Multiplicidad de soluciones para un problema elíptico no lineal en Climatología.

J.I. Díaz[1] y L. Tello[2]

(1) Depto. Matemática Aplicada
F. Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid.

(2) Depto. Matemática Aplicada
E.T.S. Arquitectura
Universidad Politécnica de Madrid.

Abstract

En este trabajo se presentan algunos resultados sobre el estudio de un problema elíptico no lineal definido sobre una variedad bidimensional de $I\!R^3$ que modeliza la distribución de temperaturas sobre la superficie terrestre. El modelo estudiado es sensible respecto de un parámetro solar Q. Se prueba que el número de soluciones del problema depende de los valores de Q, obteniendose un diagrama de bifurcación en forma de S respecto de dicho parámetro.

1 Introducción.

Los llamados *modelos de balance de energía* fueron introducidos independientemente por M. Budyko [1969] y W. Sellers [1969]. El balance de energía es el siguiente:

$$\text{Incremento de calor} \;=\; R_a \;-\; R_e \;+\; D,$$

donde R_a representa la energía solar absorbida por la Tierra, R_e la energía emitida por la Tierra y D la difusión de calor. Si denotamos por u la temperatura superficial, se suele tomar $R_a = QS(x)\beta(u)$ con $Q > 0$ la constante solar, $S(x) > 0$ la función de insolación y $\beta(u)$ la función de coalbedo (no decreciente en u tal que $\beta(u) = 0,7$ si $u > -10 + \epsilon$, $\beta(u) = 0,4$ si $u < -10 - \epsilon$, para algún $\epsilon \geq 0$). El término R_e se supone también no decreciente en u. Por simplicidad, supondremos que la capacidad calorífica y el coeficiente de difusión son constantes e iguales a uno, con lo que el balance energético se expresa como una ecuación parabólica no lineal del tipo

$$(P) \begin{cases} u_t - \mathrm{div}_{\mathcal{M}}(|\mathrm{grad}_{\mathcal{M}} u|^{p-2}\mathrm{grad}_{\mathcal{M}} u) + R_e(u) \in QS(x)\beta(u) & \text{en } (0,\infty)\times\mathcal{M} \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{en } \mathcal{M}, \end{cases}$$

donde

- $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ es una variedad bidimensional riemanniana compacta sin borde simulando la Tierra (por ejemplo $\mathcal{M} = \mathbf{S^2}$ la esfera unidad de $I\!R^3$);
- $p \geq 2$;
- grad $_{\mathcal{M}}$ es entendido en el sentido de la métrica de Riemann. Budyko [1969] and Sellers [1969] consideraron $p = 2$. Posteriormente, Stone [1972] propuso el caso $p = 3$ incluyendo así el efecto de feedback negativo producido por las corrientes atmosféricas de gran escala. De manera más general en este trabajo se ha considerado un coeficiente del tipo $|\nabla u|^{p-2}$;
- en el modelo de Budyko R_e es representada mediante la ley de enfriamiento de Newton como $Bu + C$ con B y C parámetros positivos. La ley de Stefan - Bolzman modeliza R_e como $C|u|^3 u$ (Sellers [1969]);
- $S : \mathcal{M} \to I\!R$, $0 < \underline{S} \leq S(x) \leq \overline{S}$, $S \in L^\infty(\mathcal{M})$; y
- β es un grafo maximal monótono $I\!R^2$, $m \leq b \leq M$ para cada $b \in \beta(s)$ y todo $s \in I\!R$ (β se supondrá *multívoca* en $u = -10$, Budyko [1969] o bien *localmente Lipschitziana*, Sellers [1969]).

La teoría de existencia y unicidad de soluciones débiles para esta clase de problemas ha sido estudiada en Xu [1991] y Díaz [1993] para el modelo unidimensional y despues generalizada en Díaz-Tello [1993] para el caso bidimensional. La existencia de soluciones ha sido obtenida en el espacio $C([0,\infty); L^2(\mathcal{M})) \cap L^p_{loc}(0,\infty; V)$, donde

$$V = \{u \in L^2(\mathcal{M}) : \mathrm{grad}_{\mathcal{M}} u \in L^p(T\mathcal{M})\}.$$

También se ha estudiado la estabilización cuando $t \to \infty$ de soluciones de (P) a alguna solución del problema estacionario asociado, que llamaremos (P_Q). Este resultado motiva el estudio de (P_Q) desarrollado en las secciones siguientes.

2 Soluciones estacionarias

Se considera el problema elíptico asociado al modelo de balance de energía descrito en la sección anterior, es decir

$$(P_Q) \qquad -\operatorname{div}_{\mathcal{M}}(|\operatorname{grad}_{\mathcal{M}} u|^{p-2}\operatorname{grad}_{\mathcal{M}} u) + Bu + C \ \in \ QS(x)\beta(u) \text{ en } \mathcal{M}.$$

Nuestro primer objetivo es probar que para distintos valores de Q el problema puede tener distinto número de soluciones.

Teorema 1 *(Díaz - Hernández - Tello [1995])*
Existen cuatro valores explícitos de Q, $0 < Q_1 \leq Q_2 \leq Q_3 \leq Q_4$ tales que

i) si $0 < Q < Q_1$ entonces (P_Q) tiene solución única;

ii) si $Q_2 < Q < Q_3$ entonces (P_Q) tiene al menos tres soluciones;

iii) si $Q_4 < Q$ entonces (P_Q) tiene solución única.

Observaciones:

1. El resultado es nuevo también para $p = 2$ (Δ - laplaciano). En Hetzer [1990] puede encontrarse un resultado de este tipo para el modelo Sellers y $p = 2$.

2. El Teorema 1 es válido para $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ dominio acotado y regular con condiciones de contorno de tipo Neumann.

Idea de la demostración.

i) Sea u una solución de (P_Q), entonces

$$QS(x)m - C \ \leq \ -\Delta_p u + Bu \ \leq \ QS(x)M - C \qquad \text{en } \mathcal{M}.$$

Por el principio de comparación para el operador $-\Delta_p + B$ para funciones $u \in V$, se tiene que si $\overline{u}$ y $\underline{u}$ son las soluciones de los problemas $(\overline{P})$ y $(\underline{P})$ definidos por

$$(\overline{P}) \qquad -\Delta_p \overline{u} + B\overline{u} = QS(x)M - C \ \text{ en } \mathcal{M}$$

$$(\underline{P}) \qquad -\Delta_p \underline{u} + B\underline{u} = QS(x)m - C \ \text{ en } \mathcal{M}$$

entonces u verifica

$$\underline{u} \ \leq \ u \ \leq \ \overline{u} \qquad \text{en } \mathcal{M}.$$

Si $Q < Q_1 := \frac{-10B+C}{M\overline{S}}$, se comprueba que $\underline{u} < -10$ y $\overline{u} < -10$ en $\mathcal{M}$. Así toda solución de (P_Q) para $0 < Q < Q_1$ es menor que -10, por tanto es solución de

$$(P_Q) \qquad -\Delta_p u + Bu + C \;\in\; QS(x)m \;\text{ en } \mathcal{M},$$

que tiene solución única. Luego (P_Q) tiene solución única. Argumentando de manera análoga se prueba que si $Q > Q_4$, toda solución de (P_Q) es mayor que -10 y en consecuencia única, concluyendo (iii).

Para probar (ii) se considera una sucesión de funciones lipschitzianas β_ϵ que converja al grafo maximal monótono β. En primer lugar, se prueba el resultado para el modelo approximado

$$(P_Q^\epsilon) \qquad -\operatorname{div}_{\mathcal{M}}(|\operatorname{grad}_{\mathcal{M}} u|^{p-2}\operatorname{grad}_{\mathcal{M}} u) + Bu + C \;\in\; QS(x)\beta_\epsilon(u) \text{ en } \mathcal{M}.$$

Es posible construir subsoluciones V_1, V_2 y supersoluciones U_1, U_2 del problema (P_Q^ϵ), ordenadas del siguiente modo: $V_2 < U_2 < -10 < V_1 < U_1$. Esto implica la existencia de dos soluciones u_1, u_2 del problema (P_Q^ϵ), con

$$V_1 \;\le\; u_1 \;\le\; U_1, \qquad V_2 \;\le\; u_2 \;\le\; U_2.$$

Con técnicas de índice topológico se prueba la existencia de una tercera solución u_3. La segunda etapa consiste en probar la convergencia en $L^\infty(\mathcal{M})$ de las tres sucesiones u_1^ϵ, u_2^ϵ y u_3^ϵ de soluciones de (P_Q^ϵ) a tres soluciones u_1, u_2 y u_3 de (P_Q), gracias a adecuadas estimaciones a priori que permiten separar los límites.

■

3 Sobre el diagrama de bifurcación.

Sea

$$\Sigma := \{(Q,u) \in I\!R^+ \times V :\; -\operatorname{div}_{\mathcal{M}}(|\nabla_{\mathcal{M}} u|^{p-2}\nabla_{\mathcal{M}} u) + Bu + C \;\in\; QS(x)\beta(u) \text{ en } \mathcal{M}\}.$$

Teorema 2 *(Arcoya - Díaz - Tello [1995])*
Σ tiene una componente conexa no acotada en forma de S que contiene al punto $(0, \frac{-C}{B})$.

Idea de la demostración.

Dividiremos la demostración en dos etapas: en la primera etapa se prueba el resultado del teorema para un problema aproximado y en la segunda etapa se prueba la convergencia de una rama del diagrama de bifurcación del problema aproximado a una rama del diagrama de bifurcación de (P_Q).

Se considera el problema aproximado (P_Q^ϵ) definido anteriormente. Utilizando el Teorema de bifurcación de Rabinowitz podemos afirmar que posee una componente conexa *no acotada* que contiene al punto $(0, \frac{-C}{B})$. Por el principio fuerte del máximo para este operador puede compararse dicha componente conexa con los diagramas de bifurcación en forma de S de dos modelos cero-dimensionales (P_0^1) y (P_0^2), definidos por

$$\begin{array}{lrcl} (P_0^1) & Bu + C & = & Q\overline{S}\beta_\epsilon(u) \\ (P_0^2) & Bu + C & = & Q\underline{S}\beta_\epsilon(u). \end{array}$$

Se concluye que el diagrama de bifurcación de (P_Q^ϵ) posee una componente conexa no acotada en forma de S que contiene al punto $(0, \frac{-C}{B})$.

Denotando por Σ_ϵ la rama en forma de S del diagrama de bifurcación de (P_Q^ϵ) y haciendo $\epsilon \to 0$ se obtiene que Σ_ϵ converge a Σ en el espacio $I\!R \times L^\infty(\mathcal{M})$ utilizando argumentos topológicos que preservan la forma de S. ■

Referencias.

Arcoya, D., Diaz, J.I., Tello, L. : article in preparation.

Budyko,M.I. [1969]: The efects of solar radiation variations on the climate of the Earth, *Tellus*, 21, pp 611-619.

Diaz, J.I. [1993]: *Mathematical Analysis of some diffusive energy balance climate models.* In the book "Mathematics , Climate and Environment", J.I. Díaz and J.L. Lions eds. Masson, 28-56.

Diaz, J.I., Hernandez, J., Tello, L. : article in preparation.

Diaz, J.I., Tello, L. [1993]: *Sobre un modelo bidimensional en Climatología.* Actas del III Congreso de Matemática Aplicada, XIII C.E.D.Y.A., 310-315.

Hernández, J. [1986]: *Qualitative methods for nonlinear diffusion equations.* 47-118. Nonlinear diffusion equations; A. Fasano and M. Primicerio eds. Springer - Verlag, Lecture Notes, 47-118.

Hetzer, G. [1990]: The structure of the principal component for semilinear diffusion equations from energy balance climate models, *Houston Journal of Math.* 16, pp. 203-216.

Rabinowitz, P.H. [1971]: A Global Theorem for Nonlinear Eigenvalue Problems and Applications. En *Contributions to Nonlinear Functional Analisis, E.H. Zarantonello ed. Academic Press.*

Sellers, W.D. [1969]: A global climatic model based on the energy balance of the earth-atmosphere system. *J. Appl. Meteorol.* 8, pp. 392-400.

Stone, P.H. [1972]: *A Simplified Radiative-Dynamical Model for the Static Stability of Rotating Atmospheres.* Journal of the Atmospheric Sciences, vol 29, 3, pp. 405-418.

Xu, X. [1991]: Existence and Regularity Theorems for a Free Boundary Problem Governing a Simple Climate Model. *Aplicable Anal.* 42,pp. 33-59.