Estudio Numérico del Método de Poincaré-Melnikov-Arnold para Aplicaciones

Amadeu Delshams* y Rafael Ramírez-Ros†

Noviembre de 1995

Departamento de Matemática Aplicada I
Universitat Politècnica de Catalunya
Diagonal 647, 08028 Barcelona

Resumen

En las aplicaciones preservando área, los ángulos entre las curvas invariantes cuantifican la magnitud de la zona estocástica donde se produce el caos. El método de Poincaré-Melnikov-Arnold permite obtener analíticamente expresiones asintóticas de estos ángulos de escisión. Sin embargo, al estudiar puntos débilmente hiperbólicos, la validez del método plantea serias dudas.

Los experimentos numéricos realizados para un problema "test" muestran la validez del método si la perturbación no afecta a la parte lineal del problema no perturbado. Debido al tamaño exponencialmente pequeño de los ángulos en cuestión, los cálculos se han hecho con aritmética de múltiple precisión y las curvas invariantes se han desarrollado a orden elevado.

1 Introducción

El *método de Poincaré-Melnikov-Arnold* es la herramienta estándar para estudiar la escisión de variedades invariantes en sistemas de e.d.o.'s cercanas a integrables con separatrices. (Para información de tipo general mirar [GH83].)

También existe una teoría similar para perturbaciones de aplicaciones planas integrables conservando área con una separatriz conectando un punto fijo hiperbólico consigo mismo, lo cual permite detectar *intersecciones homoclínicas transversales* y en consecuencia la existencia de una zona estocástica donde la dinámica de la aplicación es caótica (shift de Bernoulli, entropía topológica positiva, etc.). El *ángulo de escisión* (ángulo bajo el cual se cortan las curvas invariantes perturbadas) da una estimación

*E-mail: `amadeu@ma1.upc.es`
†E-mail: `rafael@tere.upc.es`

del tamaño de la zona estocástica, siendo pues importante su cálculo desde un punto de vista cuantitativo. El método de Poincaré-Melnikov-Arnold nos permite encontrar analíticamente *expresiones asintóticas* (cuando el parámetro perturbativo, llamémosle ε, tiende a cero) de este tipo de ángulos [DR95a].

Sin embargo, al igual que pasa en el campo de las e.d.o.'s, la validez de las expresiones asintóticas obtenidas por este método no está clara cuando se estudian puntos débilmente hiperbólicos, es decir, cuando el valor propio mayor que uno de la diferencial de la aplicación perturbada en su punto fijo hiperbólico se comporta como $\lambda = 1+\mathcal{O}(\varepsilon^\nu)$, con $\nu > 0$; o equivalentemente, cuando $\varepsilon = \mathcal{O}(h^p)$, donde $h = \ln \lambda$, con $p > 0$. En este tipo de situaciones, bajo las hipótesis de analiticidad usuales, resulta que los ángulos de escisión son *exponencialmente pequeños* en ε, mirar [FS90], que tambien contiene una serie de experimentos numéricos. Sería deseable comprobar la validez o falsedad de este tipo de desarrollos asintóticos.

Obviamente, el primer paso en este estudio consiste realizar una serie de *experimentos numéricos* con un problema "test" lo más simple posible, y en esto consiste este trabajo. (Comparar con [BO93], donde se hace este estudio para e.d.o.'s usando como problema "test" la ecuación del péndulo rápidamente forzada.)

Es importante observar que los ángulos que debemos calcular son exponencialmente pequeños, luego será necesario usar rutinas de múltiple precisión para contrarrestar las cancelaciones que se producen en el cálculo de estos ángulos. Por este motivo, la elección de la aplicación test se debe realizar bajo criterios de esfuerzo computacional mínimo.

2 Planteamiento del problema

2.1 Problema integrable: Aplicación de McMillan

En esta subsección introduciremos la familia de aplicaciones planas integrables conservando área con una separatriz que conforman el problema integrable no perturbado.

Definición 1 *Diremos que una aplicación plana $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es de* tipo estándar*, cuando $F(x,y) = (y, -x+g(y))$ para alguna función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Además, si S es una involución tal que $F^{-1} = S \circ F \circ S$, diremos que F es S-* reversible.

Definición 2 *Sea F una aplicación plana que conserva área y orientación. Sea z_0 un punto fijo hiperbólico de F. Entonces* $\operatorname{Spec}[DF(z_0)] = \{e^{\pm h}\}$ *para algún $h > 0$. Diremos que h es el* exponente característico *de F en z_0.*

Las siguientes propiedades nos serán de utilidad:

a) Toda aplicación estándar conserva área y orientación.

b) Sea $F(x,y) = (y, -x+g(y))$, con $g(0) = 0$ y $g'(0) > 2$. Entonces el origen es un punto fijo hiperbólico de F de exponente característico $\operatorname{arccosh}[g'(0)/2]$.

c) Sea $\mathcal{R}$ la involución dada por $\mathcal{R}(x,y)=(y,x)$ y $F(x,y)=(y,-x+g(y))$. Entonces, si g es una función impar, F es $\mathcal{R}$- reversible.

Consideramos ahora la familia de aplicaciones estándar analíticas introducidas por McMillan en [McM71]

$$M_h(x,y)=\left(y,-x+\frac{2\mu y}{1+y^2}\right), \qquad \mu=\cosh(h),\ 0<h.$$

De lo anteriormente expuesto, deducimos que la aplicación de McMillan M_h tiene al origen como un punto fijo hiperbólico con exponente característico h y es $\mathcal{R}$-reversible. Además, M_h es integrable y tiene una conexion homoclínica en el origen, o sea, tiene una separatriz autoconectando el origen [GPB89, DR95a]. A causa de la $\mathcal{R}$- reversibilidad esta separatriz es simétrica respecto la bisectriz del primer y tercer cuadrantes.

2.2 Problema perturbativo con 2 parámetros

Ahora ya estamos en disposición de considerar un problema perturbativo que inicialmente tendrá *dos parámetros*: h, el exponente característico del problema integrable y ε, el parámetro perturbativo. Para eso, nos centramos en la familia de aplicaciones dada por $F_{h,\varepsilon}=M_h+\varepsilon P$, donde la perturbación P se escoge de manera que preserve el caracter estándar, la analiticidad y la $\mathcal{R}$- reversibilidad de la aplicación de McMillan; es decir, tendremos que $P(x,y)=(0,q(y))$, donde q es una función *analítica e impar*.

Ya sabemos que M_h es integrable. Por contra, uno espera que *genéricamente* la aplicación perturbada tenga una dinámica completamente diferente. Es de esperar que si ε es suficientemente pequeño, la conexión homoclínica se rompa creándose varias órbitas homoclínicas (no necesariamente transversales) aisladas, una de las cuales tendrá un punto sobre la bisectriz del primer cuadrante, debido a la $\mathcal{R}$- reversibilidad de $F_{h,\varepsilon}$. Para confirmar esta impresión damos el siguiente resultado probado en [DR95a].

Teorema 1 *Sean $h>0$ y q una aplicación entera no nula. Entonces $F_{h,\varepsilon}$ es no integrable si ε es suficientemente pequeño.*

La idea de la demostración consiste en ver que la función de Melnikov no es idénticamente nula y así las curvas invariantes se cortan a orden finito, siendo esta escisión la causa de la no integrabilidad. De hecho, este resultado se prueba para perturbaciones conservando el carácter estándar de una aplicación integrable más general (no reversible) introducida por Suris en [Sur89] dada por

$$\mathcal{S}_{h,a}(x,y)=\left(y,-x+2y\frac{\mu+ay}{1-2ay+y^2}\right), \qquad \mu=\cosh(h),\ 0<h,\ -1<a<1.$$

Como queremos estudiar aplicaciones baratas de evaluar, escogemos la perturbación más simple posible: $q(y)=y$. Observamos que con esta elección es posible evaluar $F_{h,\varepsilon}$ con 1 cociente, 2 productos y 3 sumas. Por consiguiente, el esfuerzo computacional es el mínimo entre todas las posibles funciones q. En este caso, se puede probar [GPB89, DR95a] que $F_{h,\varepsilon}$ tiene exactamente dos órbitas homoclínicas (transversales) primarias en el primer cuadrante, cuando ε es suficientemente pequeño.

Sea $\alpha = \alpha(h,\varepsilon)$ el ángulo de escisión en el punto homoclínico principal que está sobre la bisectriz del primer cuadrante. *Fijada* $h > 0$, la función $\alpha(h,\cdot)$ es analítica en ε, luego existe una constante $\mathcal{A}_1(h)$, tal que

$$\alpha = \varepsilon \mathcal{A}_1(h) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \ (\varepsilon \to 0), \tag{1}$$

siendo válida la fórmula asintótica $\alpha \sim \varepsilon \mathcal{A}_1(h)$ $(\varepsilon \to 0)$. La constante $\mathcal{A}_1(h)$ puede ser calculada, usando las técnicas de Melnikov de primer orden desarrolladas en [DR95a] y resulta ser

$$\mathcal{A}_1(h) = \left(\frac{2\widehat{K}}{h}\right)^4 \widehat{m}(1-\widehat{m}) \frac{\cosh^4(h/2)}{2\sinh^2(h/2)},$$

donde $\widehat{K} = K(\widehat{m})$ estando $\widehat{m}$ determinado por $K(1-\widehat{m})/K(\widehat{m}) = \pi/h$, siendo $K(m)$ la *integral elíptica completa de primera especie* definida por

$$K(m) = \int_0^{\pi/2} (1 - m\sin\theta)^{-1/2}\, d\theta, \qquad 0 < m < 1.$$

2.3 Problema perturbativo con 1 parámetro

Hasta ahora hemos considerado a los parámetros h y ε independientes (de hecho, fijábamos $h > 0$ y estudiábamos el caso $\varepsilon \to 0$). Cuando estos dos parámetros son dependientes y la dependencia entre ellos es *potencial* (que es el caso más interesante), sabemos que surgen problemas de difícil solución como la escisión exponencialmente pequeña de separatrices. Para tratar este tipo de problemas, dada $p > 0$, consideramos la familia uniparamétrica de aplicaciones $F_{h,\varepsilon}$ con $\varepsilon = h^p$, es decir

$$\mathcal{F}_h(x,y) = \left(y, -x + \frac{2\mu y}{1+y^2} + h^p y\right), \qquad \mu = \cosh(h),\ h > 0. \tag{2}$$

La constante $\mathcal{A}_1(h)$ es exponencialmente pequeña en h, cuando $h \to 0^+$. Concretamente, tenemos la expresión $\mathcal{A}_1(h) = \mathcal{B}_1(h)\,[1 + \mathcal{O}(e^{-\pi^2/h})]$ $(h \to 0^+)$, donde

$$\mathcal{B}_1(h) = \left(\frac{2\pi}{h}\right)^4 \frac{\cosh^4(h/2)}{2\sinh^2(h/2)} e^{-\pi^2/h} \sim 2^5\pi^4 h^{-6} e^{-\pi^2/h}\ (h \to 0^+).$$

Por tanto las fórmulas asintóticas

$$\alpha \sim \alpha_{\mathrm{a}} := h^p \mathcal{A}_1(h)\ (h \to 0^+, \varepsilon = h^p), \qquad \alpha \sim \beta_{\mathrm{a}} := h^p \mathcal{B}_1(h)\ (h \to 0^+, \varepsilon = h^p), \tag{3}$$

no están justificadas, pues como $\mathcal{O}(\varepsilon^2) \gg \varepsilon\mathcal{A}_1(h)$ cuando $h \to 0^+$ y $\varepsilon = h^p$, el error en la fórmula de Taylor (1) es mayor que el término principal y no puede ser despreciado.

Volvamos momentáneamente al caso biparamétrico. En el marco de la cuantificación de ángulos de escisión en casos débilmente hiperbólicos, es un hecho contrastado que el parámetro verdaderamente relevante es el exponente característico de la aplicación perturbada $F_{h,\varepsilon}$, que notaremos $h^* = h^*(h,\varepsilon)$, no el de la aplicación integrable no perturbada M_h (que es h). Por eso, descomponemos la aplicación $F_{h,\varepsilon}$ en suma de una aplicación integrable más una perturbación de forma que *la perturbación no afecte a la parte lineal de la aplicación integrable*. Éste es un truco que se remonta al trabajo [FS90] y que parece inevitable cuando se trabaja con puntos débilmente hiperbólicos. La aplicación integrable sólo puede ser M_{h^*} y por tanto la nueva perturbación es $\varepsilon P^* := \varepsilon P + (M_h - M_{h^*}) = \mathcal{O}(\varepsilon)$.

Si ahora aplicamos el método de Melnikov para estimar analíticamente el ángulo de escisión α, que es el mismo pues no hemos cambiado de aplicación, pero considerando que la aplicación integrable no perturbada es M_{h^*} (en lugar de M_h) y la perturbación es εP^* (en vez de εP), se obtiene que

$$\alpha = \varepsilon \mathcal{A}_1(h^*) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\ (\varepsilon \to 0), \tag{4}$$

usando que la contribución al ángulo de escisión α del segundo término de la perturbación $(M_h - M_{h^*})$ es nula, ya que este parte de la perturbación mantiene a la nueva aplicación integrable dentro de la familia de McMillan donde no se produce ninguna escisión.

Centrándonos de nuevo en el caso uniparamétrico, por contraste de las fórmulas de Taylor (1) y (4), consideramos las fórmulas (3) sustituyendo h por h^* pero *sólo* en las funciónes $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{B}_1$, es decir

$$\alpha \sim \alpha_{\mathrm{b}} := h^p \mathcal{A}_1(h^*)\ (h \to 0^+, \varepsilon = h^p), \qquad \alpha \sim \beta_{\mathrm{b}} := h^p \mathcal{B}_1(h^*)\ (h \to 0^+, \varepsilon = h^p). \tag{5}$$

Nuestro objetivo consiste en estudiar numéricamente la validez de (3) y (5) para $p > 0$.

Nota 1 El caso $p \leq 0$ no nos interesa pues entonces el origen es hiperbólico para la aplicación perturbada, pero no débilmente hiperbólico (y por tanto no se producen fenómenos exponencialmente pequeños). Efectivamente, ya que el exponente característico perturbado, $h^* = h^*(h,\varepsilon) = \operatorname{arccosh}[\cosh(h) + \varepsilon/2]$, no tiende a cero si ε no lo hace.

3 Estudio del problema

3.1 Conjeturas iniciales

Antes de empezar a usar la fuerza bruta (=cálculos numéricos masivos) es recomendable reflexionar unos instantes para intentar vislumbrar cuáles deberían ser los resultados. Tenemos cuatro candidatos para aproximar asintóticamente α cuando $h \to 0, \varepsilon = h^p$:

$\alpha_{\rm a}$, $\alpha_{\rm b}$, $\beta_{\rm a}$ y $\beta_{\rm b}$. El primer paso consiste en *comparar* el comportamiento de los cuatro candidatos para ver si pueden aproximar a α simultáneamente.

Empezamos observando que $\mathcal{A}_1(h) \sim \mathcal{B}_1(h)$ $(h \to 0^+)$, luego, a partir de ahora, podemos olvidarnos de las α's, pues son más costosas de evaluar que las β's y su comportamiento asintótico es el mismo.

Ahora ya sólo hemos de comparar el comportamiento asintótico de $\beta_{\rm a}$ y $\beta_{\rm b}$. Sea $f = f(h)$ una función tal que $\lim_{h\to 0^+} f(h) = 0$. Entonces se cumple que

$$\begin{array}{lcl} f \not\sim h \; (h \to 0^+) & \Longrightarrow & \mathcal{B}_1(f) \not\sim \mathcal{B}_1(h) \; (h \to 0^+) \\ f \sim h \; (h \to 0^+) & \Longrightarrow & [\mathcal{B}_1(f) \sim \mathcal{B}_1(h) \; (h \to 0^+) \;\Leftrightarrow\; f = h[1 + \mathrm{o}(h)] \; (h \to 0^+)] \,. \end{array} \tag{6}$$

Por otra parte, la relación entre h^* y h cuando $\varepsilon = h^p$, viene dada por:

$$h^* = \begin{cases} h[1 - h^2/12 + \cdots], & \text{si } p > 4 \\ h[1 - 7h^2/12 + \cdots], & \text{si } p = 4 \\ h[1 - h^{p-2}/2 + \cdots], & \text{si } 2 < p < 4 \\ \sqrt{2}h[1 - 5h^2/48 + \cdots], & \text{si } p = 2 \\ h^{p/2}[1 - h^{2-p}/2 + \cdots], & \text{si } 1 < p < 2 \\ \sqrt{h}[1 - 13h/24 + \cdots], & \text{si } p = 1 \\ h^{p/2}[1 - h^p/24 + \cdots], & \text{si } 0 < p < 1 \end{cases} \qquad (h \to 0^+), \tag{7}$$

donde los puntos indican términos de orden superior. Finalmente, juntando (6) y (7), obtenemos que $\beta_{\rm a} \sim \beta_{\rm b}$ $(h \to 0^+, \varepsilon = h^p)$ si y sólo si $p > 3$. La conclusión es que si $p > 3$ los candidatos $\beta_{\rm a}$ y $\beta_{\rm b}$ aproximaran o no a α (cuando $h \to 0^+, \varepsilon = h^p$) simultáneamente, por contra, si $0 < p \leq 3$, no podrían hacerlo a la vez. Con este panorama y teniendo en cuenta la máxima "el parámetro relevante es h^*, no h", las conjeturas (previas a los experimentos numéricos) que extraemos son las siguientes:

- El comportamiento asintótico de α para todo $p > 0$ es $\alpha \sim \beta_{\rm b}$ $(h \to 0^+, \varepsilon = h^p)$.
- El método clásico de Melnikov predice correctamente el comportamiento asintótico del ángulo sólo cuando $p > 3$.
- Cuando $0 < p \leq 3$, la predicción dada por Melnikov debe refinarse sustituyendo $\mathcal{A}_1(h)$ por $\mathcal{A}_1(h^*)$.
- $\beta_{\rm b}$ aproxima a α mejor que $\beta_{\rm a}$ cuando $p > 3$. Esta diferencia será mayor cuanto más cerca esté p del 3.

3.2 Resultados Numéricos

Los experimentos numéricos con aritmética de múltiple precisión realizados confirman todas las conjeturas anteriores. Las Tablas 1–4 muestran algunos de los resultados. En ellas se muestran varios ángulos calculados numéricamente $\alpha_{\rm n}$ y los errores relativos al aproximar $\beta_{\rm a}$ (respectivamente, $\beta_{\rm b}$) por $\alpha_{\rm n}$, es decir, $\rho_{\rm a} := \alpha_{\rm n}/\beta_{\rm a} - 1$ (respectivamente,

Tabla 1: Ángulos para $p = 10, 8, 6$ con $h = q^{-j} h_0$ ($j = 0, \ldots, 6$, $q = 2^{1/2}$, $h_0 = 0.12$).

j	$p = 10$ α_{n} ρ_{a} ρ_{b}	$p = 8$ α_{n} ρ_{a} ρ_{b}	$p = 6$ α_{n} ρ_{a} ρ_{b}
6	2.778688663509086e-290 8.354367698808784e-13 -6.889867682743373e-19	1.234972743921858e-286 3.713052317441699e-9 -3.062163414552608e-15	5.488858309268574e-283 1.650259025144185e-5 -1.360961517572411e-11
5	5.513683101011230e-206 9.415495717109731e-12 -2.204443216256636e-17	1.225262936960865e-202 2.092332403315811e-8 -4.898762702792439e-14	2.722933072892276e-199 4.649734902202358e-5 -1.088613933912133e-10
4	3.351503490191417e-146 1.059394731851332e-10 -7.052205632822629e-16	3.723893204826246e-143 1.177105326182127e-7 -7.835784036467426e-13	4.138199826679337e-140 1.307979464239188e-4 -8.706426704516777e-10
3	9.445242454207044e-104 1.189157812503627e-9 -2.255417407087169e-14	5.247360379395919e-101 6.606434440910142e-7 -1.253009670598457e-11	2.916268426399446e-98 3.670904775580498e-4 -6.961164819604431e-9
2	1.473760702995925e-73 1.330195108107377e-8 -7.209086203762028e-13	4.093794802576566e-71 3.694993082871211e-6 -2.002523945348491e-10	1.138328773960562e-68 1.026901910133608e-3 -5.562566406090576e-8
1	4.954655071766297e-52 1.480359856980102e-7 -2.301623053918537e-11	6.881605846869451e-50 2.056075760082380e-5 -3.196698682414260e-9	9.584920270847757e-48 2.859600113533385e-3 -4.439858589829452e-7
0	1.241051209046608e-36 1.634831942253716e-6 -7.331309921333488e-10	8.619375583418747e-35 1.135360909040274e-4 -5.091187354889624e-8	6.032362738799715e-33 7.913914722248184e-3 -3.535542410771181e-6

$\rho_{\mathrm{b}} := \alpha_{\mathrm{n}}/\beta_{\mathrm{b}} - 1$). La Tabla 1 contiene los resultados para $p = 10, 8, 6$. Se aprecia que ρ_{b} es sensiblemente menor que ρ_{a}. En la Tabla 2 se muestran los casos $p = 5, 4, 3$. Para $p = 4$, β_{a} aproxima con poca precisión al ángulo. Para $p = 3$, ni siquiera eso. En las Tablas 3 y 4 (casos $p = 2, 3/2, 1, 3/4, 1/2, 1/4$) ya no mostramos ρ_{a} pues no tiende a cero.

En cada una de las Tablas, los cálculos se han hecho para siete valores distintos del parámetro h formando una secuencia geométrica: $h_j = q^{-j} h_0$, donde $q > 1$, $h_0 > 0$ y $j = 0, \ldots, 6$. Esto nos permitirá usar técnicas de extrapolación de Richardson con los valores de las Tablas, en el subsiguiente estudio. El valor de q es $\sqrt{2}$, si $p \geq 2$ y $\sqrt[p]{2}$ de lo contrario. El motivo de esta elección es el siguiente: Usando (7) y la definición de β_{b} vemos que el factor dominante en la expresión de β_{b} es $\mathcal{O}(\exp[-c/h])$, si $p \geq 2$ y $\mathcal{O}(\exp[-c/h^{p/2}])$ de lo contrario, donde $c > 0$; luego, al dividir dos veces el parámetro h por q (o sea, al pasar de h_{j-2} a h_j) el valor del ángulo pasa a ser (aproximadamente) el cuadrado del inicial. Esto puede considerarse como una normalización en la presentación de los resultados. Para cada p, el valor de h_0 se escoge de manera que el menor ángulo calculado (es decir, el correspondiente a h_6) esté entre 10^{-260} y 10^{-300}.

Tabla 2: Ángulos para $p = 5, 4, 3$ con $h = q^{-j} h_0$ ($j = 0, \ldots, 6$, $q = 2^{1/2}$, $h_0 = 0.12$).

j	$p = 5$ α_{n} ρ_{a} ρ_{b}	$p = 4$ α_{n} ρ_{a} ρ_{b}	$p = 3$ α_{n} ρ_{a} ρ_{b}
6	3.663206387115451e-281 1.100766253233292e-3 -9.073076780958851e-10	2.625064291724054e-279 7.608755671761532e-2 -6.048717726984830e-8	2.046763569451090e-275 1.248538780691761e+2 -4.032472840770936e-6
5	1.286359685518379e-197 2.194243506568101e-3 -5.131775289339327e-9	6.709073612247906e-196 1.088129689748040e-1 -2.419141869221415e-7	3.446211214702728e-192 1.198214068020151e+2 -1.140389927909345e-5
4	1.385245459507167e-138 4.369076986033742e-3 -2.902142206044429e-8	5.315959971443545e-137 1.562974142603563e-1 -9.673804154094689e-7	1.748536898341330e-133 1.130995439291397e+2 -3.224565836656626e-5
3	6.930884184602229e-97 8.687861540357299e-3 -1.640762192079926e-7	1.985312139254356e-95 2.258383483573493e-1 -3.867308525204767e-6	4.020537937849127e-92 1.043233883608256e+2 -9.115053112512833e-5
2	1.927963107775119e-67 1.725071750142297e-2 -9.270941159881527e-7	4.197612944900643e-66 3.288713138046734e-1 -1.545148942639897e-5	4.960294407895135e-63 9.321916265079001e+1 -2.575028346213967e-4
1	1.164906400882939e-46 3.421042542711668e-2 -5.232414676899028e-6	1.969349554460146e-45 4.835662234218982e-1 -6.166336915808853e-5	1.263383518166761e-42 7.975800523231486e+1 -7.265391317385796e-4
0	5.325717345757076e-32 6.781336290813210e-2 -2.946258287633982e-5	7.142923201251355e-31 7.185986448791090e-1 -2.455027388236226e-4	2.263522129149913e-28 6.435284147749627e+1 -2.044553266983459e-3

Tabla 3: Ángulos para $p = 2, 3/2, 1$ con $h = q^{-j} h_0$ ($j = 0, \ldots, 6$, $q = 2^{1/p}$).

j	$p = 2$ $h_0 =$8e-2 α_{n} ρ_{b}	$p = 3/2$ $h_0 =$6e-2 α_{n} ρ_{b}	$p = 1$ $h_0 =$1.5e-2 α_{n} ρ_{b}
6	3.166245656839834e-293 -1.194852823028942e-4	1.320021716922275e-264 -2.743855689864740e-4	6.349391320301220e-270 -2.800455262193164e-4
5	4.679347494658268e-205 -2.389453608534228e-4	2.278414427366629e-183 -5.487106688649861e-4	1.649182292643897e-188 -5.600357461168015e-4
4	6.896724679951017e-143 -4.777899235755958e-4	2.658184979935201e-126 -1.097171856030934e-3	4.149751159591092e-131 -1.119850146640734e-3
3	4.180794099015493e-99 -9.551767895668332e-4	2.607792458794972e-86 -2.193307854105641e-3	1.100549663187489e-90 -2.238813950538788e-3
2	2.528125199915525e-68 -1.908742426959491e-3	2.223787278666423e-58 -4.382284448872392e-3	2.915040790652360e-62 -4.474074880277002e-3
1	9.788925170705020e-47 -3.811048848708565e-3	5.761697111528697e-39 -8.746325463208564e-3	2.553469258982561e-42 -8.933877007964804e-3
0	1.194470545854798e-31 -7.596422154313095e-3	1.446196983335083e-25 -1.741528868306744e-2	2.284063320766546e-28 -1.781018608648559e-2

Tabla 4: Ángulos para $p = 3/4, 1/2, 1/4$ con $h = q^{-j} h_0$ ($j = 0, \ldots, 6$, $q = 2^{1/p}$).

j	$p = 3/4$ h_0 =4e-3 α_{n} ρ_{b}	$p = 1/2$ h_0 =2e-4 α_{n} ρ_{b}	$p = 1/4$ h_0 =5e-8 α_{n} ρ_{b}
6	6.383741711527841e-262 -2.969475882523529e-4	2.848646899797075e-278 -2.640309531202698e-4	2.176902007990311e-270 -2.791772526691545e-4
5	6.889965860551047e-183 -5.938330591735031e-4	2.025464534107494e-194 -5.280127956035360e-4	7.354277259039082e-189 -5.582995995014094e-4
4	3.516404297403450e-127 -1.187417780005341e-3	2.639851967153171e-135 -1.055829243731441e-3	2.181872390773376e-131 -1.116379688049304e-3
3	5.759955134222755e-88 -2.373843234720538e-3	1.108322453383107e-93 -2.110873858285190e-3	6.313445102979921e-91 -2.231882231629546e-3
2	2.051476656139879e-60 -4.743725143218338e-3	1.988280452818692e-64 -4.218615287884744e-3	1.708470750611909e-62 -4.460263083250020e-3
1	4.144113588818149e-41 -9.471665644387737e-3	6.382472497890353e-44 -8.424749597490103e-3	1.439305626644637e-42 -8.906578280069612e-3
0	1.239777456854907e-27 -1.888063894066617e-2	1.332944187325848e-29 -1.679996558330029e-2	1.166778059371360e-28 -1.775782692451285e-2

3.3 Conjeturas sobre el error

En este momento, la información que tenemos sobre el comportamiento asintótico del ángulo de escisión es que, aparentemente, $\alpha = \beta_{\mathrm{b}} [1 + \rho_{\mathrm{b}}(h)]$ ($h \to 0^+, \varepsilon = h^p$), para toda $p > 0$, verificandose que $\lim_{h\to 0^+} \rho_{\mathrm{b}}(h) = 0$. Ahora estudiaremos el orden del error ρ_{b} de esta fórmula y, más aún, trataremos de ajustar numéricamente este error a expresiones asintóticas del tipo

$$\rho_{\mathrm{b}}(h) \sim \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \omega_\ell h^{r_\ell} \; (h \to 0^+, \varepsilon = h^p), \tag{8}$$

con $0 < r_1 < \ldots < r_\ell < r_{\ell+1} < \ldots$. Para esto, usaremos técnicas de extrapolación de Richardson. Aquí de lo que se trata es de encontrar los exponentes adecuados r_ℓ en la fórmula (8). Obviamente estos exponentes y los coeficientes ω_ℓ pueden depender de p.

Empezamos calculando el primer exponente r_1. Con este fin, centramos nuestra atención en las Tablas 3 y 4. Los valores del parámetro h usados en ese caso son $h_j = q^{-j} h_0$, donde $q = \sqrt[p]{2}$, para $j = 0, \ldots, 6$. Así cada vez dividimos el valor de h por la raíz p-ésima de 2. Un rápido vistazo a esas Tablas basta para ver que $\rho_{\mathrm{b}}(h_j)/\rho_{\mathrm{b}}(h_{j+1}) \simeq 2$. Además contra mayor es j, mejor es la precisión de esta fórmula. Esto nos lleva a pensar que

$$\lim_{h\to 0^+} \left[\frac{\rho_{\mathrm{b}}(h)}{\rho_{\mathrm{b}}(h/\sqrt[p]{2})} \right] = 2,$$

para los valores de p de las Tablas 3 y 4. En realidad esto resulta ser también cierto para los valores de p de las Tablas 1 y 2, aunque es más díficil de ver pues en esas Tablas el valor de q es $\sqrt{2}$ y no $\sqrt[p]{2}$. En estas otras Tablas se puede apreciar que

$\rho_{\rm b}(h_j)/\rho_{\rm b}(h_{j+1}) \simeq 2^{p/2}$. Luego la información proveniente de los dos tipos de Tablas, puede unificarse diciendo que, aparentemente,

$$\lim_{h\to 0^+}\left[\frac{\rho_{\rm b}(h)}{\rho_{\rm b}(h/q)}\right] = q^p, \tag{9}$$

para todos los valores de p estudiados. Ahora bien, (9) implica que $\rho_{\rm b}(h) = \mathcal{O}(h^p)$ y la conjetura inmediata que extraemos es $r_1 = p$, o sea:

$$\alpha = \beta_{\rm b}\,[1+\mathcal{O}(h^p)]\ \ (h\to 0^+, \varepsilon = h^p), \quad \forall p>0.$$

Supongamos ahora que $\rho_{\rm b}$ se ajusta a una expresión asintótica del tipo (8). Introduciendo las funciones

$$\rho_1(h) = \rho_{\rm b}(h), \quad \rho_{\ell+1}(h) = \rho_\ell(h) + \frac{\rho_\ell(h)-\rho_\ell(qh)}{q^{r_\ell}-1},\ \ell\in\mathbb{N},$$

es fácil ver que $\rho_\ell(h) = \mathcal{O}(h^{r_\ell})$ para toda $\ell\in\mathbb{N}$, luego

$$\lim_{h\to 0^+}\left[\frac{\rho_\ell(h)}{q^{r_\ell}\rho_\ell(h/q)}\right] = 1, \quad \forall\ell\in\mathbb{N}.$$

Esto permite comprobar, dada una secuencia creciente de exponentes positivos $(r_\ell)_\ell$, si ρ_b se ajusta a (8). De hecho, en la práctica los exponentes se van generando mientras se efectúan las comprobaciones, pues el valor de r_ℓ se puede deducir de $\rho_\ell(h)$ usando que

$$r_\ell = \ln\left[\lim_{h\to 0^+}\left(\frac{\rho_\ell(h)}{\rho_\ell(h/q)}\right)\right]\Big/\ln(q).$$

Así el algoritmo consiste en, para cada $\ell\in\mathbb{N}$, usar ρ_ℓ para obtener r_ℓ y después calcular $\rho_{\ell+1}$ mediante su definición.

Obviamente, al hacer un estudio numérico no es posible realizar procesos infinitos. Deberemos pues truncar los dos procesos infinitos que entran en juego en este algoritmo: el cálculo de límites $h\to 0^+$ será substituido por el cálculo de las funciones implicadas en los puntos $h_j = q^{-j}h_0$ con j suficientemente grande ($j=5$) y llegaremos sólo hasta $\ell = 6$. Así, hemos calculado los números

$$c_\ell = \left[\frac{\rho_\ell(h_5)}{q^{r_\ell}\rho_\ell(h_6)}\right], \quad \ell = 1,\ldots,6.$$

Con la elección correcta de exponentes $(r_\ell)_\ell$ y *suponiendo* que un desarrollo asintótico como (8) es cierto, deberíamos tener $c_\ell\simeq 1$ para $\ell = 1,\ldots,6$.

Los resultados numéricos obtenidos muestran que:

1. Caso $p\geq 2$. Si $p = 10,8,6,4,2$ entonces $r_\ell = p-2+2\ell$ para $\ell = 1,\ldots,6$. Si $p = 5,3$ parece imposible ajustar $\rho_{\rm b}$ a (8).

Tabla 5: Estudio por extrapolación para $p = 10, 8, 6, 4, 2, 1, 1/2, 1/4$ con los datos $h = h_j$ ($j = 0, \ldots, 6$) extraidos de sus respectivas tablas anteriores. Ajuste a los exponentes r_ℓ, $\ell = 1, \ldots, 6$ donde $r_\ell = p - 2 + 2\ell$, si $p \geq 2$ y $r_\ell = \ell p$, si $p \leq 2$.

	$p = 10$	$p = 8$	$p = 6$	$p = 4$	$p = 2$	$p = 1$	$p = 1/2$	$p = 1/4$
ℓ	c_ℓ	c_ℓ	c_ℓ	c_ℓ	c_ℓ	c_ℓ	c_ℓ	c_ℓ
1	0.99986	0.99986	0.99986	0.99986	0.99990	0.99990	0.99991	0.99990
2	1.00011	1.00011	1.00011	1.00056	0.99983	1.00054	0.99952	0.99949
3	1.00147	1.00149	1.00761	0.99914	0.99937	0.99785	1.00019	1.00021
4	1.00410	1.01790	0.99826	0.99803	1.00066	0.99908	0.95471	1.00968
5	1.03632	0.99782	0.98515	1.02750	1.04175	1.00765	0.99475	1.00077
6	1.00377	0.92324	1.01460	1.03310	1.03851	1.06430	0.99113	0.81721

2. Caso $p \leq 2$. Si $p = 2, 1, 1/2, 1/4$ entonces $r_\ell = \ell p$ para $\ell = 1, \ldots, 6$. Si $p = 3/2, 3/4$ parece imposible ajustar $\rho_{\rm b}$ a (8).

En la Tabla 5 se muestran los valores de c_ℓ en los casos donde, aparentemente, el ajuste es posible ($p = 10, 8, 6, 4, 2, 1, 1/2, 1/4$). Vemos que todas ellas están cerca de uno.

Nuestras conclusiones finales quedan resumidas en las siguientes conjeturas, expresadas en términos del problema uniparamétrico.

Conjetura 1 *Sea $\alpha = \alpha(h)$ el ángulo de escisón en el punto homoclínico primario sobre la bisectriz del primer cuadrante de la aplicación (2). Sea $h^* = \operatorname{arccosh}[\cosh(h) + h^p/2]$. Entonces:*

a) Para toda $p > 0$ se cumple

$$\alpha = h^p \left(\frac{2\pi}{h^*}\right)^4 \frac{\cosh^4(h^*/2)}{2\sinh^2(h^*/2)} e^{-\pi^2/h^*} \left[1 + \mathcal{O}(h^p)\right] \ (h \to 0^+).$$

b) Para toda p verificando $p/2 \in \mathbb{N}$, existen unas constantes ω_ℓ, $\ell \in \mathbb{N}$, tales que

$$\alpha \sim h^p \left(\frac{2\pi}{h^*}\right)^4 \frac{\cosh^4(h^*/2)}{2\sinh^2(h^*/2)} e^{-\pi^2/h^*} \left[1 + h^{p-2} \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \omega_\ell h^{2\ell}\right] \ (h \to 0^+).$$

c) Para toda p verificando $2/p \in \mathbb{N}$, existen unas constantes ω_ℓ, $\ell \in \mathbb{N}$, tales que

$$\alpha \sim h^p \left(\frac{2\pi}{h^*}\right)^4 \frac{\cosh^4(h^*/2)}{2\sinh^2(h^*/2)} e^{-\pi^2/h^*} \left[1 + \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \omega_\ell h^{\ell p}\right] \ (h \to 0^+).$$

Existe una razón para conjeturar los desarrollos asintóticos anteriores para los valores de p tales que $p/2$ o $2/p$ son naturales que van más allá de los simples experimentos numéricos. Esta razón estriba en que, como $h^* = \operatorname{arccosh}[\cosh(h) + h^p/2]$, si $p/2 \in \mathbb{N}$ (respectivamente, $2/p \in \mathbb{N}$), entonces el cuadrado de h^* depende analíticamente de h^2 (respectivamente, h^p).

Como ultima observación, queremos resaltar que los resultados obtenidos para $0 < p < 2$ son inesperadamente buenos, en cierto sentido. Para explicar esto recordemos que estamos tomando McMillan como problema no perturbado. Como tiene una separatriz podemos usar técnicas de Melnikov, que son de carácter puramente perturbativo. Observamos que el cambio de escala $(X, Y) = (hx, hy)$ transforma a McMillan en la aplicación lineal $J : (X, Y) \mapsto (Y, -X)$ más una perturbación $\mathcal{O}(h^2)$ y transforma a $F_{h,\varepsilon}$ en McMillan más términos $\mathcal{O}(\varepsilon)$. Luego cuando $\varepsilon = h^p$ con $0 < p < 2$, McMillan no es la parte dominante del problema y no "deberíamos" usar técnicas perturbativas en un problema que no lo es. Además, lo normal en un problema de perturbación singular como este (singular pues la separatriz desaparece para $h = 0$), es trabajar con perturbaciones de orden una potencia (natural) del parámetro singular, que en este caso resulta ser h^2. Esta es una razón adicional para conjeturar la veracidad de los desarrollos cuando $p/2 \in \mathbb{N}$.

4 Detalles de los cálculos numéricos

Debido al pequeño tamaño de los ángulos de escisión, las curvas invariantes locales deben ser desarrolladas a orden elevado y los cálculos se han de hacer con rutinas de múltiple precisión. El primer punto nos permite tomar los iterados iniciales relativamente lejos del punto débilmente hiperbólico y así alcanzar la intersección homoclínica en pocas iteraciones. El segundo punto es imprescindible para contrarrestar las cancelaciones que se producen en el cálculo de los ángulos de escisión, que pueden tener un orden de magnitud de 10^{-300} para perturbaciones no demasiado pequeñas (ver Tablas 1–4).

En la programación de las rutinas de múltiple precisión se han seguido los algoritmos contenidos en el libro de D.E. Knuth [Knu69].

Una vez dados los parámetros ε, h y los decimales correctos que debe tener el ángulo, el programa calcula de forma automática el número de decimales con los que debe trabajar la precisión múltiple y el orden al cual se deben desarrollar las curvas invariantes, de forma que el tiempo de cómputo sea mínimo. Para los ángulos menores (entre 10^{-260} y 10^{-300}) y pidiendo (al menos) 75 decimales correctos, se han usado aproximadamente 400 decimales y las curvas invariantes se han desarrollado a orden 200. El tiempo de cómputo en estos casos (en un Pentium a 100) ronda los 30 segundos. El cálculo de ángulos mayores que 10^{-50} con 50 cifras decimales correctas nunca excedía el par de segundos. Las primeras versiones de este programa eran unas 15 veces más lentas (en el cálculo de los menores ángulos). Agradecemos los comentarios y ideas de C. Simó, que nos han permitido mejorarlos substancialmente.

Es importante remarcar que la aplicación "test" escogida se puede evaluar rápidamente, pues sólo necesita 1 división, 2 productos y 3 sumas. Este hecho es clave para poder hacer los cálculos con varias centenas de dígitos decimales, en poco tiempo. Aplicaciones definidas con funciones trascendentes harían este estudio más costoso. En aplicaciones definidas como la aplicación de Poincaré de un flujo continuo (como en el caso del péndulo rápidamente forzado estudiado en [BO93]), este problema sería aún más grave.

5 Futuras vías de investigación

Para acabar vamos a discutir varios puntos que convendría estudiar, para tener una panorámica más amplia y clara sobre el fenómeno de la escisión exponencialmente pequeña de separatrices en el campo de las aplicaciones. Nos centramos en los aspectos puramente experimentales y numéricos del tema, de acuerdo con el espíritu de esta comunicación. Parte de estos problemas se tratarán en una versión ampliadada de este trabajo [DR95b].

1) Centrándonos en el caso $p/2 \in \mathbb{N}$, hemos conjeturado que $\alpha = h^p \mathcal{B}_1(h^*)[1+\rho_{\mathrm{b}}(h)]$, donde $\rho_{\mathrm{b}}(h) \sim h^{p-2}\sum_{\ell\in\mathbb{N}} \omega_\ell h^{2\ell}$, para unas ciertas constantes ω_ℓ. Trabajando con tantas cifras decimales como sea posible (probablemente se necesitarán más de 1000), podríamos calcular por extrapolación varias de estas constantes ω_ℓ, al menos aproximadamente. Esto nos permitiría estudiar el comportamiento asintótico de las constantes ω_ℓ para ℓ grande. La importancia de este estudio estriba en que si el crecimiento de ω_ℓ resultara ser como mucho factorial, o sea $|\omega_\ell| \le ab^{2\ell}(2\ell)!$, para unas ciertas $a, b > 0$, la serie $\sum_{\ell\in\mathbb{N}} \omega_\ell h^{2\ell}$ sería Borel-sumable (aunque probablemente es divergente) y por tanto las técnicas de resurgencia [Sau95] para probar analíticamente la validez de las fórmulas conjeturadas podrían ser aplicadas.

2) Los mejores resultados los hemos obtenido cuando la perturbación no afectaba a la parte lineal del problema no perturbado. La pregunta natural que aparece es: ¿si la perturbación que consideramos no tiene parte lineal, la predicción dada por Melnikov será válida en un rango más amplio de valores de p? Por ejemplo, podemos estudiar la perturbación cúbica $P(x,y) = (0, q(y))$, con $q(y) = y^3$. El coste de evaluar la aplicación perturbada con esta perturbación concreta no aumenta respecto la perturbación lineal. En [DR95a] se prueba que en este caso la fórmula asintótica del ángulo de escisión es

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(h) &= \frac{\sinh^2(h)\cosh^4(h/2)}{6\sinh^2(h/2)}\left(\frac{2\widehat{K}}{h}\right)^4 \widehat{m}(1-\widehat{m})\left[1+\left(\frac{2\widehat{K}}{h}\right)^2(1-2\widehat{m})\right] \\ &= \left(\frac{2\pi}{h}\right)^4\left[1+\left(\frac{\pi}{h}\right)^2\right]\frac{\sinh^2(h)\cosh^4(h/2)}{6\sinh^2(h/2)}\,\mathrm{e}^{-\pi^2/h}\left[1+\mathcal{O}(\mathrm{e}^{-\pi^2/h})\right],\end{aligned}$$

donde $\widehat{K} = K(\widehat{m})$ estando $\widehat{m}$ determinado por $K(1-\widehat{m})/K(\widehat{m}) = \pi/h$, como antes. Esta fórmula sirve como punto de partida para el nuevo estudio.

3) Se pueden estudiar otro tipo de aplicaciones planas, para las cuales también existan fórmulas asintóticas del ángulo de escisión. El billar [Bir27] en curvas cercanas a la circunferencia es el ejemplo más famoso [DR95a]. Sin embargo, debemos tener en cuenta que los cálculos serían más costosos, pues el cálculo de la aplicación billar requiere resolver las ecuaciones implícitas dadas por la función generatriz.

4) Otro punto interesante, consiste en calcular áreas de lóbulos (regiones limitadas por las curvas invariantes perturbadas entre dos intersecciones consecutivas de las mismas), en lugar de ángulos. El área es invariante pues estamos estudiando aplicaciones que la conservan, mientras que el ángulo de escisión no lo es. En consecuencia, parece más razonable calcular áreas, aunque su cálculo es más complicado y costoso. En cualquier caso, usando métodos variacionales se pueden encontrar fórmulas para el cálculo de áreas que no requieran integrar y tambien expresiones analíticas asintóticas de las mismas [DR95c, DR95d].

5) Muy importante (y considerablemente más difícil) sería ver que pasa en dimensiones superiores, de cara a estudiar fenómenos de difusión de Arnold. Para ello, el primer paso es generalizar el método de Melnikov a las aplicaciones simplécticas. Los primeros pasos en esta dirección están contenidos en [DR95c, DRS95, DR95d]. Por ejemplo, en [DR95d] se estudia una aplicación multidimensional de tipo McMillan, obteniéndose fórmulas asintóticas explícitas para el *área simpléctica* (es el análogo multidimensional al área de lóbulos en el problema plano) entre órbitas homoclínicas. Este área resulta ser exponencialmente pequeña en el parámetro de hiperbolicidad h, para algunos pares de órbitas homoclínicas. Por tanto, el experimento consistiría en ver si la predicción obtenida por técnicas tipo Melnikov es válida en ese caso, al igual que lo hemos visto aquí.

Para acabar, conviene remarcar que los estudios teóricos son el objetivo final. Por ejemplo, ahora se puede emprender con garantías la desmotración de las fórmulas asintóticas obtenidas. Sin embargo, la experiencia muestra (ampliamente) la dificultad de probar teóricamente las fórmulas en los casos cercanos al límite, es decir, cuando el valor de p está cerca del punto donde los experimentos numéricos muestran que la predicción de Melnikov empieza a fallar. A causa de esto, parece razonable centrarse primero en el caso más simple, que en nuestra situación resulta ser $p = 4, 6, 8, \ldots$, por los comentarios hechos al final de la sección 3.

Agradecimientos

La investigación de Amadeu Delshams ha sido parcialmente financiada por las ayudas EC (ref. ERBCHRXCT940460), DGICYT (ref. PB94-0215) y CIRIT (ref. GRQ93-1135). La investigación de Rafael Ramírez-Ros ha sido financiada por la ayuda de la U.P.C. número PR9409.

Es un placer agradecer a Àngel Jorba toda la ayuda que nos ha prestado durante el diseño y programación de las rutinas de múltiple precisión y a Carles Simó el interés y las ideas que nos han permitido mejorar sustancialmente los programas. Además los autores aprecian las conversaciones mantenidas con Antoni Benseny y Ernest Fontich sobre el tema.

Referencias

[BO93] A. Benseny y C. Olivé. High precision angles between invariant manifolds for rapidly forced Hamiltonian systems. Editores: C. Perelló, C. Simó y J. Solà-Morales, International Conference on Differential Equations (*$\mathcal{E}qua\frac{\partial i}{\partial t}ff$ 91*), volumen 1, 315–319. World Scientific, (1993).

[Bir27] G.D. Birkhoff. *Dynamical Systems.* A.M.S. Publications, 1927.

[DR95a] A. Delshams y R. Ramírez-Ros. Poincaré-Melnikov-Arnold method for analytic planar maps. Por aparecer en *Nonlinearity*, (1995).

[DR95b] A. Delshams y R. Ramírez-Ros. Melnikov methods and exponentially small splitting of separatrices for planar maps: an experimental study. Preprint en progreso (1995).

[DR95c] A. Delshams y R. Ramírez-Ros. Poincaré-Melnikov-Arnold method for symplectic maps. NATO Advanced Study Institute on *Hamiltonian Systems with three or more degrees of freedom* ($3D\mathcal{HAM}$). Por aparecer en los proceedings. S'Agaro, Julio de 1995.

[DR95d] A. Delshams y R. Ramírez-Ros. Melnikov potential for exact symplectic maps. Preprint en progreso (1995).

[DRS95] A. Delshams, R. Ramírez-Ros y T. Seara. Splitting of separatrices in Hamiltonian systems and symplectic maps. NATO Advanced Study Institute on *Hamiltonian Systems with three or more degrees of freedom* ($3D\mathcal{HAM}$). Por aparecer en los proceedings. S'Agaro, Julio de 1995.

[FS90] E. Fontich y C. Simó. The Splitting of separatrices for analytic diffeomorphisms. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, 10:295–318 (1990).

[GPB89] M. L. Glasser, V. G. Papageorgiou y T. C. Bountis. Melnikov's function for two-dimensional mappings. *SIAM Jour. Appl. Math.*, 49(3):692–703 (1989).

[GH83] J. Guckenheimer y P. Holmes. *Nonlinear Oscilations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*, volumen 42 de Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, New York, Heildeberg, Berlin (1983).

[Knu69] D.E. Knuth. *The art of computer programing, vol 2: Seminumerical algorithms.* Addinson-Wesley Publishing Company, Reading, Mass (1969).

[McM71] E. M. McMillan. A problem in the stability of periodic systems. In *Topics in modern physics*, páginas 219–244. Colorado Assoc. Univ. Press (1971).

[Sau95] D. Sauzin. Résurgence paramétrique et exponentielle petitesse de l'écart des séparatrices du pendule rapidament forcé. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 45(2):453–511 (1995).

[Sur89] Yu B. Suris. Integrable mappings of the standard type. *Func. Anal. and Appl.*, 23:74–76 (1989).