifica que

$$x(\mathbf{n} + \mathbf{t}_j) = x(\mathbf{n}), \qquad \text{para cada } \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^k,$$

donde $\mathbf{t}_j$ representa el vector columna $\mathbf{t}_j = (t_{1j}, \ldots, t_{kj})^t$, o equivalentemente, si se verifica

$$x(\mathbf{n} + \mathbf{T}\mathbf{m}) = x(\mathbf{n}), \qquad \text{para cada } \mathbf{n}, \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^k.$$

En esta situación la matriz $\mathbf{T}$ se denomina un *periodo* de la señal discreta $\underset{\sim}{x}$. El conjunto de las señales discretas periódicas definidas sobre $\mathbb{Z}^k$, que se designará por $p(k)$, es un subespacio vectorial no cerrado del espacio $\ell^\infty(\mathbb{Z}^k)$.

En lo que sigue se denotará por $\mathcal{GL}(k,\mathbb{Z})$ el semigrupo multiplicativo de las matrices regulares de orden k con coeficientes en $\mathbb{Z}$. Se define en $\mathcal{GL}(k,\mathbb{Z})$ la siguiente relación: si $\mathbf{S},\mathbf{T}\in\mathcal{GL}(k,\mathbb{Z})$, $\mathbf{S}\prec\mathbf{T}$ si, y sólo si, existe $\mathbf{P}\in\mathcal{GL}(k,\mathbb{Z})$ tal que $\mathbf{T}=\mathbf{SP}$. El conjunto $\mathcal{GL}(k,\mathbb{Z})$ con la relación $\prec$ es un conjunto dirigido.

Una señal discreta $\{x(\mathbf{n})\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^k}$ es *semiperiódica* si para cada número real $\varepsilon>0$ existe un elemento $\mathbf{T}$ de $\mathcal{GL}(k,\mathbb{Z})$ verificando

$$|x(\mathbf{n})-x(\mathbf{n}+\mathbf{Tm})|<\varepsilon,\qquad \text{para cada } \mathbf{n},\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^k.$$

El espacio de las señales semiperiódicas sobre $\mathbb{Z}^k$, que denotaremos por $sp(k)$, es cerrado en $\ell^\infty(\mathbb{Z}^k)$ y resulta ser la compleción de $p(k)$, cuando en $p(k)$ se considera la norma del superior.

Sean $\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^k$ y $\mathbf{T}\in\mathcal{GL}(k,\mathbb{Z})$. Denotamos por $V_{\mathbf{n},\mathbf{T}}$ al conjunto de $\mathbb{Z}^k$ dado por

$$V_{\mathbf{n},\mathbf{T}}=\{\,\mathbf{n}+\mathbf{Tm}:\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^k\,\}.$$

La familia $\{\,V_{\mathbf{n},\mathbf{T}}:\mathbf{T}\in\mathcal{GL}(k,\mathbb{Z})\,\}$ constituye un sistema fundamental de entornos abiertos de $\mathbf{n}$ para una única topología $\mathcal{T}_k$ sobre $\mathbb{Z}^k$. Dicha topología $\mathcal{T}_k$ es compatible con la estructura de grupo en $\mathbb{Z}^k$, metrizable y no localmente compacta.

Si $\mathbf{T}$ es un elemento de $\mathcal{GL}(k,\mathbb{Z})$, el conjunto $\mathbf{T}\mathbb{Z}^k$ es un subgrupo del grupo aditivo $\mathbb{Z}^k$. El correspondiente conjunto cociente $\mathbb{Z}^k/\mathbf{T}\mathbb{Z}^k$ es finito y $\mathrm{card}(\mathbb{Z}^k/\mathbf{T}\mathbb{Z}^k)=|\det(\mathbf{T})|$.

Siguiendo la idea dada en [6] y [7] para el caso $k=1$ se puede obtener una representación de la compleción del grupo $(\mathbb{Z}^k,\mathcal{T}_k)$ como el límite proyectivo del sistema inverso de proyecciones de $\mathbb{Z}^k/\mathbf{T}\mathbb{Z}^k$ en $\mathbb{Z}^k/\mathbf{S}\mathbb{Z}^k$, $\mathbf{S}\prec\mathbf{T}$. Este grupo, que denotaremos por Δ_k, es compacto y podemos identificar el espacio de las señales semiperiódicas con el de las funciones continuas en Δ_k. En particular, a cada señal discreta periódica $\underset{\sim}{x}$ de periodo $\mathbf{T}$, le corresponde la función

$$\sum_{\mathbf{n}\in\mathcal{P}(\mathbf{T})} x(\mathbf{n})\chi_{\bar V_{\mathbf{n},\mathbf{T}}},$$

donde $\mathcal{P}(\mathbf{T})=\{\,\lambda_1\mathbf{t}_1+\ldots+\lambda_k\mathbf{t}_k:\ (\lambda_1,\ldots,\lambda_k)\in[0,1)^k\,\}\cap\mathbb{Z}^k$ y $\bar V_{\mathbf{n},\mathbf{T}}$ es la adherencia de $V_{\mathbf{n},\mathbf{T}}$ en Δ_k. Señalemos que $\mathcal{P}(\mathbf{T})$ contiene un único representante de cada una de las clases de equivalencia de $\mathbb{Z}^k/\mathbf{T}\mathbb{Z}^k$.

§2. Filtros de señales semiperiódicas

Si G es un grupo compacto conmutativo con grupo de caracteres $\hat G$, los *filtros* (denominados habitualmente *multiplicadores* en terminología matemática) en $\mathcal{C}(G)$ son las aplicaciones ϕ lineales y continuas de $\mathcal{C}(G)$ en $\mathcal{C}(G)$ que conmutan con las translaciones (es decir, para todo $a\in G$ se tiene que $\tau_a(\phi g)=\phi(\tau_a g)$, donde $\tau_a g(u)=g(u-a)$).

Un teorema clásico sobre Teoría de Multiplicadores, cuya demostración puede verse en [4], nos asegura que a cada filtro ϕ en $\mathcal{C}(G)$ le podemos asociar una medida μ de Borel en G de modo que

$$\phi g=\mu * g,\qquad \text{para cada } g\in\mathcal{C}(G).$$

La transformada de Fourier-Stieltjes de μ, $f = \hat{\mu}$, definida en $\hat{G}$ verifica

$$(\phi g)\hat{}(\gamma) = f(\gamma)\hat{g}(\gamma), \qquad \text{para todo } g \in \mathcal{C}(G),\ \gamma \in \hat{G}.$$

La función f resulta ser acotada y determina unívocamente el operador ϕ. En teoría de la señal tal función suele denominarse *función de transferencia* del filtro.

Hay tantos filtros como medidas de Borel sobre G. Desde un punto de vista práctico, ciertos filtros revisten una importancia especial. Dado que $f(\gamma)$ representa la respuesta del filtro a una señal de frecuencia γ, es lógico que en un filtro físicamente constructible la respuesta a las diferentes señales mantenga una cierta uniformidad respecto de las frecuencias: en otras palabras, la función $f(\gamma)$ debe poseer ciertas propiedades de regularidad respecto de γ. Probaremos que una condición tan débil como la integrabilidad de Riemann de f implica que de hecho el filtro es de un tipo específico y la función f está en el álgebra $A(\mathbb{T}^k)$.

El siguiente resultado caracteriza los filtros asociados a medidas complejas sobre el grupo Δ_k que se concentran en $\mathbb{Z}^k$.

2.1. Teorema. Sea ϕ una aplicación lineal de $sp(k)$ en $sp(k)$. Son equivalentes los siguientes enunciados:

1) ϕ es un filtro asociado a una medida que se concentra en $\mathbb{Z}^k$.

2) Existe una familia de números complejos $\{a_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^k}$ verificando para cada elemento $\underset{\sim}{x}$ de $sp(k)$,

i) La familia $\{a_{\mathbf{n}-\mathbf{m}}x(\mathbf{m})\}_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^k}$ es sumable, para todo $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^k$.

ii) La señal discreta $\{\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^k} a_{\mathbf{n}-\mathbf{m}}x(\mathbf{m})\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^k}$ es semiperiódica.

iii) $\phi\underset{\sim}{x} = \{\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^k} a_{\mathbf{n}-\mathbf{m}}x(\mathbf{m})\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^k}$.

3) Existe una función f integrable Riemann en el toro k-dimensional $\mathbb{T}^k$ tal que

$$(\phi\underset{\sim}{x})\hat{}(\mathbf{z}) = f(\mathbf{z})\hat{x}(\mathbf{z}), \qquad \text{para todo } \mathbf{z} \in \Gamma_k.$$

Demostración: Supongamos que ϕ es un filtro asociado a una medida $\mu \in M(\Delta_k)$ que se concentra en $\mathbb{Z}^k$. Sea $\{a_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^k}$ la familia de números complejos absolutamente sumable tal que

$$\mu = \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^k} a_{\mathbf{n}}\delta_{\{\mathbf{n}\}}.$$

Entonces, para cada $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^k$,

$$\begin{aligned}(\phi\underset{\sim}{x})(\mathbf{n}) = \mu * \underset{\sim}{x}(\mathbf{n}) &= \int_{\Delta_k} x(\mathbf{n} - u)\,d\mu(u) \\ &= \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^k} a_{\mathbf{m}}x(\mathbf{n}-\mathbf{m}) = \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^k} a_{\mathbf{n}-\mathbf{m}}x(\mathbf{m}).\end{aligned}$$

Así hemos demostrado que 1) implica 2).

Si se verifica 2), la familia de números complejos $\{a_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^k}$ es sumable; por tanto, tiene sentido considerar la medida $\mu \in M(\Delta_k)$ definida como

$$\mu = \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^k} a_{\mathbf{n}}\delta_{\{\mathbf{n}\}}.$$

Para cada $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^k$ se tiene que

$$(\phi \underset{\sim}{x})(\mathbf{n}) = \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^k} a_{\mathbf{n}-\mathbf{m}} x(\mathbf{m}) = \mu * \underset{\sim}{x}(\mathbf{n}),$$

es decir, para cada señal discreta semiperiódica $\underset{\sim}{x}$,

$$\phi \underset{\sim}{x} = \mu * \underset{\sim}{x},$$

con lo que queda probada la equivalencia de 1) y 2).

Observemos que si $\mu \in M(\Delta_k)$ se concentra en $\mathbb{Z}^k$,

$$\mu = \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^k} a_{\mathbf{n}} \delta_{\{\mathbf{n}\}},$$

su transformada de Fourier-Stieltjes viene dada por

$$\hat{\mu}(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^k} a_{\mathbf{n}} \mathbf{z}^{-\mathbf{n}}, \qquad \text{para todo } \mathbf{z} \in \Gamma_k,$$

donde $\Gamma_k = \{ (z_1, \ldots, z_k) \in \mathbb{C}^k : \ z_j \text{ es una raíz de la unidad, para } j = 1, \ldots, k \}$, dotado de la topología discreta, es el grupo dual de Δ_k ([3]). Puesto que la familia $\{a_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^k}$ es sumable, $\hat{\mu}$ se extiende a la función continua f en $\mathbb{T}^k$,

$$f(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^k} a_{\mathbf{n}} \mathbf{z}^{-\mathbf{n}}.$$

Para demostrar que 3) implica 1), nos basaremos en el siguiente lema.

2.2. Lema. Sea f la función de transferencia de un filtro. Supongamos que f puede extenderse a una función integrable Riemann sobre $\mathbb{T}^k$ y que la parte representable de la medida $\mu \in M(\Delta_k)$ verificando $\hat{\mu} = f$ es cero (es decir, $\mu(\{\mathbf{n}\}) = 0$, para todo $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^k$). Entonces,

$$f = 0, \qquad \text{casi siempre en } \mathbb{T}^k.$$

Demostración del lema: Sea $\{\underset{\sim}{\mu}_{\mathbf{T}}\}_{\mathbf{T}\in\mathcal{GL}(k,\mathbb{Z})}$ la familia de señales periódicas asociada a μ por

$$\mu_{\mathbf{T}}(\mathbf{n}) = \mu(\bar{V}_{\mathbf{n},\mathbf{T}}).$$

Si $\mathbf{T}$ es un elemento de $\mathcal{GL}(k,\mathbb{Z})$, se designará por $\Gamma^{\mathbf{T}}$ al subgrupo de Γ_k dado por los elementos $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_k) \in \Gamma_k$ tales que la función $\underset{\sim}{z}$ definida en $\mathbb{Z}^k$ por

$$z(\mathbf{n}) = \mathbf{z}^{\mathbf{n}} = z_1^{n_1} \cdots z_k^{n_k},$$

es $\mathbf{T}$-periódica. Si $\underset{\sim}{x}$ es una señal discreta periódica de periodo $\mathbf{T}$ entonces su transformada de Fourier viene dada por la expresión

$$\hat{x}(\mathbf{z}) = \frac{1}{|\det \mathbf{T}|} \sum_{\mathbf{n}\in\mathcal{P}(\mathbf{T})} \mathbf{z}^{-\mathbf{n}} x(\mathbf{n}), \qquad \text{si } \mathbf{z} \in \Gamma^{\mathbf{T}},$$

y la transformada de Fourier-Stieltjes de μ verifica

$$\hat{\mu}(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{n}\in\mathcal{P}(\mathbf{T})} \mathbf{z}^{-\mathbf{n}} \mu(\bar{V}_{\mathbf{n},\mathbf{T}}), \qquad \text{si } \mathbf{z} \in \Gamma^{\mathbf{T}}.$$

Combinando estas expresiones para $\mu_{\mathbf{T}}$,

$$\hat{\mu}(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{n}\in\mathcal{P}(\mathbf{T})} \mathbf{z}^{-\mathbf{n}} \mu(\bar{V}_{\mathbf{n},\mathbf{T}}) = \sum_{\mathbf{n}\in\mathcal{P}(\mathbf{T})} \mathbf{z}^{-\mathbf{n}} \mu_{\mathbf{T}}(\mathbf{n}) = |\det \mathbf{T}|\, \hat{\mu}_{\mathbf{T}}(\mathbf{z}) \qquad \mathbf{z} \in \Gamma^{\mathbf{T}}.$$

Aplicando a la anterior expresión el teorema de inversión de Fourier,

$$\mu_{\mathbf{T}}(\mathbf{n}) = \sum_{\mathbf{z}\in\Gamma^{\mathbf{T}}} \hat{\mu}_{\mathbf{T}}(\mathbf{z})\mathbf{z}^{\mathbf{n}} = \frac{1}{|\det \mathbf{T}|} \sum_{\mathbf{z}\in\Gamma^{\mathbf{T}}} \hat{\mu}(\mathbf{z})\mathbf{z}^{\mathbf{n}},$$

o equivalentemente,

$$\mu(\bar{V}_{\mathbf{n},\mathbf{T}}) = \frac{1}{|\det \mathbf{T}|} \sum_{\mathbf{z}\in\Gamma^{\mathbf{T}}} \hat{\mu}(\mathbf{z})\mathbf{z}^{\mathbf{n}}.$$

Tomando límites en la red,

$$\lim_{\mathbf{T}\in\mathcal{GL}(k,\mathbb{Z})} \frac{1}{|\det \mathbf{T}|} \sum_{\mathbf{z}\in\Gamma^{\mathbf{T}}} \hat{\mu}(\mathbf{z})\mathbf{z}^{\mathbf{n}} = \lim_{\mathbf{T}\in\mathcal{GL}(k,\mathbb{Z})} \mu(\bar{V}_{\mathbf{n},\mathbf{T}}) = \mu(\{\mathbf{n}\}) = 0.$$

Por otro lado, si $\mathbf{T}$ es una matriz diagonal y $(t_1,\ldots,t_k)\in\mathbb{N}^k$ es su diagonal, podemos escribir

$$\frac{1}{|\det \mathbf{T}|} \sum_{\mathbf{z}\in\Gamma^{\mathbf{T}}} \hat{\mu}(\mathbf{z})\mathbf{z}^{\mathbf{n}} =$$

$$= \frac{1}{t_1\cdots t_k} \sum_{m_1=0}^{t_1-1}\cdots\sum_{m_k=0}^{t_k-1} f(e^{2\pi i(m_1/t_1)},\ldots,e^{2\pi i(m_k/t_k)})\, e^{2\pi i[(m_1 n_1/t_1)+\cdots+(m_k n_k/t_k)]},$$

que corresponde a una suma de Riemann en $\mathbb{T}^k$ de la integral

$$\int_{[0,1]^k} f(e^{2\pi i t_1},\ldots,e^{2\pi i t_k})\, e^{2\pi i\,\mathbf{tn}}\, d\mathbf{t} = \int_{\mathbb{T}^k} f(\mathbf{w})\mathbf{w}^{\mathbf{n}}\, d\mathbf{w}.$$

Por tanto, la transformada de Fourier de f en $\mathbb{T}^k$ es nula,

$$\hat{f}(\mathbf{n}) = \int_{\mathbb{T}^k} f(\mathbf{w})\mathbf{w}^{-\mathbf{n}}\, d\mathbf{w} = 0, \qquad \mathbf{n}\in\mathbb{Z}^k$$

y la función f es igual a cero, casi siempre en $\mathbb{T}^k$.

Demostración de la implicación 3) $\Rightarrow$ 1): Si se verifica 3), entonces ϕ es un filtro y f es su función de transferencia. Sea μ la medida asociada a ϕ, es decir, el elemento de $M(\Delta_k)$ tal que $\hat{\mu} = f$. La medida μ se descompone en suma de dos medidas μ_1 y μ_2, de modo que μ_1 está concentrada en $\mathbb{Z}^k$ y la parte representable de μ_2 es nula . Entonces existe una familia de números complejos $\{a_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^k}$, sumable, que verifica

$$\mu_1 = \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^k} a_{\mathbf{n}}\delta_{\{\mathbf{n}\}}.$$

De este modo la transformada de Fourier-Stieltjes de μ_1 vendrá dada por la fórmula

$$\hat{\mu}_1(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^k} a_{\mathbf{n}}\mathbf{z}^{-\mathbf{n}}, \qquad \text{para } \mathbf{z}\in\Gamma_k.$$

Como la familia $\{a_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^k}$ es sumable, esta función puede extenderse a una función continua en $\mathbb{T}^k$. Puesto que

$$\hat{\mu}_2 = \hat{\mu} - \hat{\mu}_1 = f - \hat{\mu}_1,$$

la función $\hat{\mu}_2$ puede extenderse a una función g integrable Riemann en $\mathbb{T}^k$. Se sigue del lema anterior que $\hat{\mu}_2$ es la función idénticamente nula. En consecuencia, $\hat{\mu} = \hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_2 = \hat{\mu}_1$. De la unicidad de la transformada de Fourier-Stieltjes se sigue que

$$\mu = \mu_1 = \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^k} a_{\mathbf{n}}\delta_{\{\mathbf{n}\}}.$$

Observación: Señalemos que en las condiciones de la proposición, la condición de la integrabilidad de Riemann en el toro k-dimensional para la función de transferencia va a implicar necesariamente la continuidad de dicha función.

2.3. Corolario. Sea f una función compleja definida en Γ_k. Son equivalentes los enunciados siguientes:

1) f es la función de transferencia de un filtro cuya medida asociada se concentra en $\mathbb{Z}^k$.

2) Existe una familia $\{a_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^k}$ de $\ell^1(\mathbb{Z}^k)$ tal que

$$f(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^k} a_{\mathbf{n}}\mathbf{z}^{\mathbf{n}}.$$

De hecho, las funciones de transferencia de filtros asociados a medidas concentradas en $\mathbb{Z}^k$ son las funciones continuas en $\mathbb{T}^k$ que admiten serie de Fourier absolutamente sumable.

Los filtros cuya función de transferencia es de la forma

$$f(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^k} a_{\mathbf{n}}\mathbf{z}^{-\mathbf{n}}, \qquad \text{para } \mathbf{z}\in\Gamma_k,$$

donde $\{a_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^k}$ es una familia sumable de números complejos, reciben el nombre de *filtros analíticos* o *causales* (la función $\mathbf{z}\in\Gamma_k \mapsto f(\bar{\mathbf{z}})$ se prolonga de forma única a una función holomorfa en el polidisco abierto unidad y continua en el polidisco cerrado). En este tipo de filtros el valor de una señal de salida en un momento dado depende únicamente de los valores que toma la señal de entrada hasta ese preciso instante.

2.4. Corolario. Sea ϕ una aplicación lineal de $sp(k)$ en $sp(k)$. Son equivalentes los siguientes enunciados:

1) ϕ es un filtro analítico.

2) ϕ es un filtro asociado a una medida que se concentra en $\mathbb{N}^k$.

§3. Bibliografía

[1] Berg, I. David: The algebra of semiperiodic sequences. Michigan Math. J. **10**, 237–239 (1963).

[2] Dudgeon, Dan E. - Mersereau, Russell M.: Multidimensional Digital Signal Processing. Prentice Hall (1984).

[3] Hewitt, Edwin - Ross, Kenneth A.: Abstract Harmonic Analysis I. Springer-Verlag (1963).

[4] Larsen, R.: An Introduction to the Theory of Multipliers. Springer-Verlag (1971).

[5] Lim, Jae S.: Two-dimensional signal and image processing. Prentice Hall (1990).

[6] Núñez Jiménez, Manuel: Periodic Discrete Processes. AC (1984).

[7] Núñez Jiménez, Manuel: Multipliers on the Space of Semiperiodic Sequences. Trans. Amer. Math. Soc. **291**, 2, 801–811 (1984).

[8] Schwarz, Wolfgang - Spilker, Jürgen: Arithmetical Functions. Cambridge University Press (1994).