COLOCACION DIRECTA EN PROBLEMAS DE CONTROL NO LINEALES.

Calderón Montero, Susana (1) Caballero Fernández, Rafael (1)

Hidalgo Sánchez, Ramón (2)

(1) Departamento de Matemáticas, Universidad de Málaga.
e-mail: SUSANA@ccuma.sci.uma.es

(2) Servicio Central de Informática. Universidad de Málaga.

1 INTRODUCCION.

En este trabajo tratamos el problema de control óptimo no lineal restringido y su resolución en el campo discreto, mediante métodos numéricos correspondientes. Para ello, parametrizamos las variables en ciertos valores de la variable tiempo y posteriormente realizamos una interpolación para cualquier otro valor. Dentro de los diversos enfoques de la discretización, en este trabajo desarrollamos el método de colocación directa, considerando la discretización conjunta de la variable de estado y de control, trabajando con un problema discretizado de gran dimensión, obligando a la verificación de la ecuación diferencial en puntos intermedios, como restricciones del problema.

Una vez en el plano discreto, resolveremos éste por las técnicas de penalización, que reducen un problema con restricciones al caso irrestricto, por lo que las restricciones se incorporan a la función objetivo de alguna forma. Nos centramos en las funciones de penalización lagrangianas aumentadas, puesto que éstas consideran una estimación de los multiplicadores asociados, interviniendo directamente en la función penalizada y logrando la convergencia cuando convergen al valor óptimo del multiplicador.

Así, nuestro objetivo es la resolución de un problema de control óptimo:

$$\min_u J(x(t), u(t)) = \int_0^T f(x(t), u(t), t)\, dt$$

$$\text{sujeto a } \left\{ \begin{array}{lcll} x'(t) & = & h(x(t), u(t), t) & \\ x(0) & = & x_0 & \\ g_i(x(t), u(t), t) & \geq & 0, & i = 1, \ldots, p \\ u(t) & \in & U & \end{array} \right.$$

donde hemos supuesto que g_i pueden ser restricciones mixtas, de estado y control, o puras y U son las cotas sobre las variables de control. Supondremos que la dimensión de la variable de control es m y la del estado, n.

2 PROCESO DE DISCRETIZACION.

Tratamos en este epígrafe de puntualizar los aspectos seguidos para la discretización del problema. Desarrollaremos el método de colocación directa, donde, como hemos comentado, se parametrizan la variable de estado y control conjuntamente, obteniéndose un problema de dimensión alta pero que presenta la ventaja que las ecuaciones diferenciales no se resuelven, sino que se sustituyen directamente en los puntos de la partición, para la evaluación de la derivada de la variable de estado. Además, se introducen unas restricciones nuevas en los puntos intermedios de la partición, para medir el error cometido al sustituir directamente en la ecuación diferencial.

Asímismo, presenta la ventaja de que estas nuevas restricciones se pueden derivar analíticamente, no teniendo que aproximar su gradiente, como para las demás restricciones, pero tendremos que trabajar posteriormente con problemas no lineales que siempre poseen restricciones de igualdad.

El esquema básico del algoritmo total para resolver un problema de control según el proceso que estamos proponiendo sería reducir el problema de control óptimo al caso no lineal, mediante un proceso de discretización para, seguidamente, pasar a un problema no lineal irrestricto, utilizando una función de penalización.

Para su implementación, se ha utilizado el lenguaje FORTRAN 77, sobre un equipo DIGITAL 8530, con las ayudas de las librerias NAG e IMSL, versiones MARK 15 y 1.1, respectivamente.

En el funcionamiento del programa, necesitamos introducir como datos iniciales, el número de variables de estado y de control, el intervalo de definición y el número de puntos que vamos a considerar en la partición, las funciones f, h y g, las condiciones iniciales y las cotas sobre las variables de control. En la partición hemos trabajado con puntos equidistantes.

Las discretizaciones de las variables que hemos considerado en el desarrollo computacional del problema de control son las siguientes:

- Aproximación constante a trozos.
- Aproximación cúbica Hermite.
- Aproximación cúbica spline.

En la primera construimos una función que no es continua. En las otras dos aproximaciones, la idea de partida será la misma: construir un polinomio de tercer grado que aproxime la función dada; según las condiciones de derivabilidad exigidas, deduciremos el método de aproximación

Hermite o spline. Así, si pedimos que la primera derivada sea continua, el método se llama aproximación cúbica a trozos de Hermite y si exigimos que la segunda también lo sea, estamos en el método de aproximación cúbica spline.

El error que cometemos al considerar la variable discretizada por Hermite o Spline, en lugar de la variable continua, depende del diámetro de la partición y de la derivada de orden cuatro de la variable en cuestión. Nuestro programa, da opciones de discretizar de las tres formas, utilizando, aproximaciones mediante funciones que no son continuas, que son continuas con derivabilidad y en último caso, dos veces diferenciable con continuidad. En cada tipo de problema ser m s conveniente una u otra según la naturaleza de la variable que queremos discretizar.

En concreto, en el método de colocación directa, vamos a trabajar con $(m+n) \times (k+1)$ variables, siendo m el número de variables de control, n el de estados y $k+1$, los puntos de la partición.

Una vez discretizadas las variables, el funcional lo aproximamos mediante una cuadratura, conociendo los puntos de la partición y las aproximaciones de $x(t)$ y de $u(t)$; así, obtenemos una función no lineal, dependiente de las variables consideradas, es decir, $(m+n) \times (k+1)$. Por comodidad, a toda variable discretizada la notaremos $\hat{e}$.

En cuanto a las restricciones, las hemos considerado directamente en todos los puntos de la malla, de forma que por cada restricción, introducimos $k+1$ restricciones, una en cada punto:

$$g_i(x(t_j)), u(t_j)), t_j) \quad \geq \quad 0, \ i = 1, \ldots, p, j = 1, \ldots, k+1$$

pasando a un problema con $p \times (k+1)$ restricciones.

Por último, con respecto a las cotas sobre las variables de control, las tratamos directamente, puesto que las subrutinas que utilizaremos para la minimización del problema posterior, admiten este tipo de restricciones, evitando tener que introducirlas como restricciones de desigualdad propias y manejar, por tanto, sus multiplicadores de Kuhn-Tucker asociados.

Con todo este proceso, hemos pasado a un problema de minimización de una función discreta sujeta a ciertas restricciones, cuyos valores no son conocidos analíticamente, sino evaluados en un punto.

El siguiente paso será resolver este problema. Para los métodos que utilizaremos, precisamos el conocimiento de los gradientes de las funciones, cuestión no trivial puesto que la aproximación que hemos hecho nos da sus valores en un cierto punto y no su expresión analítica. Una forma fácil de obtener la derivada en un punto, será aproximándola, p.e., mediante una diferencia finita centrada.

Concretando, el proceso de discretización que proponemos es el siguiente. Damos una partición del intervalo:

$$0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_{k+1} = T$$

y un valor inicial de x y u en estos puntos, que notaremos $\hat{e}$, de forma que consideramos un vector de $(n+m) \times (k+1)$ componentes:

$$\hat{e} = \ (x_1(t_1), \ldots, x_n(t_1), u_1(t_1), \ldots, u_m(t_{k+1}))$$

Con esta partición y el valor inicial dado, aproximamos x y u por los métodos comentados. Si en la aproximación es necesario el valor de la derivada de u evaluada en t , lo estimamos por la subrutina correspondiente y el de x' lo obtenemos mediante la sustitución en la ecuación diferencial:

$$x'(t_j) \ = \ h(x(t_j), u(t_j), t_j), \quad j = 1, \ldots, k+1$$

Así, hemos construido una aproximación de las variables, que además verifica la ecuación diferencial en los puntos de la partición. Observamos que hemos suprimido la resolución de la ecuación diferencial y por tanto, la dependencia de las variables de estado a partir de las variables de control.

Por este motivo, introducimos unas restricciones de igualdad adicionales, que nos miden el error que estamos cometiendo al sustituir en la ecuación diferencial los puntos de la malla directamente, de la forma:

$$C_j = C_j(x_j, u_j, x_{j+1}, u_{j+1}) = a_j'(\hat{t}_j) - h(\hat{x}_j, \hat{u}_j, \hat{t}_j), \qquad j = 1, \ldots, k$$

donde $\hat{t}_j$ es el punto medio del intervalo $[t_j, t_{j+1}]$ y a_j es el polinomio de tercer grado construido para las variables de estado. De hecho, si utilizamos la aproximación cúbica Hermite, los valores de $\hat{x}_j, \hat{u}_j, a'(\hat{t}_j)$ se pueden obtener mediante unas fórmulas precisas, [1].

Con esta función, la idea sería obligar que se verifique la ecuación diferencial, esto es:

$$C_j = 0, \qquad j = 1, \ldots, k$$

es decir, que el error cometido por evaluar directamente la ecuación diferencial sea nulo. Con esto, este método siempre presenta restricciones de igualdad, independientemente de las propias restricciones del problema de control óptimo dado.

Teniendo en cuenta estas expresiones, se puede deducir fácilmente las derivadas parciales de las restricciones respecto de sus variables, resultando una matriz que posee elementos no nulos en los bloques de la diagonal y diagonal superior, siendo todos los demás cero. Su expresión se puede calcular analíticamente, pero por su longitud no se detallan, [1].

Con este método, observamos que los gradientes de estas restricciones los obtenemos analíticamente, es decir, no tenemos que estimarlos, pero sin embargo, introducimos unas restricciones de igualdad, que tendremos que tener en cuenta para la resolución del problema.

El algoritmo sería el siguiente:

Algoritmo de discretización

Primer paso : Damos una partición del intervalo y un valor inicial de las variables de estado y control en estos puntos, que notamos $\hat{e}$.

Segundo paso: Por un procedimiento de aproximación, calculamos una aproximación de la variable de control y una aproximación de la variable de estado.

Tercer paso: Mediante una cuadratura, calculamos el valor de la función objetivo en este punto, $F(\hat{e})$ y obtenemos las restricciones de igualdad en ese punto, así como las restricciones de desigualdad.

Cuarto paso: (Si necesitamos el gradiente.) Repetimos los tres pasos anteriores para todos los valores iniciales:

$$\hat{e} \pm l_j e_j, \qquad j = 1, \ldots, mx(k+1),$$

obteniendo los valores $F(\hat{e} \pm l_j e_j)$. Calculamos $\nabla F(\hat{e})$ mediante diferencias finitas centradas. Para las restricciones de igualdad y desigualdad, construimos la matriz del gradiente y evaluamos directamente. •.

Con este algoritmo hemos resuelto el primer punto que nos planteábamos, es decir, pasar del problema de control óptimo a un problema no lineal estático con restricciones. Ahora tenemos que resolver este último.

3 FUNCION LAGRANGIANA AUMENTADA.

Mediante el proceso anterior hemos llegado a un problema de la forma:

$$\min F(\hat{e})$$

$$\text{sujeto a} \quad \begin{array}{rcll} C_j(\hat{e}) & = & 0, & j = 1, \ldots, s \\ C_j(\hat{e}) & \geq & 0, & j = s+1, \ldots, s+l \end{array}$$

donde, por comodidad, notamos "s" al número de restricciones de igualdad, y "l" a las de desigualdad.

Para su resolución, hemos utilizado una función lagrangiana aumentada [3], que, en el caso que nos ocupa, notando los multiplicadores de las restricciones de igualdad con "λ" y los de desigualdad, con "μ", y considerando que el valor del parámetro ε lo hemos tomado fijo para todas las restricciones, de forma que únicamente tenemos que introducir un valor inicial para éste, nos queda la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} P(x, \lambda, \mu, \varepsilon) &= f(\hat{e}) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_j \varepsilon C_j^2(\hat{e}) - \lambda^t C(\hat{e}) \\ &+ \sum_i \begin{cases} -\mu_j C_j(\hat{e}) + \frac{1}{2} \varepsilon C_j^2(\hat{e}) & \text{si } C_j(\hat{e}) \leq \frac{\mu_j}{\varepsilon} \\ -\frac{\mu_j^2}{2\varepsilon} & \text{si } C_j(\hat{e}) > \frac{\mu_j}{\varepsilon} \end{cases} \end{aligned}$$

donde utilizamos los multiplicadores de Kuhn-Tucker asociados a cada una de las restricciones como parámetros para ajustar la convergencia; si utilizamos esta opción, tenemos que dar un valor inicial de estos multiplicadores y utilizar las correspondientes fórmulas para actualizarlos:

$$\begin{array}{rcl} \mu_j^{(k+1)} & = & \mu_j^{(k)} - \min(\varepsilon C_j(\hat{e}^{(k)}), \mu_j^{(k)}) \\ \lambda_j^{(k+1)} & = & \lambda_i^{(k)} - \varepsilon \lambda_j C(\hat{e}(\lambda^{(k)})) \end{array}$$

Con esta función completamos nuestro objetivo, reduciendo el problema no lineal restringido al caso irrestricto. El algoritmo, por tanto, es el siguiente.

ALGORITMO DE RESOLUCION DEL PROBLEMA DE CONTROL OPTIMO

Primer paso: Fijamos $\lambda^{(0)}, \mu^{(0)}$, valores iniciales de los multiplicadores, ε y $\hat{e}^{(0)}, k = 0$

Segundo paso: Minimizamos $P(\hat{e}, \lambda^{(k)}, \mu^{(k)}, \varepsilon)$, donde utilizamos repetidas veces el algoritmo de discretización para la evaluación de las funciones, y obtenemos su solución, que notamos $\hat{e}(\lambda^{(k)}) = \hat{e}^{(k+1)}$.

Tercer paso: Comprobamos si:

$$\| \hat{e}^{(k+1)} - \hat{e}^{(k)} \| \leq \gamma$$

Si es así, tomamos $\hat{e}^{(k+1)}$ como solución.
Si no, tomamos $k = k + 1$, actualizamos los multiplicadores por las fórmulas dadas y volvemos al segundo paso. •

En conclusión, en este trabajo hemos considerado un método para la resolución del problema de control óptimo restringido, utilizando funciones de penalización e introduciendo un esquema de discretización. Observamos que la función de penalización dada no necesita directamente el cálculo de los gradientes de las funciones discretizadas, pero éstos si son necesarios en algunas subrutinas de minimización. Este algoritmo ha sido comprobado sobre una serie de problemas test, obteniendo buenos resultados de convergencia, tanto en tiempo como en proximidad a la solución, de estado y control, y aproximación del valor de la función objetivo óptima. En algunos casos, ha sido necesaria una ampliación de la partición considerada de principio, por las características propias de la solución del problema, con puntos de discontinuidad.

4 BIBLIOGRAFÍA

1. S. Calderón, *El problema de Control Optimo y las funciones de penalización. Análisis de sus relaciones y obtención de soluciones*, Universidad de Málaga, Tesis Doctoral, (1993).

2. I. Chryssoverghi, A. Bacopoulos, *Discrete approximation of relaxed optimal control problems.* Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 65, no. 3, pp. 395-407, (1990).

3. R. Fletcher, *Practical methods of optimization*, John Wiley & Sons. Essex, (1987).

4. P.E. Gill, W. Murray, M.A. Saunders, M.H. Wright, *Constrained nonlinear programming*. Handbooks in OR & MS, ed., Nemhauser, G.L. et al., **Vol. 1**, pp. 171–211, (1989).

5. C.J. Goh, K.L. Teo, *Control parametrization: A unified approach to optimal control problems with general constraints*, Automática, **Vol. 24**, pp. 3–18, (1980).

6. D. Kraft, *Comparing mathematical programming algorithms based on lagrangian functions for solving optimal control problems*. Control Applications of Nonlinear Programming, ed., Rauch, H.E., Pergamon Press, New York, pp. 71–83, (1980).

7. K.L. Teo, K.H. Wong, *Nonlinearly constrained optimal control problems*. Journal Australian Mathematical Society Ser. B 33, pp. 507–530, (1992).