SOLUCIONES EXPLICITAS PARA UNA CLASE DE SISTEMAS ACOPLADOS EN DIFERENCIAS NO AUTONOMOS DE SEGUNDO ORDEN CON CONDICIONES INICIALES *

E. Defez, E. Ponsoda
Departamento de Matemática Aplicada, Univ. Politécnica de Valencia, Spain

Abstract

En este trabajo estudiamos sistemas acoplados en diferencias no autónomos de segundo orden con valores frontera. Damos condiciones de existencia de soluciones en forma cerrada de estos problemas en función de los datos y de las soluciones de una ecuación matricial algebraica asociada al problema. Nuestro enfoque evita incrementar la dimensión del problema y la expresión de la solución involucra el cálculo de inversas generalizadas de matrices.

Palabras Clave: Sistema Acoplado en Diferencias,Problema de valores frontera, Ecuación matricial algebraica, Solución en forma cerrada,Sistemas singulares, Sistemas no autónomos.
A.M.S.(MOS) subject clasification. 30A10, 15A24.

1 Introducción

En este trabajo $\mathbb{C}^{p\times p}$ denotará el conjunto de todas las matrices complejas $p\times p$. En muchas aplicaciones que involucran sistemas discretos los coeficientes pueden ser no autónomos. Sistemas acoplados de ecuaciones de segundo orden en diferencias no autónomos aparecen al discretizar sistemas acoplados de ecuaciones en derivadas parciales no autónomos [11], o sistemas acoplados de ecuaciones diferenciales ordinarias con tiempo variable [2].También aparecen en la descripción de problemas relativos a economía multisectorial o en modelos de población [7, 8]. En este trabajo consideramos sistemas acoplados no autónomos de segundo orden del tipo

$$A_2(n)X(n+2)+A_1(n)X(n+1)+A_0(n)X(n)=f(n), \quad 0\leq n\leq N-2 \tag{1}$$

$$E_i(0)X(0)+E_i(1)X(1)+E_i(2)X(N-1)+E_i(3)X(N)=E_i(4), \quad 1\leq i\leq s \tag{2}$$

*Este trabajo ha sido realizado bajo la financiación de la Generalitat Valenciana, Proyecto GV1118/93

donde $A_j(m)$, $E_i(k)$, para $0 \leq j \leq 2$, $1 \leq i \leq s$, $0 \leq k \leq 3$ son matrices en C^{pxp}, y $X(m)$ y $E_i(4)$ son vectores en $C^{\,p}$.

En la sección 2 trabajaremos con la solución del sistema en diferencias (1) y estudiaremos condiciones para transformar (1) en un sistema autónomo del tipo

$$EY(n+2) + FY(n+1) + GY(n) = g(n) \tag{3}$$

tal que, para algún número complejo λ se satisfaga la relación de regularidad

$$\lambda^2 E + \lambda F + G \quad es\ invertible \tag{4}$$

Una solución analítica en forma cerrada del sistema (1) se propondrá en la sección 3 por medio de una solución de la ecuación matricial algebraica

$$EZ^2 + FZ + G = 0 \tag{5}$$

En la sección 4, daremos condiciones de existencia y soluciones en forma cerrada de los problemas (1)-(2). Una versión continua de este trabajo se puede encontrar en [7].

Si S es una matriz en $C^{\,pxp}$, denotaremos por $S^{\dagger}$ su seudoinversa Moore-Penrose, y para una matriz cuadrada B en $C^{\,pxp}$ denotaremos por $B^{\mathcal{D}}$ la inversa Drazin de B. Un resumen de los usos y propiedades de estas inversas generalizadas puede encontrarse en[4, 10]. El cálculo efectivo de $S^{\dagger}$ puede hacerse usando Matlab, [10]. Un algoritmo para calcular $B^{\mathcal{D}}$ se ha presentado recientemente en [1].

2 Transformación del sistema no autónomo.

En esta sección estamos interesados en la transformación de la ecuación (1) en una ecuación del tipo (3) para matrices apropiadas E, F y G en $C^{\,pxp}$. Consideremos el cambio

$$X(n) = L(n)Y(n) \tag{6}$$

donde L(n) es una matriz invertible en $C^{\,pxp}$ a determinar. Sustituyendo (6) en la ecuación (1) tenemos

$$A_2(n)L(n+2)Y(n+2) + A_1(n)L(n+1)Y(n+1) + A_0(n)L(n)Y(n) = f(n) \tag{7}$$

Supongamos que se satisfacen las tres propiedades siguientes

Existe un número complejo λ tal que

$$\lambda^2 A_2(n-2) + \lambda A_1(n-1) + A_0(n) \quad es\ invertible\ para\ n \geq 2 \tag{8}$$

y las siguientes sucesiones de matrices son constantes

$$A_2(n)[\lambda^2 A_2(n) + \lambda A_1(n+1) + A_0(n+2)]^{-1}\ ,\ n \geq 0 \tag{9}$$

$$A_1(n)[\lambda^2 A_2(n-1) + \lambda A_1(n) + A_0(n+1)]^{-1} \tag{10}$$

entonces tomando

$$L(n) = \left[\lambda^2 A_2(n-1) + \lambda A_1(n) + A_0(n+1)\right]^{-1}, \quad n \geq 1 \tag{11}$$

la ecuación (7) queda de la forma

$$EY(n+2) + FY(n+1) + GY(n) = f(n) \tag{12}$$

donde para todo $n \geq 0$ las siguientes matrices son independientes de n,

$$E = A_2(n)L(n+2) \ ; \quad F = A_1(n)L(n+1) \ ; \quad G = A_0(n)L(n) \tag{13}$$

y satisfacen la condición

$$\lambda^2 E + \lambda F + G = I \tag{14}$$

Notar que la relación dada en (14) nos permitirá de ahora en adelante eliminar la matriz G de la ecuación (12).

3 Problemas de valores iniciales

Comencemos esta sección con el problema de encontrar una solución invertible X_0 de la ecuación matricial algebraica (5), bajo la condición de regularidad (4). Sea λ un número complejo que satisface (14),entonces un simple cálculo utilizando (14)permite comprobar que X_0 es una solución de (5) si y solo si $Z_0 = X_0 - \lambda I$ es una solución de la ecuación

$$EZ^2 + (2\lambda E + F)Z + I = 0 \tag{15}$$

El siguiente resultado nos facilita un método para encontrar una solución Z_0 de la ecuación (15)

TEOREMA 1 *Sean E, F matrices en C^{pxp}, sea λ un número complejo, entonces la ecuación matricial algebraica (15) tiene solución si y solo si existe una matriz invertible M$\in$ C^{2px2p} con $M = [M_{ij}]_{1 \leq i,j \leq 2}$, $M_{ij} \in C^{pxp}$ y M_{i1} invertible para i=1,2, tal que para algunas matrices X_{ij} in C^{pxp}, $1 \ \leq i,j \leq \ 2$ se satisface*

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ -E & -2\lambda E - F \end{bmatrix} M = M \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ 0 & X_{22} \end{bmatrix} \tag{16}$$

En este caso, una solución de (15) está dada por $Z_0 = M_{11}M_{21}^{-1}$

Demostración. Primero de todo, notemos que cualquier solución de la ecuación (15) es invertible, y haciendo el cambio $W = Z^{-1}$, tenemos Z_0 es una solución de (15) si y solo si $W_0 = Z_0^{-1}$ es una solución invertible de la ecuación

$$W^2 + (2\lambda E + F)W + E = 0 \tag{17}$$

Sea W_0 una solución invertible de (17), entonces, se sigue que

$$\begin{bmatrix} I \\ W_0 \end{bmatrix} W_0 = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -E & -2\lambda E - F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ W_0 \end{bmatrix} \tag{18}$$

Así, el subespacio $S = imag \begin{bmatrix} I \\ W_0 \end{bmatrix}$ es un subespacio invariante en C ^{2p} del operador $T = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -E & -2\lambda E - F \end{bmatrix}$ y una base V_1 de este subespacio S se compone por los vectores columna de $\begin{bmatrix} I \\ W_0 \end{bmatrix}$. Completemos los vectores de V_1 con un conjunto V_2 de n vectores tales que $V = \{V_1, V_2\}$ es una base de C ^{2p} y la matriz del operador T en la base V queda de la forma $\begin{bmatrix} W_0 & A \\ 0 & B \end{bmatrix}$ para algunas matrices A, B en C ^{pxp}.

Se cumple entonces que

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ -E & -2\lambda E - F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & R \\ W_0 & U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & R \\ W_0 & U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_0 & A \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

para algunas matrices R, U en C ^{pxp}. Esto significa que tenemos una ecuación del tipo (18) donde $M = \begin{bmatrix} I & R \\ W_0 & U \end{bmatrix}$ y $Z_0 = M_{11} M_{21}^{-1} = I W_0^{-1}$ es una solución de (15)

Veamos a la inversa, supongamos que se verifica (18) para alguna matriz M. De (18) se sigue que

$$M_{21} = M_{11} X_{11} \quad ; \quad -E M_{11} - (2\lambda E + F) M_{21} = M_{21} X_{11}$$

y entonces

$$-E M_{11} - (2\lambda E + F) M_{21} = M_{21} M_{11}^{-1} M_{21}$$

multiplicando a la derecha la ecuación por M_{11}^{-1} se tiene

$$(M_{21} M_{11}^{-1})^2 + (2\lambda E + F) M_{21} M_{11}^{-1} + E = 0$$

Así $W_0 = M_{21} M_{11}^{-1}$ es una solución invertible de (17) y $Z_0 = M_{11} M_{21}^{-1}$ es una solución de (15) $.c.q.d.$

Efectuando ahora el cambio

$$Y(n) = X_0^n P(n) \quad , \quad n \geq 0 \tag{19}$$

donde $X_0 = Z_0 + \lambda I$

de (5),(12),(19), obtenemos

$$E R(n+1) + (F + E X_0) R(n) = f(n) \; , \quad n \geq 0 \tag{20}$$

donde

$$R(n) = X_0^{n+1} (P(n+1) - P(n)) \; , \quad n \geq 0 \tag{21}$$

de (15) y (5) tenemos

$$(EX_0 + E\lambda + F)(X_0 - \lambda I) + I = 0 \tag{22}$$

y $(EX_0 + E\lambda + F)^{-1} = \lambda I - X_0$

Definamos las matrices $\hat{E}$, $\hat{F}$ y $\hat{f}(n)$ por

$$\begin{aligned} \hat{E} &= (\lambda I - X_0)^{-1} E & (23) \\ \hat{F} &= (\lambda I - X_0)^{-1}(F + EX_0) & (24) \\ \hat{f}(n) &= (\lambda I - X_0)^{-1} f(n) & (25) \end{aligned}$$

y sea k el índice de la matriz $\hat{E}$, entonces por el teorema 3.6.2 de [3], pag 68, la solución de (20) está dada por

$$\begin{aligned} R(n) &= (\hat{E}^{\mathcal{D}}\hat{F})^n \hat{E}\hat{E}^{\mathcal{D}} Q + \hat{E}^{\mathcal{D}} \sum_{i=0}^{n-1} (\hat{E}^{\mathcal{D}}\hat{F})^{n-i-1} \hat{f}(i) - \\ &- (I - \hat{E}\hat{E}^{\mathcal{D}}) \sum_{i=0}^{k-1} (\hat{E}\hat{F}^{\mathcal{D}})^i \hat{F}^{\mathcal{D}} \hat{f}(n+i) \ , \quad n \geq 1 \end{aligned} \tag{26}$$

$$R(0) = \hat{E}\hat{E}^{\mathcal{D}} Q + W$$

donde

$$W = -(I - \hat{E}\hat{E}^{\mathcal{D}}) \sum_{i=0}^{k-1} (\hat{E}\hat{F}^{\mathcal{D}})^i \hat{F}^{\mathcal{D}} \hat{f}(i) \tag{27}$$

y Q es un vector arbitrario en C ^{p}

De (21) tenemos

$$\begin{aligned} P(n) &= P(0) + \sum_{i=2}^{n} X_0^{-i} R(i-1) + X_0^{-1} R(0), \quad n \geq 2 & (28) \\ P(1) &= P(0) + X_0^{-1} R(0) \end{aligned}$$

y de (26), (27), (28) se sigue

$$\begin{aligned} P(n) &= P(0) + \sum_{i=1}^{n} X_0^{-i} (\hat{E}^{\mathcal{D}}\hat{F})^{i-1} \hat{E}\hat{E}^{\mathcal{D}} Q + \\ &+ \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=0}^{i-2} X_0^{-i} \hat{E}^{\mathcal{D}} (\hat{E}^{\mathcal{D}}\hat{F})^{i-j-2} f(j) - \\ &- \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=0}^{k-1} X_0^{-1} (I - \hat{E}\hat{E}^{\mathcal{D}})(\hat{E}\hat{F}^{\mathcal{D}}) \hat{F}^{\mathcal{D}} \hat{f}(i-1+j) + X_0^{-1} W \quad n \geq 2 \end{aligned} \tag{29}$$

$$P(0) = P, \quad P(1) = P + X_0^{-1} \hat{E}\hat{E}^{\mathcal{D}} Q + X_0^{-1} W \tag{30}$$

donde P es un vector arbitrario en C ^{p}

De (19) y (29) tenemos

$$Y(n) = X_0^n P + \sum_{i=1}^{n} X_0^{n-i} (\hat{E}^{\mathcal{D}} \hat{F})^{i-1} \hat{E} \hat{E}^{\mathcal{D}} Q + R(n) \quad n \geq 2 \tag{31}$$

donde

$$\begin{aligned} R(n) &= X_0^{n-1} W + \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=0}^{i-2} X_0^{n-i} \hat{E}^{\mathcal{D}} (\hat{E}^{\mathcal{D}} \hat{F})^{i-j-2} \hat{f}(j) - \\ &- \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=0}^{k-1} X_0^{n-i} (I - \hat{E} \hat{E}^{\mathcal{D}})(\hat{E} \hat{F}^{\mathcal{D}})^j \hat{F} \hat{f}(i-1+j) \end{aligned} \tag{32}$$

$$Y(0) = P \ , \quad Y(1) = X_0 P + \hat{E} \hat{E}^{\mathcal{D}} Q + W \tag{33}$$

Finalmente,de (6), (31), (32), (33) tenemos

$$\begin{aligned} X(n) &= L(n) X_0^n P + L(n) R(n) + \\ &+ \sum_{i=1}^{n} L(n) X_0^{n-1} (\hat{E}^{\mathcal{D}} \hat{F})^{i-1} \hat{E} \hat{E}^{\mathcal{D}} Q \ , \quad n \geq \ 2 \end{aligned} \tag{34}$$

donde

$$X(0) = L(0) P \quad ; \quad X(1) = L(1)[X_0 P + \hat{E} \hat{E}^{\mathcal{D}} Q + W] \tag{35}$$

Observar que de esta forma tenemos resuelta la ecuación (1).Para resolver la ecuación (1) con las condiciones dadas en (2),consideremos ahora el problema de valores iniciales

$$A_2(n) X(n+2) + A_1(n) X(n+1) + A_0(n) X(n) = f(n) \tag{36}$$

$$X(0) = C_0 \quad , \quad X(1) = C_1$$

De (35) tenemos

$$C_0 = L(0) P \quad ; \quad C_1 = L(1) X_0 P + L(1)[\hat{E} \hat{E}^{\mathcal{D}} Q + W]$$

Así

$$P = [L(0)]^{-1} C_0 \tag{37}$$

$$\hat{E} \hat{E}^{\mathcal{D}} Q = [L(1)]^{-1} C_1 - X_0 [L(0)]^{-1} C_0 - W \tag{38}$$

y del teorema 2.3.2 de [4], y del hecho que $Y = \hat{E} \hat{E}^{\mathcal{D}}$ es una g-inversa de sí misma, se sigue que la ecuación (38) es resoluble para Q, si y solo si

$$(I - \hat{E} \hat{E}^{\mathcal{D}})([L(1)]^{-1} C_1 - X_0 [L(0)]^{-1} C_0 - W) = 0 \tag{39}$$

y la solución de (38) es

$$Q = [L(1)]^{-1} C_1 - X_0 [L(0)]^{-1} C_0 - W \tag{40}$$

Así, la solución de (36) está dada por

$$\begin{aligned} X(n) &= L(n)X_0^n[L(0)]^{-1}C_0 + L(n)R(n) + \\ &+ \sum_{i=1}^{n} L(n)X_0^{n-1}(\hat{E}^{\mathcal{D}}\hat{F})^{i-1}([L(1)]^{-1}C_1 - X_0[L(0)]^{-1}C_0 - W) \ para \ n \geq 2 \end{aligned} \tag{41}$$

donde $X(0) = C_0$, $X(1) = C_1$

Ejemplo 1 *Consideremos el sistema acoplado en diferencias*

$$\begin{aligned} (1+2^{n+2})^{-1}\begin{bmatrix} 2^{n+2}-1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} X(n+2) &\quad + \\ +(2+2^{n+2})^{-1}\begin{bmatrix} 2^{n+1} & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} X(n+1) &\quad + \\ +(2+2^{n+1})^{-1}\begin{bmatrix} 2-2^{n} & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} X(n) &= \begin{bmatrix} \frac{5}{2}+n \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{42}$$

Un simple cálculo prueba que λ=1 satisface las condiciones (8)-(10), L(n) definido por (11) y las matrices E, F, G definidas por (13) toman los valores

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ F = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix};\ G = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix};\ L(n) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2^{n} \end{bmatrix}$$

Una solución invertible X_0 de la ecuación (5) es $X_0 = -I$ y de (31), la solución general de la ecuación reducida (12) esta dada por

$$Y(n) = (-1)^n P + (\frac{2}{3})[(\frac{1}{2})^n + (-1)^{n-1}]\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q + \begin{bmatrix} n \\ -1 \end{bmatrix}$$

con $P, Q \in C^{\,2}$

4 Problemas con valores frontera

Supongamos ahora que para algún complejo λ los coeficientes matriciales de (1) satisfacen las condiciones (8)-(10). Sea L(n) definida por (11) y sean E, F, G definidas por (13). De los resultados de la Sección 3, si imponemos que X(n) definida por (41) satisfaga las condiciones frontera (2), tenemos que los vectores P, Q en $C^{\,p}$ deben ser soluciones del sistema algebraico

$$S\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 \\ \vdots \\ G_s \end{bmatrix} \tag{43}$$

donde $S = (S_{ij})_{1\leq i\leq s,\ 1\leq j\leq 2}$ esta definida por

$$S_{i,1} = E_i(0)L(0) + E_i(1)L(1)X_0 + E_i(2)L(N-1)X_0^{N-1} + E_i(3)L(N)X_0^{N} \tag{44}$$

$$
\begin{aligned}
S_{i,2} &= E_i(1)L(1)\hat{E}\hat{E}^{\mathcal{D}} + \\
&+ E_i(2)\sum_{i=1}^{N-1} L(N-1)X_0^{N-2}(\hat{E}^{\mathcal{D}}\hat{F})^{i-1}\hat{E}\hat{E}^{\mathcal{D}} + \\
&+ E_i(3)\sum_{i=1}^{N-1} L(N)X_0^{N-1}(\hat{E}^{\mathcal{D}}\hat{F})^{i-1}\hat{E}\hat{E}^{\mathcal{D}}
\end{aligned}
\tag{45}
$$

$$
G_i = E_i(4) - E_i(1)L(1)W - E_i(2)L(N-1)R(N-1) - E_i(3)L(N)R(N) \tag{46}
$$

para $1 \leq i \leq s$; X_0 es una solución invertible de (5), y R(n) está dado por (32)

Ahora, por el teorema 2.3.2 de [4], el sistema (43) es compatible si y solo si

$$
SS^{\dagger}\begin{bmatrix} G_1 \\ \vdots \\ G_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 \\ \vdots \\ G_s \end{bmatrix} \tag{47}
$$

y bajo (47), la solución general de (43) está dada por

$$
\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} = S^{\dagger}\begin{bmatrix} G_1 \\ \vdots \\ G_s \end{bmatrix} + (I - S^{\dagger}S)Y \ , \ Y \in \ C^{2p} \tag{48}
$$

Así, el siguiente resultado ha sido probado.

TEOREMA 2 *Supongamos que para algún número complejo λ las condiciones (8)-(10) se satisfacen, sean E, F, G definidas por (13) y sea X_0 una solución invertible de la ecuación matricial algebraica(5). Si $S = (S_{ij})$ y G_i, para $1 \leq i \leq s$, $1 \leq j \leq 2$, están definidas por (44)-(46) y R(n) esta definida por (32), entonces, el problema con valores frontera (1)-(2), para $N \geq 3$ tiene solución si y solo si se cumple la condición (47). En este caso, la solución general del problema (1)-(2) está dada por (34) donde L(n) está definida por (11) y los vectores P, Q en $C^{\,p}$ toman la forma (48) para un valor arbitrario de Y en $C^{\,2p}$.*

References

[1] K.M. Anstreicher, U.G.Rotblum, Using Gauss-Jordan Elimination to Compute the index,generalized Nullspaces and the Drazin inverse. Linear Algebra Appl. 85: 221-239 (1987)

[2] M.J.Balas, Trends in Large Space Structures:Fondest Hopes, Wildest Dreams, IEEE Trans. Aut. Control, Vol AC-27(1982),522-535

[3] S.L.Campbell, Singular Systems of Differential Equations, Pitman Pubs.Co.,1980

[4] S.L.Cambell and C.D.Meyer,Jr, Generalized Inverses of Linear Transformations, Pitman Pub.Co.,1979

[5] E.L.Ince, Ordinary Differential Equations, Dover, 1927

[6] L.Jódar and E.Navarro, Analytic Solution of a Class of Singular Time Varying Second Order Value Problems, Dynamic Systems and Appls., 1(1992), 317-328.

[7] W.Leontief, Essays in Economics, M.E.Sharpe Inc.,N.Y.,1977.

[8] D.G.Luenberger and A.Arbel, Singular dynamic Leontief systems, Econometria 45 (1977), 991-995

[9] C.B.Moler, MatLab User's Guide, Technical Report CS81-1(1980)Depart.Computer Scie.,Univ.of New Mexico, Albunquerque, New Mexico 87131.

[10] C.R.Rao ans S.K.Mitra, Generalized Inverse of Matrices and its Applications, John Wiley, 1971.

[11] V.Vemuri, W.J.Karplus, Digital Computer Treatment of Partial Differential Equations, Prentice Hall Inc.,Englewood Cliffs, New Jersey, 1981.