METODO DE PASOS FRACCIONARIOS Y MALLAS DE SHISHKIN PARA PROBLEMAS DE CONVECCION-DIFUSION CON CONVECCION DOMINANTE

C. Clavero(1), J.C. Jorge(2) y F. Lisbona(3)

(1) Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Zaragoza, María de Luna, 3. 50015 Zaragoza.

(2) Departamento de Matemáticas e Informática, Universidad Pública de Navarra, Pamplona.

(3) Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Zaragoza, Edificio de Matemáticas, Ciudad Universitaria, 50009 Zaragoza.

Abstract. In this paper we present a numerical method to solve singularly perturbed parabolic problems. The method combine an alternating direction method and the upwind scheme for one dimensional problems, on some special piecewise uniform meshes. On these meshes, we prove that the proposed method is uniformly convergent with respect to the singular perturbation parameter. We show some examples which confirm experimentally the theoretical result obtained. The resulting method have a low computational cost and can be efficiently implemented for parallel computation.

1. Introducción. En este trabajo estudiamos una clase de métodos numéricos utilizados para la integración de problemas parabólicos de convección-difusión con término convectivo dominante. La ecuación diferencial que modela estos fenómenos viene dada por

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon \Delta u + \overrightarrow{v}\overrightarrow{\nabla} u + ku = f(x, y, t),$$

donde ε es el parámetro de difusión, que puede ser muy pequeño ($0 < \varepsilon << 1$), $\overrightarrow{v} = (v_1(x,y), v_2(x,y))$, k y f son funciones suficientemente diferenciables y además suponemos que $k \geq 0$ y $v_i(x,y)$, $i = 1, 2$, tienen signo constante (para el estudio supondremos que $v_i(x,y) > \alpha > 0$ y en forma similar se procedería cuando son negativos).

Es conocido que, en general, la solución de estos problemas presenta un caracter multiescala, de manera que la solución varía de forma muy diferente en distintas regiones del dominio. A las regiones en las que la solución presenta una variación rápida se les denomina capas límite. Este especial comportamiento de la solución exacta del problema, tiene como consecuencia que, si se usan métodos estándar sobre mallas uniformes (diferencias finitas o elementos finitos) para su resolución, las soluciones obtenidas no aproximan a la solución exacta, a no ser que se utilicen un gran número de puntos en la malla (número que depende del valor del parámetro ε). Para evitar estas dificultades, es necesario diseñar métodos numéricos que sean uniformemente convergentes, es decir, métodos para los que el orden de convergencia y la constante de error sean independientes del valor del parámetro de difusión. Para construir tales métodos, dos vías distintas se han propuesto en los últimos años. Por un lado el uso de los llamados métodos de ajuste exponencial, en los que los coeficientes del método se adaptan al tipo de problema que se resuelve ([3]), y por otro la aproximación basada en el diseño de mallas especiales ([4], [5]). La dificultad inherente a los métodos de ajuste exponencial para problemas bidimensionales, nos condujo en un trabajo previo ([1]) a usar una técnica que combinaba un método de direcciones alternadas y métodos de ajuste exponencial para problemas unidimensionales. No obstante esta técnica puede presentar dificultades a la hora de resolver ciertos casos especiales de capas límite que aparecen en el problema bidimensional.

Por otra parte, en los últimos años ha aparecido una clase de adaptación de mallados que es especialmente simple, llamadas mallas de Shishkin en referencia al matemático ruso G.I. Shishkin que fué quien las diseño ([9], [10]). Así, usaremos la técnica de trabajos anteriores, pero ahora sustituyendo los métodos de ajuste exponencial por un método estable estándar (el método upwind) definido sobre una malla de Shishkin especialmente construida para el problema que nos ocupa. En el trabajo probamos la convergencia uniforme del método numérico planteado y mostramos algunos resultados numéricos que confirman el resultado teórico. Señalar también que este método tiene un costo computacional muy bajo en comparación con los métodos genuinamente bidimensionales, así como la posibilidad de su implementación para ca+lculo en paralelo.

2. Construcción del método. Por simplicidad, vamos a ocuparnos del siguiente problema

$$(2.1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon\Delta u + \overrightarrow{v}\overrightarrow{\nabla} u + ku = f \text{ en } \Omega \times [0,T] \equiv [0,1]\times[0,1]\times[0,T], \\ u(x,y,0) = u_0(x,y) \text{ en } \Omega, \\ u(0,y,t) = u(1,y,t) = 0 \text{ en } [0,1]\times[0,T], \\ u(x,0,t) = u(x,1,t) = 0 \text{ en } [0,1]\times[0,T], \end{cases}$$

Para construir nuestro método, consideramos los siguientes operadores diferenciales

$$(2.2a)\qquad L_{x,\varepsilon} \equiv -\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial x^2} + v_1\frac{\partial}{\partial x} + k_1$$

$$(2.2b)\qquad L_{y,\varepsilon} \equiv -\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial y^2} + v_2\frac{\partial}{\partial y} + k_2$$

con $k_i \geq 0, i = 1,2$ y $k_1 + k_2 = k$. Notemos que $L_{x,\varepsilon}$ es una familia de operadores diferenciales cuyos coeficientes dependen de $y \in [0,1]$ como parámetro (análogo sería para $L_{y,\varepsilon}$). Asímismo, el segundo mienbro de la ecuación diferencial lo descomponemos en la forma $f(x,y,t) = f_1(x,y,t) + f_2(x,y,t)$. Para definir el método, en primer lugar usamos un proceso de discretización en tiempo mediante un método de pasos fraccionarios (ver Jorge-Lisbona [7]), de la forma siguiente:

$$(2.3)\qquad \begin{cases} a)\; u^0 = u_0(x,y), \\ b) \begin{cases} (I + \Delta t L_{x,\varepsilon})u^{n+\frac{1}{2}} = u^n + \Delta t f_1(t_{n+1}), \\ u^{n+\frac{1}{2}}(0,y) = u^{n+\frac{1}{2}}(1,y) = 0, \end{cases} \\ c) \begin{cases} (I + \Delta t L_{y,\varepsilon})u^{n+1} = u^{n+\frac{1}{2}} + \Delta t f_2(t_{n+1}), (f_1 + f_2 = f), \\ u^{n+1}(x,0) = u^{n+1}(x,1) = 0, \end{cases} \end{cases}$$

obteniendo una aproximación semidiscreta $u^n(x,y)$ a la solución $u(x,y,t)$ de (2.1) en los instantes de tiempo $t_n = n\Delta t$, resolviendo exactamente (2.3). El segundo paso consiste en obtener aproximaciones numéricas a la solución exacta del problema anterior. Para ello, definimos una malla $\Omega_{\varepsilon,h}$ como el producto tensorial $I_{x,\varepsilon,h} \times I_{y,\varepsilon,h}$ de mallas de Shishkin unidimensionales, construidas de la forma siguiente: para $I_{x,\varepsilon,h}$ (análogamente para $I_{y,\varepsilon,h}$), sea $h = \frac{1}{N}$ con $\frac{N}{4} \in \mathbb{N}$; definimos el parámetro

$$(2.4)\qquad \sigma = \min(\frac{1}{4}, m\varepsilon\log N)$$

donde m es una constante (que posteriormente será fijada), y dividimos el intervalo $[0,1]$ en los subintervalos $[0, 1-\sigma]$ y $[1-\sigma, 1]$, de manera que la malla final viene dada por

$$(2.5)\qquad I_{x,\varepsilon,h} \equiv \{0 = x_0, x_1, \ldots, x_{\frac{3N}{4}} = 1-\sigma, \ldots, x_N = 1\}$$

con $x_i = i\frac{4(1-\sigma)}{3N}, i = 0,\ldots,\frac{3N}{4}$ y $x_i = 1-\sigma+(i-\frac{3N}{4})\frac{4\sigma}{N}, i = \frac{3N}{4}+1,\ldots,N$. Sobre esta malla, las aproximaciones discretas u_h^n a la solución exacta $[u(t_n)]_h$, están dadas por la solución de

$$(2.6)\qquad \begin{cases} a)\quad u_h^0 = [u_0]_h; \\ b)\quad \begin{cases} (I + \Delta t L_{x,\varepsilon,h})u_h^{n+\frac{1}{2}} = u_h^n + \Delta t[f_1(x,y,t_{n+1})]_h, \\ u_h^{n+\frac{1}{2}}(0,y) = u_h^{n+\frac{1}{2}}(1,y) = 0, \\ y \in I_{y,\varepsilon,h}, \end{cases} \\ (c)\quad \begin{cases} (I + \Delta t L_{y,\varepsilon,h})u_h^{n+1} = u_h^{n+\frac{1}{2}} + \Delta t[f_2(x,y,t_{n+1})]_h, \\ u_h^{n+1}(x,0) = u_h^{n+1}(x,1) = 0, \\ x \in I_{x,\varepsilon,h}, \end{cases} \end{cases}$$

donde $L_{x,\varepsilon,h}$ y $L_{y,\varepsilon,h}$ son las discretizaciones de los operadores diferenciales $L_{x,\varepsilon}$ y $L_{y,\varepsilon}$ respectivamente, usando el método upwind.

En el resto del trabajo denotamos por C cualquier constante positiva independiente de los parametros ε, Δt y N.

3. Análisis de la convergencia. En está sección vamos a demostrar la convergencia uniforme de la solución numérica hallada a partir de (2.6) a la solución exacta de (2.1). Para ello estudiamos la convergencia del proceso de semidiscretización temporal y posteriormente la de la discretización espacial. Para el estudio de la semidiscretización temporal nos remitimos a tarabjos previos (ver [1], [2]) verificándose el siguiente

Teorema 1. *Supongamos que*

$$\{u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\} \subset \mathcal{C}^0[\bar{\Omega} \times [0,T]] \tag{3.1}$$

y que están acotadas independientemente de ε. *Entonces,*

$$E_{\Delta t} = \sup_{n \le \frac{T}{\Delta t}} \|u(t_n) - u^n\|_\infty \le C\Delta t. \tag{3.2}$$

Por tanto, la semidiscretización temporal es convergente.

Una vez que se tiene esta convergencia, analizamos la convergencia de la discretización espacial del esuqema upwind definido sobre la malla de Shishkin diseñada anteriormente.

El problema de perturbación sinugular resultante viene dado por

$$\begin{cases} a) & \begin{cases} T_{x,\varepsilon,\Delta t} w \equiv -\varepsilon \Delta t w''(x) + v_1(x,y)\Delta t w'(x) + (1 + \Delta t k_1(x,y))w(x) = \\ = u(x,y,t_n) + \Delta t f_1(x,y,t_{n+1}), \quad 0 < x < 1 \quad (y \text{ fijo}) \end{cases} \\ b) & w(0) = 0, \quad w(1) = 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

Con objeto de simplificar la notación, omitiremos la dependencia respecto a y de w. Para nuestro análisis suponemos que la solución de (3.3) verifica

$$w(x,\varepsilon) = w_1(x,\varepsilon) + z(x,\varepsilon), \tag{3.4}$$

donde

$$w_1(x,\varepsilon) = e^{-\frac{v_1(1)(1-x)}{\varepsilon}}, \tag{3.5a}$$

$$|z^{(i)}(x,\varepsilon)| \le C(1 + \varepsilon^{-i+1} e^{-\frac{\alpha(1-x)}{\varepsilon}}), \tag{3.5b}$$

y por tanto

$$|w^{(i)}(x,\varepsilon)| \le C(1 + \varepsilon^{-i} e^{-\frac{\alpha(1-x)}{\varepsilon}}). \tag{3.6}$$

Para aproximar $w(x,\varepsilon)$ consideramos el esquema upwind definido por

$$T_{x,\varepsilon,h,\Delta t} W_j \equiv r_j^- W_{j-1} + r_j^c W_j + r_j^+ W_{j+1} = f_j, \quad j = 1, \ldots, N-1 \tag{3.7a}$$

$$W_0 = 0, \quad W_N = 0 \tag{3.7b}$$

con

$$\begin{aligned} r_j^- &= \frac{-\varepsilon \Delta t}{h_j \tilde{h}_j} - \frac{v_{1,j}\Delta t}{h_j}, \quad r_j^+ = \frac{-\varepsilon \Delta t}{h_{j+1}\tilde{h}_j} \\ r_j^c &= 1 + \Delta t k_{1,j} - r_j^- - r_j^+, \quad f_j = u(x_j, y, t_n) + \Delta t f_1(x_j, y, t_{n+1}), \end{aligned} \tag{3.7c}$$

donde hemos denotado

$$h_j = x_j - x_{j-1},\ j = 1, \ldots, N, \quad \tilde{h}_j = \frac{h_j + h_{j+1}}{2},\ j = 1, \ldots, N-1$$
$$H = \max_j h_j \ \ \mathrm{y}\, \rho_j = \frac{h_j}{\varepsilon}, \quad j = 1, \ldots, N,$$

y los nodos $x_j \in I_{x,\varepsilon,h}$ dada por (2.4), (2.5).

El estudio de la convergencia uniforme de este método se basa en la técnica de las funciones de comparación introducida en [8]. En primer lugar, estudiamos el error local en los nodos interiores definido como

$$\tau_j = T_{x,\varepsilon,h,\Delta t}(w(x_j)) - (T_{x,\varepsilon,\Delta t} w)(x_j), \quad j = 1, \ldots, N-1.$$

Para acotar $|\tau_j|$ usamos desarrollos cuyo resto puede expresarse como

$$R_n(a, p, g) = g^{(n+1)}(\varphi)\frac{(p-a)^{n+1}}{(n+1)!}, \tag{3.8a}$$

o

$$R_n(a, p, g) = \frac{1}{n!}\int_a^p (p-s)^n g^{(n+1)}(s)ds. \tag{3.8b}$$

Un simple cálculo permite deducir que

$$\tau_j = -\frac{h_j}{2}\Delta t v_{1,j} w''(x_j) + r_j^- R_2(x_j, x_{j-1}, w) + r_j^+ R_2(x_j, x_{j+1}, w). \tag{3.9}$$

En el análisis suponemos que $\sigma = m\varepsilon \log N$ (en otro caso h es pequeño respecto a ε y el problema se analiza en forma clásica). Estudiaremos tres casos, dependiendo de la localización del punto x_j en la malla (sólo detallamos el primer caso y en los otros se procede de forma similar), que són: 1) $x_j = 1 - \sigma$, 2) $0 < x_j < 1 - \sigma$ y 3) $1 - \sigma < x_j < 1$. Para el caso 1), en función del valor de ρ_j, tenemos

i) Si $\rho_j \leq 1$, las estimaciones (3.6) para las derivadas de la solución, (3.8a) y las expresiones de los coeficientes del método, permiten probar que

$$|\tau_j| \leq C\Delta t(h_j + \varepsilon^{-2} e^{-\frac{\alpha(1-x_j)}{\varepsilon}}). \tag{3.10a}$$

ii) Si $\rho_j \geq 1$, escribimos el error local en la forma

$$\tau_j = r_j^- R_1(x_j, x_{j-1}, w) + r_j^+ R_1(x_j, x_{j+1}, w) + \Delta t \varepsilon w''(x_j)).$$

Usando ahora la descomposición dada por (3.4), denotando por τ_j^1, τ_j^2 la parte del error correspondiente a las funciones $z(x, \varepsilon)$ y $w_1(x, \varepsilon)$ respectivamente y usando (3.5b), (3.8a) y (3.7c) se tiene

$$|\Delta t \varepsilon z''(x_j)| \leq C\Delta t h_j + C\Delta t e^{-\frac{\alpha(1-x_j)}{\varepsilon}}$$

$$|r_j^- R_1(x_j, x_{j-1}, z)| \leq C\Delta t h_j + C\Delta t e^{-\frac{\alpha(1-x_j)}{\varepsilon}}$$

y

$$|r_j^+ R_1(x_j, x_{j+1}, z)| \leq C\Delta t h_j + C\Delta t e^{-\frac{\alpha(1-x_{j+1})}{\varepsilon}}.$$

Así,

$$|\tau_j^1| \le C\Delta t h_j + C\Delta t e^{-\frac{\alpha(1-x_{j+1})}{\varepsilon}}.$$

Para acotar $|\tau_j^2|$, procedemos de forma distinta, puesto que la función $w_1(x,\varepsilon)$ es conocida. Entonces,

$$\tau_j^2 = w_1(x_j,\varepsilon)[r_j^-(e^{-\frac{v_1(1)h_j}{\varepsilon}}-1) + r_j^+(e^{\frac{v_1(1)h_{j+1}}{\varepsilon}}-1) + \frac{\Delta t v_1(1)(v_1(1)-v_{1,j})}{\varepsilon}],$$

y acotamos por separado. Usando que $h_j = 4(1-2\sigma)/3N$ y $\sigma = m\varepsilon \log N/N$,

$$|r_j^-(e^{-\frac{v_1(1)h_j}{\varepsilon}}-1) + r_j^+(e^{\frac{v_1(1)h_{j+1}}{\varepsilon}}-1)| \le \frac{C\Delta t}{h_j},$$

$$|\Delta t \frac{v_1(1)(v_1(1)-v_{1,j})}{\varepsilon}| \le \frac{C\Delta t \sigma}{\varepsilon} \le \frac{C\Delta t}{h_j},$$

y por tanto

$$|\tau_j^2| \le \frac{C\Delta t}{h_j} e^{-\frac{\alpha(1-x_j)}{\varepsilon}}.$$

A partir de las estimaciones previas para $|\tau_j^1|$ y $|\tau_j^2|$, deducimos

$$|\tau_j| \le C\Delta t h_j + \frac{C\Delta t}{h_j} e^{-\frac{\alpha(1-x_j)}{\varepsilon}} + C\Delta t e^{-\frac{\alpha(1-x_{j+1})}{\varepsilon}}. \tag{3.10b}$$

Notemos que las cotas anteriores del error local no prueban la consistencia uniforme del método. Este problema se soslaya con las funciones de comparación del siguiente modo. Definimos

$$\Phi_{1,j}(\beta) = 1 + x_j, \quad \Phi_{2,j}(\beta) = \frac{1}{\prod_{i=j+1}^N \mu_i(\beta)}, \quad \text{con } \mu_i(\beta) = 1 + \beta \frac{h_i}{\varepsilon}$$

donde β es una constante que se elige posteriormente. Fácilmente se deduce

$$T_{x,\varepsilon,h,\Delta t}(\Phi_{1,j}(\beta)) = (1 + \Delta t k_{1,j})(1 + x_j) + v_{1,j}\Delta t > \Delta t\, \alpha > 0$$

y estudiando los mismos casos que para el error local, resulta

$$T_{x,\varepsilon,h,\Delta t}(\Phi_{2,j}(\beta)) \ge \frac{C(\beta)\Delta t}{\max\{\varepsilon, h_j\}} \Phi_{2,j}(\beta)$$

siempre que $\beta \le \alpha/2$.

Ahora ya estamos en disposición de obtener el resultado de convergencia del esquema upwind.

Teorema 2 *Sea $w(x,\varepsilon)$ la solución exacta del problema (3.3) y $\{W_j\}$ la solución numérica del esquema upwind (3.7) definido sobre la malla de Shishkin $I_{x,\varepsilon,h}$ dada por (2.4), (2.5). Entonces, eligiendo $m \ge \frac{1}{\alpha}$ y $\beta = \alpha/2$, existe una constante positiva C independiente de ε y N, tal que*

$$|w(x_j,\varepsilon) - W_j| \le C \frac{\log N}{N}. \tag{3.11}$$

Demostración. Sea $e_j = w(x_j, \varepsilon) - W_j$ el error global en x_j. Al igual que para la consistencia distinguimos tres casos, detallando solo el primero. Definiendo

$$K_1(h_j, \varepsilon) = Ch_j, \quad K_2(h_j, \varepsilon) = C\frac{h_j}{\varepsilon},$$

si $\rho_j \leq 1$ y

$$K_1(h_j, \varepsilon) = Ch_j, \quad K_2(h_j, \varepsilon) = C + Ch_j\mu_{j+1}(\beta)$$

si $\rho_j \geq 1$, tenemos

$$T_{x,\varepsilon,h,\Delta t}(K_1\Phi_{1,j}(\beta) + K_2\Phi_{2,j}(\beta)) \geq |\tau_j|,$$

y usando el principio del máximo discreto para el operador $T_{x,\varepsilon,h,\Delta t}$ junto con la condición $\beta m \geq 1$, resulta

$$|e_j| \leq Ch_j + \frac{C}{N^{2\beta m}} \leq CN^{-1}. \qquad \blacksquare$$

Señalar que bajo las hipótesis del teorema anterior, imponiendo $N^{-q} \leq C\Delta t$, con $0 < q < 1$, deducimos

$$|w(x_j, \varepsilon) - W_j| \leq C\Delta t \frac{\log N}{N^{1-q}}.$$

A partir de los resultados obtenidos para la semisdiscretización temporal y la discretización espacial, deducimos, por un razonamiento de recurrencia, (ver [2] para los detalles) el siguiente resultado de convergencia de la discretización total.

Teorema 3. *Sea u la solución de (2.1) y $\{u_h^n\}_n$ la solución de (2.6). Entonces. existe una constante positiva C tal que*

$$\|[u(t_n)]_h - u_h^n\|_\infty \leq C(\Delta t + h^{1-q}), \tag{3.12)}$$

con $0 < q < 1$.

4. Resultados numéricos. En esta sección, mostramos los resultados obtenidos con el método propuesto en la integración numérica de dos problemas diferentes. El *ejemplo 1* está dado por

$$\begin{cases} u_t - \varepsilon\Delta u + (1+y)u_x + (2x+1)u_y = f(x,y,\varepsilon,t), \\ u(0,y,t) = u(1,y,t) = 0, \quad y \in [0,1], t \in [0,5] \\ u(x,0,t) = u(x,1,t) = 0, \quad x \in [0,1], t \in [0,5] \\ u(x,y,0) = u_0(x,y), \quad x, y \in [0,1], \end{cases}$$

donde f y $u_0(x,y)$ son tales que la solución exacta es

$$u_\varepsilon(x,y,t) = e^{-t}x(1-x)y(1-y)(h_{1,\varepsilon}(x) + h_{1,\varepsilon}(y)), \qquad \text{con } h_{1,\varepsilon}(\zeta) = e^{-\frac{1-\zeta}{\varepsilon}}$$

y el *ejemplo 2* está dado por

$$\begin{cases} u_t - \varepsilon\Delta u + (3 - x^2 - yP2)u_x + (y^2+1)u_y + 2u = f(x,y,\varepsilon,t), \\ u(0,y,t) = u(1,y,t) = 0, \quad y \in [0,1], t \in [0,5] \\ u(x,0,t) = u(x,1,t) = 0, \quad x \in [0,1], t \in [0,5] \\ u(x,y,0) = 0, \quad x, y \in [0,1], \end{cases}$$

con

$$f(x,y,\varepsilon,t) = (1-x)(1-y)(e^x - 1)(e^y - 1).$$

En la resolución de ambos problemas la decomposición del término fuente viene dada por

$$f_1(x,y,t) = f(x,y,t) - f_2(x,y,t),$$
$$f_2(x,y,t) = f(x,0,t) + y(f(x,1,t) - f(x,0,t)).$$

En las siguientes tablas se muestran los errores máximos en los nodos de la malla, definidos por

$$E_{\varepsilon,N,\Delta t} = \max_{n,i,j} e_{\varepsilon}^{N,\Delta t}(n,i,j)$$

para cada valor de ε, siendo N el número de puntos usados en ambas direcciones espaciales, y para cada N y Δt, el máximo error uniforme en los nodos definido por

$$E_{N,\Delta t} = \max_{\varepsilon} E_{\varepsilon,N,\Delta t}.$$

Señalar que, en el caso en que no es conocida la solución exacta, para obtener los errores se compara la solución hallada con un número de puntos dados, con la interpolación lineal, en los nodos que define esa malla, de la solución calculada para la malla de Shishkin más fina (en nuestro caso $N = 256$) que se considera. Para obtener el orden numérico de convergencia uniforme, se usa el conocido principio de la doble malla (ver [5]).

Tabla 1. Errores máximos en los nodos, $E_{\varepsilon,N,\Delta t}$ y $E_{N,\Delta t}$, en el ejemplo 1 usando mallas de Shishkin.

ε	N= 8 Δt= 0.1	N= 16 Δt= 0.05	N= 32 Δt= 0.025	N= 64 Δt=0.0125
1	2.620E-2	1.619E-2	9.168E-3	4.894E-3
2^{-2}	1.010E-2	6.236E-3	3.454E-3	1.818E-3
2^{-4}	3.818E-3	2.804E-3	1.918E-3	1.156E-3
2^{-6}	4.227E-3	2.717E-3	1.671E-3	9.886E-4
2^{-8}	4.499E-3	2.916E-3	1.913E-3	1.120E-3
2^{-10}	4.567E-3	2.964E-3	1.966E-3	1.161E-3
2^{-12}	4.584E-3	2.976E-3	1.978E-3	1.171E-3
2^{-14}	4.588E-3	2.980E-3	1.981E-3	1.174E-3
2^{-16}	4.589E-3	2.981E-3	1.982E-3	1.174E-3
2^{-18}	4.589E-3	2.982E-3	1.982E-3	1.174E-3
2^{-20}	4.590E-3	2.982E-3	1.983E-3	1.175E-3
$E_{N,\Delta t}$	0.02620	0.01619	0.00916	0.00489

Tabla 2. Orden numérico de convergencia en el ejemplo 1.

ε	$N=8$	$N=16$	$N=32$
1	0.694	0.820	0.905
2^{-2}	0.695	0.852	0.925
2^{-4}	0.445	0.547	0.730
2^{-6}	0.637	0.701	0.757
2^{-8}	0.625	0.608	0.772
2^{-10}	0.623	0.592	0.759
2^{-12}	0.623	0.589	0.756
2^{-14}	0.622	0.589	0.754
2^{-16}	0.622	0.588	0.755
2^{-18}	0.621	0.589	0.755
2^{-20}	0.622	0.588	0.755
Min.	0.445	0.547	0.730

Tabla 3. Errores máximos en los nodos, $E_{\varepsilon,N,\Delta t}$ y $E_{N,\Delta t}$, en el ejemplo 2 usando mallas de Shishkin .

ε	$N=8$ $\Delta t=0.1$	$N=16$ $\Delta t=0.05$	$N=32$ $\Delta t=0.025$	$N=64$ Δt=0.0125	$N=128$ Δt=0.00625
1	2.060E-3	1.267E-3	6.725E-4	3.081E-4	1.063E-4
2^{-2}	4.269E-3	2.421E-3	1.225E-3	5.493E-4	1.873E-4
2^{-4}	7.023E-3	4.267E-3	2.538E-3	1.349E-3	4.804E-4
2^{-6}	8.890E-3	5.931E-3	3.365E-3	1.680E-3	6.193E-4
2^{-8}	9.363E-3	6.542E-3	3.880E-3	1.948E-3	7.168E-4
2^{-10}	9.423E-3	6.659E-3	4.009E-3	2.034E-3	7.548E-4
2^{-12}	9.422E-3	6.676E-3	4.033E-3	2.051E-3	7.637E-4
2^{-14}	9.420E-3	6.678E-3	4.038E-3	2.054E-3	7.654E-4
2^{-16}	9.419E-3	6.679E-3	4.039E-3	2.055E-3	7.658E-4
2^{-18}	9.419E-3	6.679E-3	4.039E-3	2.055E-3	7.659E-4
2^{-20}	9.419E-3	6.679E-3	4.039E-3	2.055E-3	7.659E-4
$E_{N,\Delta t}$	0.00942	0.00679	0.00403	0.00205	0.00076

Tabla 4. Orden numérico de convergencia en el ejemplo 2.

ε	$N=8$	$N=16$	$N=32$	$N=64$
1	0.702	0.914	1.126	1.535
2^{-2}	0.818	0.983	1.157	1.552
2^{-4}	0.719	0.750	0.917	1.484
2^{-6}	0.584	0.817	1.002	1.440
2^{-8}	0.517	0.753	0.994	1.443
2^{-10}	0.501	0.732	0.979	1.430
2^{-12}	0.497	0.727	0.975	1.425
2^{-14}	0.496	0.726	0.975	1.425
2^{-16}	0.496	0.726	0.975	1.424
2^{-18}	0.496	0.726	0.975	1.424
2^{-20}	0.496	0.726	0.974	1.424
Min.	0.496	0.726	0.917	1.424

Tabla 5. Errores máximos en los nodos, $E_{\varepsilon,N,\Delta t}$ y $E_{N,\Delta t}$, en el ejemplo 2 usando mallas uniformes.

ε	$N=8$ $\Delta t=0.1$	$N=16$ $\Delta t=0.05$	$N=32$ $\Delta t=0.025$	$N=64$ $\Delta t=0.0125$	$N=128$ $\Delta t=0.00625$
1	2.060E-3	1.267E-3	6.725E-4	3.081E-4	1.063E-4
2^{-2}	4.269E-3	2.421E-3	1.225E-3	5.493E-4	1.873E-4
2^{-4}	7.720E-3	4.889E-3	2.789E-3	1.343E-3	4.804E-4
2^{-6}	7.472E-3	6.825E-3	6.109E-3	4.133E-3	2.134E-3
2^{-8}	6.927E-3	5.255E-3	4.485E-3	5.050E-3	5.304E-3
2^{-10}	6.821E-3	4.709E-3	3.125E-3	2.448E-3	2.899E-3
2^{-12}	6.793E-3	4.562E-3	2.734E-3	1.557E-3	1.086E-3
2^{-14}	6.786E-3	4.525E-3	2.634E-3	1.320E-3	5.752E-4
2^{-16}	6.785E-3	4.516E-3	2.609E-3	1.259E-3	4.428E-4
2^{-18}	6.784E-3	4.514E-3	2.603E-3	1.244E-3	4.094E-4
2^{-20}	6.784E-3	4.513E-3	2.601E-3	1.241E-3	4.010E-4
$E_{N,\Delta t}$	0.00772	0.00682	0.00610	0.00505	0.00530

Bibliografía.

[1] Clavero, C., Jorge, J.C., Lisbona, F. *Uniformly convergent schemes for singular perturbation problems combining alternating directions and exponential fitting techniques*, in Applications of Avanced Computational Methods for Boundary and Interior Layers (J.J.H. Miller, Ed). Boole Press. Dublin. 1993. pp. 33-52.

[2] Clavero, C., Jorge, J.C., Lisbona, F. *Splitting time methods and one dimensional Shishkin meshes for singularly perturbed parabolic problems.* 1995. Submitted to publication.

[3] Doolan, E.P., Miller, J.J.H., Schilders,W.H.A. *Uniform numerical methods for problems with initial and boundary layers.* Boole Press. Dublin. 1980.

[4] Gartland, E.C. *Graded-mesh difference schemes for singularly perturbed two-point boundary value problems*, Math. of Comp. 51 (1988) pp. 631-657.

[5] Hegarty, A.F., Miller, J.J.H., O'Riordan, E., Shishkin, G.I. *Special numerical methods for convection-dominated laminar flows at arbitrary Reynolds number*, East-West J. Numer. Math. 2 (1994) pp. 65-74.

[6] Herceg, D. *Uniform fourth order difference scheme for a singular perturbation problem*, Numer. Math. 56 (1990) pp. 675-693.

[7] Jorge, J. C., Lisbona, F. *Contractivity results for alternating direction schemes in Hilbert spaces*, App. Numer. Math. 15 (1994) pp. 65-75

[8] Kellogg, R.B., Tsan, A. *Analysis of some difference approximations for a singular perturbation problem without turning points*, Math. Comp. 32 (1978) pp. 1025-1039.

[9] Shishkin, G.I. *Approximation of the solution to singularly perturbed boundary value problems with boundary layers*, U.S.S.R. Comput. Maths. Math. Phys. 29 (1989) pp.1-10.

[10] Shishkin, G.I. *Grid pproximation of singularly perturbed boundary value problems with convective terms*, Sov. J. Numer. Anal. Math. Modelling 5 (1990) pp. 173-187.