SOLUCIONES DE EQUILIBRIO Y ESTABILIDAD EN UN PROBLEMA GENERALIZADO DE LAGRANGE-POISSON

J. A. Cavas, R. Molina y A. Vigueras
Dpto de Matemática Aplicada y Estadística, Universidad de Murcia.
Escuela Politécnica Superior, Paseo Alfonso XIII, Cartagena.

Abstract

En este trabajo, se obtienen las soluciones de equilibrio del problema generalizado del de Lagrange-Poisson, se estudia la estabilidad de determinadas posiciones de equilibrio, generalizando algunos de los resultados dados por Rumiantsev para el problema del giróstato pesado. Finalmente, se dan condiciones necesarias sobre la estabilidad de determinadas soluciones de equilibrio.

Introducción.

Un sistema mecánico S, constituido por un sólido rígido S_1 al que hay conectados otros cuerpos S_2, de tal forma que los movimientos de S_2 relativos a S_1 no modifican la distribución de masas del sistema compuesto S, recibe el nombre de giróstato.

El problema que consideramos en este trabajo es el del movimiento de un giróstato fijo por uno de sus puntos O, perteneciente a su parte rígida, para el cual el momento angular relativo de S_2 con respecto a S_1, también denominado momento girostático, es constante en el sistema móvil de ejes principales de inercia, sometido a la atracción newtoniana de otro punto fijo P, de masa M, cuando el potencial U es aproximado por $U^{(2)}$ (término principal del potencial no kepleriano).

En Vigueras (1987), se prueba la integrabilidad Lioville del problema anterior en tres casos que se reducen a los dados por Arkhangelskii (1962, 63) para sólidos rígidos con un punto fijo en un campo central newtoniano de potencial $U^{(2)}$, si el momento girostático se anula, es decir, si los giróstatos se reducen a sólidos rígidos.

Por otro lado, en Cavas y Vigueras (1992, 94) se obtienen soluciones analíticas para un caso análogo al de Lagrange-Poisson que, en general, son expresables en términos de funciones e integrales elípticas, así como determinadas posiciones de equilibrio de dicho problema.

En este trabajo, se obtienen de un modo sistemático las soluciones de equilibrio del problema generalizado del de Lagrange-Poisson que nos ocupa, se estudia la estabilidad de determinadas posiciones de equilibrio, generalizando algunos de los resultados dados por Rumiantsev (1961) para el problema del giróstato pesado; en particular la condición necesaria y suficiente de estabilidad de la solución de equilibrio: $\omega_1 = \omega_2 = 0$, $\omega_3 = \omega_3^0$ (cte), $k_1 = k_2 = 0$, $k_3 = 1$, dada por la relación $\left(I_3\omega_3^0 + l_3^r\right)^2 - 4I_1 m_0 x_3^0 > 0$ (la cual pone de manifiesto la posibilidad de su cumplimiento por una adecuada selección de la constante l_3^r); es ahora sustituida por la relación $\left(I_3\omega_3^0 + l_3^r\right)^2 - 4I_1\left(m_0 x_3^0 - m_1\left(I_1 - I_3\right)\right) > 0$ que además incorpora los efectos del término principal del potencial no kepleriano sobre la estabilidad. Finalmente, se dan condiciones necesarias sobre la estabilidad de determinadas soluciones de equilibrio.

Ecuaciones del movimiento y soluciones de equilibrio.

Consideremos un giróstato estacionario S, con un punto fijo O, perteneciente a su parte rígida, en un campo central newtoniano cuyo potencial es aproximado por $U^{(2)}$. Las ecuaciones del movimiento en forma euleriana son

$$\begin{array}{c}I_1\dot{\omega}_1+(I_3-I_2)\omega_2\omega_3+\omega_2 l_3^r-\omega_3 l_2^r=m_0(k_2x_3^0-k_3x_2^0)+m_1(I_3-I_2)k_2k_3\\ I_2\dot{\omega}_2+(I_1-I_3)\omega_1\omega_3+\omega_3 l_1^r-\omega_1 l_3^r=m_0(k_3x_1^0-k_1x_3^0)+m_1(I_1-I_3)k_1k_3\\ I_3\dot{\omega}_3+(I_2-I_1)\omega_1\omega_2+\omega_1 l_2^r-\omega_2 l_1^r=m_0(k_1x_2^0-k_2x_1^0)+m_1(I_2-I_1)k_1k_2\end{array}\tag{1}$$

$$\begin{array}{c}\dot{k}_1+\omega_2k_3-\omega_3k_2=0\\ \dot{k}_2+\omega_3k_1-\omega_1k_3=0\\ \dot{k}_3+\omega_1k_2-\omega_2k_1=0\end{array}\tag{2}$$

donde I_1, I_2, I_3 son los momentos principales de inercia del giróstato S para el punto fijo O, ω_1, ω_2, ω_3 son las componentes de la velocidad angular instantánea en el sistema móvil de ejes principales de inercia (de S para el punto fijo O), l_1^r, l_2^r, l_3^r las componentes del momento girostático en dicho sistema, que suponemos constantes en nuestro trabajo, k_1, k_2, k_3 son las proyecciones del vector unitario del tercer eje fijo (con origen en O y vertical ascendente) en el anterior sistema móvil, x_1^0, x_2^0, x_3^0 son las coordenadas, en el mismo sistema, del centro de masas del giróstato, r es la distancia del centro de atracción P, de masa M, al punto fijo O, G es la constante de gravitación universal, $g=GM/r^2$, m es la masa total del giróstato, $m_0=mg$ y $m_1=3g/r$.

Anulando m_1 se obtienen las ecuaciones del movimiento de un giróstato pesado, fijo por uno de los puntos de su parte rígida, en tanto que si se anulan las constantes l_1^r, l_2^r, l_3^r se obtienen los problemas correspondientes al sólido rígido con un punto fijo, a los que se reduce el aquí considerado.

Supongamos, además, que el giróstato es simétrico, $I_1=I_2>I_3$, que el vector de posición del centro de masas está sobre el eje de simetría, es decir, $x_1^0=x_2^0=0$, $x_3^0>0$, y que el momento girostático verifica $l_1^r=l_2^r=0$, $l_3^r=cte.$ Entonces, las ecuaciones del movimiento de nuestro problema se reducen a

$$\begin{array}{c}I_1\dot{\omega}_1=(I_1-I_3)\omega_2\omega_3-\omega_2l_3^r+m_0k_2x_3^0-m_1(I_1-I_3)k_2k_3\\ I_1\dot{\omega}_2=(I_3-I_1)\omega_1\omega_3+\omega_1l_3^r-m_0k_1x_3^0+m_1(I_1-I_3)k_1k_3\\ I_3\dot{\omega}_3=0\end{array}\tag{3}$$

junto con las (2); en tanto que, sus soluciones de equilibrio son las séxtuplas $(\omega_1,\omega_2,\omega_3,k_1,k_2,k_3)\in R^3\times S^2$ tales que verifican el sistema no lineal

$$\begin{array}{c}(I_1-I_3)\omega_2\omega_3-\omega_2l_3^r+m_0k_2x_3^0-m_1(I_1-I_3)k_2k_3=0\\ (I_1-I_3)\omega_1\omega_3-\omega_1l_3^r+m_0k_1x_3^0-m_1(I_1-I_3)k_1k_3=0\\ \omega_3k_2-\omega_2k_3=0\\ \omega_1k_3-\omega_3k_1=0\\ \omega_2k_1-\omega_1k_2=0\end{array}\tag{4}$$

Evidentemente, las tres últimas ecuaciones de (4) se verifican si y sólo si $\vec{\omega}$ y $\vec{k}$ son linealmente independientes, es decir, si y sólo si $\vec{\omega}=\lambda\vec{k}$, con $\lambda\in R$. Obtenemos así una primera conclusión que podemos enunciar como sigue:

"Una condición necesaria para que $(\omega_1,\omega_2,\omega_3,k_1,k_2,k_3)$ sea una solución de equilibrio es que el vector velocidad angular instantánea $\vec{\omega}$ debe ser propo cional al vector $\vec{k}$, y por tanto al vector de posición del punto fijo O con respecto al centro de atracción P". Esto es válido también para las soluciones de equilibrio del sistema inicial (1)-(2).

Veamos a continuación condiciones necesarias y suficientes para la existencia de soluciones de equilibrio, dando, asímismo, una expresión sencilla de ellas. Para ello, tengamos presente la relación que existe entre las variables $(\omega_1, \omega_2, \omega_3, k_1, k_2, k_3)$ y los ángulos de Euler (ψ, θ, ϕ), que como sabemos es

$$\begin{array}{ll} \omega_1 = \dot\theta \cos\phi + \dot\psi \,\mathrm{sen}\,\theta \,\mathrm{sen}\,\phi & k_1 = \mathrm{sen}\,\theta \,\mathrm{sen}\,\phi \\ \omega_2 = -\dot\theta \,\mathrm{sen}\,\phi + \dot\psi \,\mathrm{sen}\,\theta \cos\phi & k_2 = \mathrm{sen}\,\theta \cos\phi \\ \omega_3 = \dot\psi \cos\theta + \dot\phi & k_3 = \cos\theta \end{array} \tag{5}$$

De estas relaciones se deduce, facilmente, que toda solución de equilibrio del sistema (2)-(3), $(\omega_1^0, \omega_2^0, \omega_3^0, k_1^0, k_2^0, k_3^0)$ se corresponde con unos ángulos de Euler tales que

$$\theta = \theta_0 \neq k\pi, \;\; \phi = \phi_0, \;\; \psi = \psi_0 + \omega(t - t_0) \tag{6}$$

o bien

$$\theta = k\pi, \;\; \phi(t) \pm \psi(t) = \omega_3^0 t + \eta_0 \tag{7}$$

donde ω (que coincide con el módulo del vector velocidad angular de rotación $\vec{\omega}$), ω_3^0, ϕ_0, ψ_0, θ_0, y η_0 son constantes, y k toma los valores 0 ó 1.

Con objeto de determinar condiciones para la existencia de (6), podemos utilizar un método similar al de Pascal (1985) y escribir las ecuaciones del movimiento del giróstato en forma lagrangiana

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0; \;\; q_\alpha \in \{\psi, \theta, \phi\} \tag{8}$$

siendo la función lagrangiana $L = T - U$, donde

$$\begin{array}{rcl} T & = & \frac{1}{2}\left(I_1\omega_1^2 + I_1\omega_2^2 + I_3\omega_3^2\right) + \omega_3 l_3^r \\ U & = & m_0 x_3^0 \cos\theta + \frac{m_1}{2}\left(I_1 sen^2\theta + I_3 \cos^2\theta\right) \end{array}$$

Observamos que las soluciones en ángulos de Euler (7) correspondientes a las soluciones de equilibrio de la forma $(0, 0, \omega_3^0, 0, 0, \pm 1)$ no son, en general, soluciones de equilibrio para el sistema de Lagrange (8), dado que las velocidades no tienen porqué anularse en la solución. De hecho, en general, será $\dot\psi \pm \dot\phi = cte.$

Consideremos, pues, el caso general $\theta_0 \neq k\pi$ y realicemos el siguiente cambio de variable en los ángulos de Euler (que nos permite anular las velocidades en las soluciones del sistema transformado del (8) correspondientes a (6)):

$$\bar\psi = \psi - \psi_0 - \omega t, \;\; \bar\theta = \theta, \;\; \bar\phi = \phi$$

Simultáneamente, realicemos el cambio en el tiempo $\bar t = \omega t$, con lo cual

$$\dot\psi = \omega(\frac{d\bar\psi}{dt} + 1), \;\; \dot\theta = \omega\frac{d\bar\theta}{dt}, \;\; \dot\phi = \omega\frac{d\bar\phi}{dt}.$$

Expresando nuevamente las velocidades angulares $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ en las nuevas variables $(\bar\psi, \bar\theta, \bar\phi)$, tendremos

$$\begin{array}{l} \omega_1 = \omega\left[\frac{d\bar\theta}{dt}\cos\bar\phi + \left(\frac{d\bar\psi}{dt} + 1\right)\mathrm{sen}\,\bar\theta \,\mathrm{sen}\,\bar\phi\right] \\ \omega_2 = \omega\left[-\frac{d\bar\theta}{dt}\,\mathrm{sen}\,\bar\phi + \left(\frac{d\bar\psi}{dt} + 1\right)\mathrm{sen}\,\bar\theta \cos\bar\phi\right] \\ \omega_3 = \omega\left[\left(\frac{d\bar\psi}{dt} + 1\right)\cos\bar\theta + \frac{d\bar\phi}{dt}\right] \end{array} \tag{9}$$

Con este cambio, hemos transformado la función de Lagrange $L = L(\psi, \theta, \phi)$ en $\bar L = \bar L(\bar\psi, \bar\theta, \bar\phi)$, verificándose en estas nuevas variables y tiempo la equivalencia entre las soluciones de equilibrio del sistema (2)-(3) y las correspondientes al nuevo sistema de Lagrange, con excepción de las soluciones para las que $\theta_0 = k\pi$. En efecto, renombrando a $(\bar{\psi}, \bar{\theta}, \bar{\phi})$ como (ψ, θ, ϕ) y a $\bar{L}$ como L, tenemos que la función de Lagrange adopta la forma

$$\begin{aligned} L &= T - U = \frac{\omega^2 \left(I_1 sen^2\theta + I_3 \cos^2\theta\right)}{2}\dot{\psi}^2 + \frac{I_1\omega^2}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{I_3\omega^2}{2}\dot{\phi}^2 + \left(I_3\omega^2\cos\theta\right)\dot{\psi}\dot{\phi} + \\ &\quad + \left[\omega^2(I_1 sen^2\theta + I_3\cos^2\theta) + \omega l_3^r\cos\theta\right]\dot{\psi} + \left[I_3\omega^2\cos\theta + \omega l_3^r\right]\dot{\phi} + \omega l_3^r\cos\theta + \\ &\quad + \frac{\omega^2}{2}\left(I_1 sen^2\theta + I_3\cos^2\theta\right) - m_0 x_3^0\cos\theta - \frac{m_1}{2}\left(I_1 sen^2\theta + I_3\cos^2\theta\right) \\ &= L(\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi}, -, \theta, -) \end{aligned} \tag{10}$$

Al no depender explícitamente del tiempo la función de Lagrange, las soluciones de equilibrio del sistema transformado del (8), son aquellas que satisfacen las ecuaciones $\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0$, con $q_\alpha \in \{\psi, \theta, \phi\}$.

Definiendo L_0 como la parte de L independiente de las velocidades,

$$L_0 = \omega l_3^r\cos\theta + \frac{\omega^2}{2}\left(I_1 sen^2\theta + I_3\cos^2\theta\right) - m_0 x_3^0\cos\theta - \frac{m_1}{2}\left(I_1 sen^2\theta + I_3\cos^2\theta\right) \tag{11}$$

las soluciones de equilibrio las obtendremos resolviendo el sistema $\frac{\partial L_0}{\partial q_\alpha} = 0$, con $q_\alpha \in \{\psi, \theta, \phi\}$, que, en nuestro caso se traduce en

$$\frac{\partial L_0}{\partial\theta} = \operatorname{sen}\theta\left[\left(\omega^2 - m_1\right)(I_1 - I_3)\cos\theta + m_0 x_3^0 - \omega l_3^r\right] = 0$$

y las únicas soluciones que presenta son aquellas para las que

$$\theta = k\pi \quad \text{ó} \quad \theta = \arccos\tfrac{\omega l_3^r - m_0 x_3^0}{(I_1 - I_3)(\omega^2 - m_1)}$$

La primera solución es un caso particular de (7) que hemos mencionado anteriormente. En cuanto a la segunda, existirá y será diferente de la anterior si y sólo si

$$\left|\frac{\omega l_3^r - m_0 x_3^0}{(I_1 - I_3)(\omega^2 - m_1)}\right| < 1 \tag{12}$$

Si para cada valor de ω fijo fuera posible elegir el momento girostático l_3^r, de manera que se verificase (12), podríamos conseguir posiciones de equilibrio para el sistema (8). Ahora bien, cuando $\omega = 0$, el hecho de que existan o no nuevas soluciones de equilibrio dependerá tan solo de la distribución de masas del giróstato, según que $\frac{m_0 x_3^0}{(I_1 - I_3)m_1}$ sea menor o mayor que 1 respectivamente.

En definitiva podríamos concluir que las únicas soluciones de equilibrio del problema considerado, dado por el sistema (2)-(3), son aquellas en las que los ángulos de Euler están dados por

$$\theta = \theta_0 = k\pi \ (k = 0 \text{ ó } 1) \quad \text{y} \quad \phi(t) \pm \psi(t) = \omega_3^0 t + \eta_0 \tag{13}$$

o bien por

$$\theta = \theta_0 = \arccos\frac{\omega l_3^r - m_0 x_3^0}{(I_1 - I_3)(\omega^2 - m_1)}, \ \psi = \psi_0 + \omega(t - t_0), \ \phi = \phi_0$$

siempre que se verifique la condición (12).

Estabilidad de las soluciones de equilibrio para las que $\mathbf{k}_3 = \pm 1$.

En este párrafo estudiaremos la estabilidad de las soluciones de equilibrio del sistema (2)-(3) en las que $\theta_0 = k\pi$, es decir, las de la forma

$$\omega_1 = \omega_2 = 0,\ \omega_3 = \omega_3^0;\ k_1 = k_2 = 0,\ k_3 = \pm 1 \tag{14}$$

Consideremos en primer lugar el caso en que $\mathbf{k}_3 = -\mathbf{1}$; para estudiar su estabilidad se analiza el movimiento perturbado siguiente:

$$\omega_1 = \omega_1,\ \omega_2 = \omega_2,\ \omega_3 = \omega_3^0 + \xi;\ k_1 = k_1,\ k_2 = k_2,\ k_3 = -1 + \delta \tag{15}$$

lo cual nos permite estudiar la estabilidad en el origen. Ahora, definiendo la función

$$\begin{aligned} V \ = \ & \left[cm_1\left(I_1 - I_3\right) + cm_0x_3^0 + b\left(I_3\omega_3^0 + l_3^r\right)\right]k_1^2 + \left[cm_1\left(I_1 - I_3\right) + cm_0x_3^0 + \right. \\ & \left. + b\left(I_3\omega_3^0 + l_3^r\right)\right]k_2^2 + \left[cm_0x_3^0 + b\left(I_3\omega_3^0 + l_3^r\right)\right]\delta^2 + 2bI_1k_1\omega_1 + 2bI_1k_2\omega_2 + \\ & + 2bI_3\delta\xi + cI_1\omega_1^2 + cI_1\omega_2^2 + cI_1\xi^2 \end{aligned} \tag{16}$$

y eligiendo b y c tal que $cm_0x_3^0 > b^2I_1^2 - b\left(I_3\omega_3^0 + l_3^r\right)$, la forma cuadrática $V(\omega_1, \omega_2, \xi, k_1, k_2, \delta)$ es definida positiva, verificándose las condiciones del teorema de Liapunov, y en consecuencia el origen es una solución de equilibrio estable para el sistema perturbado, por lo que la solución de equilibrio

$$\omega_1 = \omega_2 = 0,\ \omega_3 = \omega_3^0;\ k_1 = k_2 = 0,\ k_3 = -1$$

es estable para el sistema primitivo. Además, la estabilidad de la solución del problema en este caso es independiente de la posible elección del momento girostático.

Consideremos ahora el caso $\mathbf{k}_3 = +\mathbf{1}$, correspondiente con la solución de equilibrio

$$\omega_1 = \omega_2 = 0,\ \omega_3 = \omega_3^0;\ k_1 = k_2 = 0,\ k_3 = +1 \tag{17}$$

Para estudiar su estabilidad, realizamos la transformación siguiente

$$\omega_1 = \omega_1,\ \omega_2 = \omega_2,\ \omega_3 = \omega_3^0 + \xi;\ k_1 = k_1,\ k_2 = k_2,\ k_3 = 1 + \delta \tag{18}$$

que lleva dicho equilibrio al origen.

Veamos que en este caso el equilibrio no va a ser, en general, estable, pues dependerá de la adecuada elección del momento girostático.

El problema linealizado se escribe matricialmente en la forma $\dot{Y} = AY$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 & b & 0 \\ -a & 0 & 0 & -b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & c & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \xi \\ k_1 \\ k_2 \\ \delta \end{pmatrix} \tag{19}$$

siendo

$$a = \frac{1}{I_1}\left[\left(I_1 - I_3\right)\omega_3^0 - l_3^r\right],\ b = \frac{1}{I_1}\left[m_0x_3^0 - m_1\left(I_1 - I_3\right)\right],\ c = \omega_3^0$$

Su polinomio característico es

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = \lambda^2\left[\lambda^4 + \left(a^2 + c^2 - 2b\right)\lambda^2 + \left(a^2c^2 + b^2 + 2abc\right)\right] \tag{20}$$

presentando los valores propios siguientes: $\lambda = 0$, de multiplicidad dos; y las cuatro raices de las ecuaciones $2\lambda^2 = (2b - a^2 - c^2) \pm (a + c)\sqrt{(a - c)^2 - 4b}$.

Observamos que si $4b \geq (a - c)^2$, entonces la ecuación característica presentará, en general (a excepción de tres valores concretos de l_3^r) al menos una raiz con parte real positiva. En tal caso, el equilibrio en el origen es inestable para el sistema linealizado y por el teorema de Liapunov también será inestable para el sistema completo y, en consecuencia, para el sistema primitivo. Es decir, en el caso $k_3 = +1$ se nos pueden presentar condiciones que hagan el equilibrio inestable. Por tanto, una condición necesaria para la estabilidad de la solución de equilibrio es que $4b < (a - c)^2$, condición que, sustituidos sus valores según (19), queda

$$4I_1 \left[m_0 x_3^0 - m_1 \left(I_1 - I_3\right)\right] < \left(I_3 \omega_3^0 + l_3^r\right)^2 \tag{21}$$

Veamos a continuación que dicha condición es también suficiente. Para ello, definamos la función

$$\begin{aligned} V \;=\; & I_1\omega_1^2 + I_1\omega_2^2 + \left[I_3 + \frac{I_3\left(I_3 - I_1\right)}{I_1}\right]\xi^2 + \left[-m_0 x_3^0 + m_1(I_1 - I_3) - a(I_3\omega_3^0 + l_3^r)\right]k_1^2 + \\ & + \left[-m_0 x_3^0 + m_1(I_1 - I_3) - a(I_3\omega_3^0 + l_3^r)\right]k_2^2 + \left[-m_0 x_3^0 + m_1(I_1 - I_3) - \right. \\ & \left. - a(I_3\omega_3^0 + l_3^r)\right]\delta^2 + 2aI_1k_1\omega_1 + 2aI_1k_2\omega_2 + 2aI_3\delta\xi \end{aligned} \tag{22}$$

Para que esta forma cuadrática sea definida positiva, es suficiente que

$$\left(I_3\omega_3^0 + l_3^r\right)^2 > 4I_1 \left[m_0 x_3^0 - m_1 \left(I_1 - I_3\right)\right]$$

en cuyo caso, V es una forma cuadrática definida positiva en las variables $\omega_1, \omega_2, \xi, k_1, k_2, \delta$, con derivada semidefinida negativa (de hecho nula por ser una integral primera). Es por tanto una función de Liapunov definida en un cierto entorno del origen. Entonces, el origen es estable para el sistema transformado, siendo la solución de equilibrio (17) estable para el sistema de partida.

En definitiva, se ha probado que una condición necesaria y suficiente para que la solución de equilibrio $(0, 0, \omega_3^0, 0, 0, 1)$ del sistema de partida (2)-(3) sea estable es que se satisfaga la desigualdad

$$\left(I_3\omega_3^0 + l_3^r\right)^2 > 4I_1 \left[m_0 x_3^0 - m_1 \left(I_1 - I_3\right)\right].$$

Se observa en este caso que, mediante una adecuada elección del momento girostático, podemos hacer que el equilibrio sea estable.

Con este resultado se generaliza el obtenido por Rumiantsev para el giróstato pesado, que llegó a la siguiente condición necesaria y suficiente de estabilidad

$$\left(I_3\omega_3^0 + l_3^r\right)^2 > 4I_1 m_0 x_3^0$$

Comparando este resultado con el obtenido en (21), vemos que al aumentar el grado de aproximación del potencial nos podemos encontrar con la circunstancia de que posiciones de equilibrio inestables pueden pasar a ser estables. Es decir, si una solución de equilibrio es inestable cuando el potencial $U \simeq U^{(1)}$, no necesariamente podemos afirmar que dicha solución sea inestable para $U \simeq U^{(2)}$. Sin embargo, toda solución inestable para $U \simeq U^{(2)}$, también lo es para $U \simeq U^{(1)}$.

Este hecho pone de manifiesto tanto la importancia de la posible elección del momento girostático, como de la aproximación que usemos en el potencial, a la hora de estudiar la estabilidad de soluciones del sistema, o la posible estabilización de ciertas posiciones de equilibrio.

Condiciones necesarias de estabilidad de determinadas soluciones de equilibrio. A continuación, damos condiciones necesarias acerca de la estabilidad de las soluciones de equilibrio que se corresponden en ángulos de Euler con

$$\psi = \psi_0 + \omega t, \; \theta = \theta_0 = \arccos \frac{\omega l_3^r - m_0 x_3^0}{(I_1 - I_3)(\omega^2 - m_1)}, \; \phi = \phi_0 \tag{23}$$

y en variables $(\omega_1, \omega_2, \omega_3, k_1, k_2, k_3)$, son

$$\begin{array}{lll} \omega_1^0 = \omega k_1^0, & \omega_2^0 = \omega k_2^0, & \omega_3^0 = \omega k_3^0 \\ k_1^0 = \operatorname{sen} \theta_0 \operatorname{sen} \phi_0, & k_2^0 = \operatorname{sen} \theta_0 \cos \phi_0, & k_3^0 = \cos \theta_0 \end{array} \tag{24}$$

Dado el carácter unitario del vector $\vec{k}$, y por ser $\vec{k} \parallel \vec{\omega}$, tendremos la siguiente relación entre las velocidades angulares

$$\left(\omega_1^0\right)^2 + \left(\omega_2^0\right)^2 + \left(\omega_3^0\right)^2 = \omega^2 \tag{25}$$

Asímismo,

$$(I_1 - I_3)\left(\omega^2 - m_1\right) k_3^0 - \omega l_3^r + m_0 x_3^0 = 0 \tag{26}$$

Con objeto de estudiar la estabilidad de la solución de equilibrio (24), consideremos el momento perturbado siguiente

$$\begin{array}{lll} \omega_1 = \omega_1^0 + \xi_1, & \omega_2 = \omega_2^0 + \xi_2, & \omega_3 = \omega_3^0 + \xi_3 \\ k_1 = k_1^0 + \delta_1, & k_2 = k_2^0 + \delta_2, & k_3 = k_3^0 + \delta_3 \end{array} \tag{27}$$

pasando así a estudiar la estabilidad del nuevo sistema en el origen.

El sistema linealizado tiene la expresión matricial $\dot{Y} = AY$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & c\omega_2^0 & 0 & b & -m_1 k_2^0 c \\ -a & 0 & -c\omega_1^0 & -b & 0 & m_1 k_1^0 c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_3^0 & k_2^0 & 0 & \omega_3^0 & -\omega_2^0 \\ k_3^0 & 0 & -k_1^0 & -\omega_3^0 & 0 & \omega_1^0 \\ -k_2^0 & k_1^0 & 0 & \omega_2^0 & -\omega_1^0 & 0 \end{pmatrix}, \; Y = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{pmatrix} \tag{28}$$

donde

$$a = \frac{1}{I_1}\left[(I_1 - I_3)\,\omega_3^0 - l_3^r\right], \; b = \frac{1}{I_1}\left[m_0 x_3^0 - m_1 (I_1 - I_3)\right], \; c = \frac{1}{I_1} m_1 (I_1 - I_3)$$

El polinomio característico asociado a dicha matriz es

$$\begin{array}{l} P(\lambda) = \lambda^2 \left[\lambda^4 + \left(\omega^2 + a^2 - 2bk_3^0 - c\left(\left(k_1^0\right)^2 + \left(k_2^0\right)^2\right)\right)\lambda^2 + \right. \\ + \frac{1}{I_1}\left(1 - \left(k_3^0\right)^2\right)\left(a^2\omega^2 I_1 + a m_0 x_3^0 \omega + m_0 x_3^0 c k_3^0 - c^2 I_1 \left(k_3^0\right)^2\right) + \\ \left. + \frac{1}{I_1} 2\omega^2 k_3^0 \left(k_2^0\right)^2 \left(m_0 x_3^0 - c I_1 k_3^0\right)\right] \end{array} \tag{29}$$

pudiendo expresarlo como

$$P(\lambda) = \lambda^2 \left(\lambda^4 + d\lambda^2 + p\right)$$

Observamos que si $p < 0$ o bien $4p > d^2$, el polinomio característico presentará raices reales positivas o raices imaginarias con parte real positiva y, en consecuencia, el origen es una solución de equilibrio inestable para el sistema linealizado, y por ello la solución de equilibrio (24) del sistema completo será inestable. Esto nos lleva a la siguiente conclusión:

Una condición necesaria para la estabilidad de la solución particular (24) es que se verifiquen las condiciones

$$d \geq 0,\ p \geq 0 \text{ y } 4p \leq d^2 \tag{30}$$

Según los distintos valores de ω, θ_0 y ϕ_0, podemos destacar los siguientes casos particulares:

1. Cuando $\omega = \frac{m_0 x_3^0}{l_3^r}$, entonces $\cos\theta_0 = 0$. Así, $\theta_0 = \pi/2$, con lo que

$$\begin{array}{lll} \omega_1^0 = \frac{m_0 x_3^0}{l_3^r} k_1^0, & \omega_2^0 = \frac{m_0 x_3^0}{l_3^r} k_2^0, & \omega_3^0 = 0 \\ k_1^0 = \operatorname{sen}\phi_0, & k_2^0 = \cos\phi_0, & k_3^0 = 0 \end{array} \tag{31}$$

El polinomio característico tiene la expresión

$$P(\lambda) = \lambda^4 \left[\lambda^2 + \left(\frac{m_0 x_3^0}{l_3^r}\right)^2 + \left(\frac{l_3^r}{I_1}\right)^2 - \frac{m_1 (I_1 - I_3)}{I_1}\right] \tag{32}$$

cuyos valores propios son: $\lambda = 0$, con multiplicidad cuatro; $\lambda = \pm\sqrt{\Delta}$, con

$$\Delta = \frac{m_1 (I_1 - I_3)}{I_1} - \left(\frac{m_0 x_3^0}{l_3^r}\right)^2 - \left(\frac{l_3^r}{I_1}\right)^2 .$$

Observamos que si $\Delta > 0$, el equilibrio es inestable. Por tanto, una condición necesaria de estabilidad es que $\Delta \leq 0$, lo cual es equivalente a que $\left(l_3^r\right)^4 - m_1 I_1 (I_1 - I_3) \left(l_3^r\right)^2 + \left(m_0 I_1 x_3^0\right)^2 \geq 0$, es decir, el momento girostático debe satisfacer la desigualdad

$$\left[\left(l_3^r\right)^2 - \frac{m_1 I_1 (I_1 - I_3)}{2}\right]^2 + \frac{I_1^2}{4}\left[\left(2 m_0 x_3^0\right)^2 - m_1^2 (I_1 - I_3)^2\right] \geq 0 \tag{33}$$

2. Cuando $\omega = 0$, obviamente

$$\omega_1^0 = \omega_2^0 = \omega_3^0 = 0, \quad \text{y} \quad k_1^0 = \operatorname{sen}\theta_0 \operatorname{sen}\phi_0, k_2^0 = \operatorname{sen}\theta_0 \cos\phi_0, k_3^0 = \cos\theta_0, \tag{34}$$

Asímismo, el polinomio característico se reduce a

$$P(\lambda) = \lambda^4 \left[\lambda^2 + \left(\frac{l_3^r}{I_1}\right)^2 - \frac{m_1}{I_1} (I_1 - I_3) \left(1 - \left(k_3^0\right)^2\right)\right] \tag{35}$$

como se deduce de (26), presentando raices reales positivas cuando el momento girostático verifique la desigualdad

$$\left(l_3^r\right)^2 < m_1 (I_1 - I_3) \left(1 - \left(k_3^0\right)^2\right) I_1$$

pudiendo afirmar en tal caso que la solución de equilibrio (34) es inestable. Por tanto, una condición necesaria de estabilidad es que

$$\left(l_3^r\right)^2 \geq m_1 (I_1 - I_3) \left(1 - \left(k_3^0\right)^2\right) I_1 \tag{36}$$

Todos los resultados expuestos anteriormente se particularizan al sólido rígido sin más que hacer $l_3^r = 0$.

References

[1] Arkhangelskii, Iu. A.: On single-valued integrals in the problem of motion of a rigid body in the newtonian force field, P.M.M. vol. 26, No. 3 (1962).

[2] Arkhangelskii, Iu. A.: On the algebraic and single-valued integrals in the problem of motion of a rigid body in the newtonian force field, J. Appl. Math. Mech. 27, 1059-1062 (1963).

[3] Cavas, J. A. & Vigueras, A.: Integración analítica de un caso particular del problema del movimiento rotacional de un giróstato con un punto fijo en un campo central newtoniano. Rev. Acad. Ciencias Zaragoza, 47, 155-168 (1992).

[4] Cavas, J. A. & Vigueras, A.: An integrable case of a rotational motion analogous to that of Lagrange and Poisson for a gyrostat in a newtonian force field. Celestial Mechanics 60: 317-330, Netherlands (1994).

[5] Leimanis, E.: The general problem of the motion of coupled rigid bodies about a fixed point. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1965).

[6] Malkin, I. G.: Theory of stability of motion, U. S. Atomic Energy Commission Translation, AEC-tr-3352, Department of Commerce, Washington, D. C. (1958).

[7] Pascal, M.: Attitude equilibria of dual spin satellites subjecto to gravitational torques of n bodies. Celestial Mechanics, 36, 319-347 (1985).

[8] Rumiantsev, V.V.: On the stability of motion of gyrostats, J. Appl. Math. Mech. 25, 9-19 (1961).

[9] Rumiantsev, V.V.: On the stability of motion of certain types of gyrostats, J. Appl. Math. Mech. 25, 1158-1169 (1961).

[10] Vigueras, A.: Sobre el movimiento rotatorio de un giróstato con un punto fijo en un campo central newtoniano (caso análogo al de Lagrange-Poisson), Actas XII Jorn. Luso-Españolas de Mat., vol III, 557-563 (Spain) (1987).