RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE UN PROBLEMA NO LINEAL DE LA FÍSICA DE PLASMAS POR MÉTODOS DE DUALIDAD

A. Bermúdez[(1)] - M.L. Seoane[(1)]

[(1)] *Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Santiago de Compostela*
15706 Santiago de Compostela

Abstract

In this paper a numerical method to approximate the axisymmetric equilibrium configurations of the plasma in a *Tokamak* is given. This problem present several nonlinear terms, monotonic in the differential operator, non monotonic and non local in the plasma domain, which are treated by nonconvex duality techniques and functional iteration.

1 Introducción.

Las reacciones de fusión nuclear tienen lugar en un gas ionizado llamado plasma. Para que se desencaden es necesario que la energía liberada sea superior a la pérdida de energía térmica. Esta condición se traduce en el criterio de Lawson

$$\mathrm{n}\tau > f(T) \tag{1.1}$$

donde n representa la densidad de la partícula cargada, τ es el tiempo de confinamiento y T es la temperatura del plasma. Las dispositivos de confinamiento magnético (*tokamaks* y *stellerators*) crean, mediante corrientes eléctricas, campos magnéticos que obligan a las partículas cargadas a seguir una trayectoria helicoidal, que se encuentra sobre superficies toroidales anidadas, con lo que se matienen en una región acotada. En un *tokamak*, el plasma es recorrido por una corriente inducida por un circuito externo y el sistema presenta simetría axial lo que reduce de manera natural el problema al caso bidimensional. Una completa descripción de los fenómenos de fusión nuclear y de los dispositivos de confinamiento magnético puede verse en [Miyamoto (1989)]. En este trabajo se presenta un método numérico para simular el equilibrio de un plasma en una máquina de tipo *tokamak*. El problema tiene términos no locales, que se tratan mediante iteración funcional, y términos no monótonos que son abordados con técnicas clásicas de dualidad no convexa.

2 Modelo matemático.

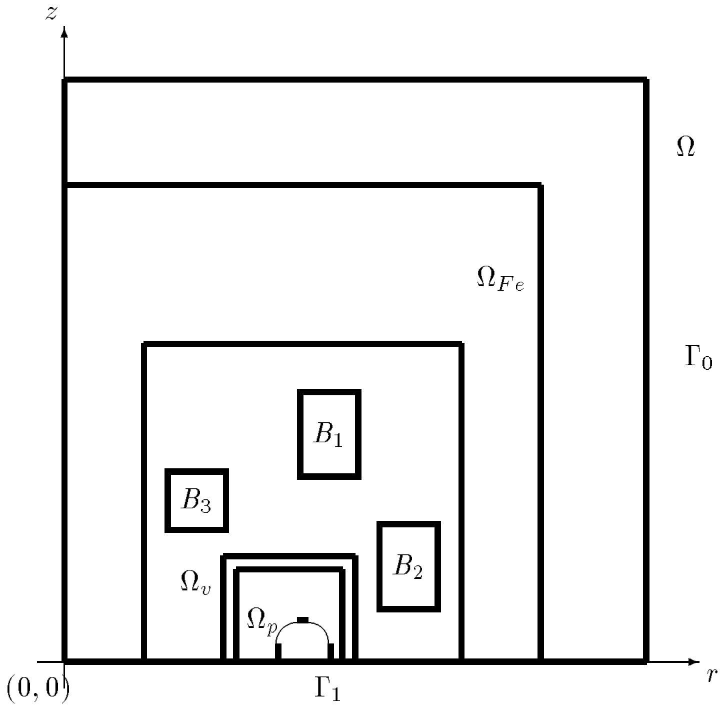

Figure 1: *Tokamak*

En la figura 1 se representa la semisección transversal de un *tokamak* tipo. Consta de una cámara de vacío (Ω_V) con paredes perfectamente conductoras, en la que se encuentra el plasma, y un núcleo de hierro (Ω_{Fe}) que actúa como el circuito primario de un transformador. Además, existen unas bobinas ($B_i, i = 1, 2, 3$) que permiten controlar la posición del plasma. La región que éste ocupa (Ω_p) estará contenida en Ω_v y no podrá tocar sus paredes. Se trata de un dominio heterogéneo con distintas características electromagnéticas.

El comportamiento del plasma puede modelarse mediante las ecuaciones de Maxwell 3-D

$$\begin{aligned} \mathbf{div}\,\vec{\mathbf{B}} &= 0 && (2.2)\\ \mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{H}} &= \vec{\mathbf{j}} && (2.3)\\ \vec{\mathbf{B}} &= \mu\vec{\mathbf{H}} && (2.4) \end{aligned}$$

donde $\vec{\mathbf{B}}$ denota la inducción magnética, $\vec{\mathbf{H}}$ el campo magnético, $\vec{\mathbf{j}}$ la intensidad de corriente y μ la permeabilidad magnética, que en el vacío y en el plasma es constante ($\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$) pero, en el hierro, será una función de $\vec{\mathbf{B}}$.

Además, debe verificarse la condición de equilibrio

$$\mathbf{grad}\, p = \vec{\mathbf{j}} \times \vec{\mathbf{B}} \tag{2.5}$$

lo que, en particular, implica

$$\mathbf{grad}\, p \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0 \qquad\qquad \mathbf{grad}\, p \cdot \vec{\mathbf{j}} = 0 \tag{2.6}$$

esto es, las líneas de campo y las líneas de corriente estan contenidas en superficies equipotenciales del campo de presiones.

Si se considera el sistema de coordenadas cilíndricas usual (r, θ, z), en un *tokamak* el campo y la intensidad de corriente son función sólo de r y z, por lo que la ecuación (2.2) se deduce la existencia de un campo escalar ψ tal que

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = rB_z \qquad\qquad \frac{\partial \psi}{\partial z} = -rB_r \tag{2.7}$$

Además, la presión es constante en el exterior del plasma, y en el dominio ocupado por éste, se deduce de (2.6) que $\mathbf{grad}\, p$ es paralelo a $\mathbf{grad}\, \psi$ por lo que $p = p(\psi)$, y, del mismo modo, de (2.3-2.4-2.6) resulta $B_\theta = \dfrac{\mu}{2\pi\, r} I(\psi)$. En este sistema de referencia, e introduciendo la simetría axial, la inducción $\vec{\mathbf{B}}$ y la densidad de corriente vienen dadas por

$$\vec{\mathbf{B}} = \frac{1}{r}\left\{\frac{\mu}{2\pi} I(\psi)\mathbf{e}_\theta + \mathbf{grad}\, \psi \times \mathbf{e}_\theta\right\} \tag{2.8}$$

$$\vec{\mathbf{j}} = \mathcal{L}(\psi)\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{2\pi r}\mathbf{grad}\, I(\psi) \times \mathbf{e}_\theta \tag{2.9}$$

siendo $\mathcal{L}(\cdot) = -\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r\mu}\dfrac{\partial}{\partial r}(\cdot)\right) - \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{1}{r\mu}\dfrac{\partial}{\partial z}(\cdot)\right)$. La condición de equilibrio (2.5) se reescribe entonces

$$\begin{aligned}
\mathbf{grad}\, p &= p'(\psi)\, \mathbf{grad}\, \psi = \\
\vec{\mathbf{j}} \times \vec{\mathbf{B}} &= \frac{1}{r}\left\{\mathcal{L}(\psi)\mathbf{e}_\theta \times (\mathbf{grad}\, \psi \times \mathbf{e}_\theta) + \frac{\mu}{4\pi^2 r} I(\psi) I'(\psi) (\mathbf{grad}\, \psi \times \mathbf{e}_\theta) \times \mathbf{e}_\theta\right\} \\
&= \frac{1}{r}\left\{\mathcal{L}(\psi) - \frac{\mu}{4\pi^2 r} I(\psi) I'(\psi)\right\} \mathbf{grad}\, \psi
\end{aligned}$$

obteniéndose la conocida ecuación de Grad-Shafranov para el potencial ψ:

$$\mathcal{L}(\psi) = \begin{cases} rp'(\psi) + \dfrac{\mu}{4\pi^2 r} I(\psi) I'(\psi) & \text{en} \quad \Omega_p \\ 0 & \text{en} \quad \Omega - (\bigcup_i B_i \bigcup \Omega_p) \\ (j_\theta)_i & \text{en} \quad B_i \end{cases} \tag{2.10}$$

En el modelo se tiene en cuenta además la intensidad de corriente superficial en las bobinas B_i, constantes dadas $(j_\theta)_i$, que se introducen para controlar la posición del plasma.

En el aire, en el vacío y en el plasma $\mu = \mu_0$ y el operador $\mathcal{L}$ es lineal y elíptico, pero en el hierro $\mu = \mu_0 \bar{\mu}$ siendo $\bar{\mu} = \dfrac{1}{\nu}$ con ν la reluctividad relativa que es una función no lineal de la inducción, por lo que $\mathcal{L}$ dado (2.10) es un operador elíptico no lineal.

Una propiedad característica del *tokamak* es que la intensidad de corriente en el plasma toma un valor dado positivo, I_p, que representa una restricción que debe satisfacer la solución

$$I_p = \int_{\Omega_p} \vec{\mathbf{j}} \cdot \vec{\mathbf{n}} ds = \int_{\Omega_p} \mathcal{L}\psi \, dr \, dz = \int_{\Omega_p} r p'(\psi) + \frac{\mu_0}{4\pi^2 r} I(\psi) I'(\psi) \, dr \, dz \tag{2.11}$$

(téngase en cuenta que $\mathbf{e}_\theta$ es la normal unitaria exterior a la superficie de integración).

Si se supone que la frontera del dominio está en el infinito la condición de contorno

$$\vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{n}} = 0 \tag{2.12}$$

y (2.7) dan la condición de contorno para ψ:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial z} n_r - \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} n_z = 0 \tag{2.13}$$

esto es, el potencial es una constante (desconocida) en la frontera. Como, por consideraciones de simetría, sólo se trabaja con la mitad del dominio, en la frontera inferior se impone la condición de flujo nulo y quedaría

$$\psi = \text{cte} \quad \text{en } \Gamma_0 \qquad\qquad \frac{\partial \psi}{\partial \eta_{\mathcal{L}}} = 0 \quad \text{en } \Gamma_1 \tag{2.14}$$

Se trata de un problema de frontera libre donde las funciones p e I son desconocidas. En la práctica, p e I en (2.10) vienen dadas por modelos empíricos, y, en general, se supone que los dos términos presentan el mismo tipo de dependencia de ψ y son invariantes por traslación y cambio de escala. Además se impone *a priori* una posición del plasma dando un delimitador D, subconjunto cerrado de Ω_v, que el plasma no puede rebasar, y se define la región ocupada por éste

$$\Omega_p = \left\{ x \in \Omega_v : \psi(x) > \sup_D \psi \right\}$$

Más concretamente, nosotros trabajaremos con las siguientes expresiones:

subdominio	permeabilidad	componente toroidal de la intensidad
Ω_{Fe}	$\mu = \dfrac{\mu_0}{\nu}$	$j_\theta = 0$
Ω_a	$\mu = \mu_0$	$j_\theta = 0$
Ω_{B_i}	$\mu = \mu_0$	$j_\theta = \dfrac{I_i}{S_i}$ I_i intensidad S_i sección
Ω_p	$\mu = \mu_0$	$j_\theta(r,\psi) = \lambda f(r) \left(\dfrac{\psi - \psi_p}{\psi_a - \psi_p} \right)_+$ $\psi_p = \sup_{x \in D} \psi(x) \qquad \psi_a = \sup_{x \in \Omega_p} \psi(x)$

donde $\Omega_a = \Omega - (\bigcup_i B_i) - \Omega_{Fe} - \Omega_p$, y $f(r) = \dfrac{r\beta}{R_0} + \dfrac{R_0(1-\beta)}{r}$ con β y R_0 características de cada *tokamak*. Notemos que en el término de corriente en el plasma aparece el flujo normalizado $\psi_N = \left(\dfrac{\psi - \psi_p}{\psi_a - \psi_p}\right)_+$, que introduce un factor no local, y un coeficiente λ que es una indeterminada del problema.

Puesto que el primer miembro de (2.10) es también invariante por traslación, podremos imponer en Γ_0 una condición Dirichlet homogénea:

$$\psi = 0 \quad \text{en } \Gamma_0 \tag{2.15}$$

Con las notaciones anteriores y representando por $\mathcal{X}_B$ la función característica del conjunto B, el problema que se resuelve numéricamente en este trabajo es el siguiente:

- Dadas las intensidades en la bobinas $I_i, i = 1, \ldots k$, los parámetros R_0, β, la posición del limitador D y una función de permeabilidad magnética μ hallar ψ y λ tales que

$$(P)\left\{\begin{array}{rcl} \mathcal{L}\psi = & \displaystyle\sum_i \frac{I_i}{S_i}\mathcal{X}_{B_i} + \lambda f(r)\psi_N \\ \psi = 0 & \text{en} & \Gamma_0 \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial\eta_{\mathcal{L}}} = 0 & \text{en} & \Gamma_1 \\ I_p = & \lambda \displaystyle\int_{\Omega_p} f(r)\psi_N \end{array}\right.$$

Calculando λ y ψ tendremos una solución de (2.10-2.11-2.14) para la intensidad de corriente en el plasma dada. Una descripción más detallada de esta transformación puede verse en [Blum (1989)].

Las soluciones admisibles físicamente serán aquellas en las que equipotencial $\bar{\psi} = \max_{x\in D} \psi(x)$ está contenida estrictamente en el interior de la cámara de vacío.

Modelos simplificados de este problema han sido ampliamente estudiados: en [Mignot y Puel (1980)] y [Berestycki y Brezis (1980)] se demuestra la existencia de solución con operador lineal y un término local en el plasma. En [Blum (1989)] se da una demostración para un modelo que incluye un término no local de corriente en el plasma y una no homogeneidad en el exterior del mismo (la aportación de las bobinas B_i) para un operador diferencial lineal.

3 Resolución numérica.

En esta sección se propone un algoritmo para resolver numéricamente las ecuaciones (P) en un *tokamak*, con un operador diferencial no lineal y un término no local de corriente en el plasma.

El algoritmo es secuencial con dos bucles, desdoblando el problema de manera que en el interior se resuelve un problema no lineal, que puede escribirse como un problema de minimización de un funcional diferencia de dos convexos, y en el bucle exterior se trata el problema de frontera libre con un esquema de punto fijo que permite hacer explícita la dependencia no local del flujo normalizado ψ_N y la condición integral.

3.1 El problema continuo

Comenzaremos construyendo una formulación débil del problema (P). Consideremos los espacios

$$\begin{aligned} L^s(\Omega, r) &= \left\{ u \in L^s(\Omega) : \int_\Omega u^s \, r \, dr dz < +\infty \right\} \\ \hat{W}^{1,s}(\Omega, r) &= \left\{ u \in L^s(\Omega) : \frac{\mathbf{grad}\, u}{r} \in (L^s(\Omega, r))^2 \right\} \end{aligned}$$

Evidentemente, $\hat{W}^{1,s}(\Omega, r) \subset W^{1,s}(\Omega)$. Si $s > 2$, $W^{1,s}(\Omega)$ es un espacio de funciones continuas; si $s = 2$ buscaremos la solución en $W^{1,s}(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$. Sea $V = \left\{ v \in \hat{W}^{1,s}(\Omega, r) : \; v = 0 \text{ sobre } \Gamma_0 \right\}$, si $s > 2$ ($V = \left\{ v \in \hat{W}^{1,s}(\Omega, r) \cap \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) : \; v = 0 \right.$ sobre $\left. \Gamma_0 \right\}$, si $s = 2$). Un problema equivalente a (P) sería:

- Hallar $\lambda \in \mathbb{R}, \psi \in V$ tales que

$$(P') \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_\Omega \nu \left(\frac{\|\mathbf{grad}\, \psi\,(r,z)\|^2}{r^2} \right) \frac{1}{\mu_0 r} \mathbf{grad}\, \psi\,(r,z) \mathbf{grad}\, \varphi\,(r,z) \, dr\, dz = \\ \displaystyle\int_\Omega \lambda \, f(r) \, \psi_N \varphi(r,z) \, dr \, dz \qquad \forall \varphi \in V \\ \displaystyle I_p = \int_{\Omega_p} \lambda \, f(r) \, \psi_N \end{array} \right.$$

con ν la función de reluctividad relativa dada.

Un esquema de punto fijo para el término no local ψ_N y la condición integral sería:

1- Inicialización ψ_a^0, ψ_p^0, λ^0

2- Etapa n

(2.i) Dados $\psi_a^n > \psi_p^n$ y λ^n. Hallar $\psi^{n+1} \in V$ tal que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nu \left(\frac{\|\mathbf{grad}\, \psi^{\,n+1}\|^2}{r^2} \right) \frac{1}{\mu_0 r} \mathbf{grad}\, \psi^{\,n+1} \mathbf{grad}\, \varphi \; dr\, dz = \\ \int_\Omega \lambda^n h(r) N_{\psi_a^n \psi_p^n}(\psi^{n+1}) \varphi \, dr \, dz \qquad \forall \varphi \in V \end{aligned}$$

siendo $N_{\psi_a^n \psi_p^n}(u) = \dfrac{(u-\psi_p^n)_+}{\psi_a^n - \psi_p^n}$

(2.ii) Calcular

$$
\begin{aligned}
\psi_p^{n+1} &= \sup_{x\in D} \psi^{n+1}(x)\\
\Omega_p^{n+1} &= \left\{ Q \in \Omega_v | \;\; \psi^{n+1}(Q) > \psi_p^{n+1} \right\}\\
\psi_a^{n+1} &= \sup_{x\in \Omega_p^{n+1}} \psi^{n+1}(x)\\
\lambda^{n+1} &= \frac{I_p}{\displaystyle\int_{\Omega_p} f(r)\, \psi_N^{n+1}\, dr\, dz}
\end{aligned}
$$

3- Si $\|(\psi_p^{n+1}, \psi_a^{n+1}) - (\psi_p^n, \psi_a^n)\| + |\lambda^{n+1} - \lambda^n| > \epsilon$ volver a (2)

La ecuación (2.i) es doblemente no lineal: en el primer miembro aparecen coeficientes que dependen del gradiente del flujo en el dominio Ω_{Fe} lo que da lugar a una no linealidad monótona y, en el segundo, la aproximación del flujo normalizado, $N_{\psi_a^n,\psi_p^n}(\psi) = \left(\dfrac{\psi - \bar{\psi}_p}{\bar{\psi}_a - \bar{\psi}_p}\right)_+$ que produce un término no monótono cuando se considera en el primer miembro.

3.2 Formulación variacional y regularización exacta de (2.i)

Siguiendo a [Fernández-Cara y Moreno (1992)], en esta sección se expresará el problema (2.i) como un problema de minimización de un funcional que, bajo ciertas condiciones sobre ψ_a^n, ψ_p^n y λ^n, puede escribirse como diferencia de dos funcionales convexos y continuos sobre V.

Dados $\bar{\psi}_a > \bar{\psi}_p$ y $\bar{\lambda}$, definimos

$$
G(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega rg\left(\frac{\|\mathbf{grad}\, u\,\|^2}{r^2}\right) dr\, dz \qquad g(t) = \frac{1}{\mu_0}\int_0^t \nu(\xi)d\xi \tag{3.16}
$$

$$
F_{\bar{\psi}_a\bar{\psi}_p\bar{\lambda}}(u) = \frac{1}{2}\int_{\Omega_p} \bar{\lambda}\, f(r)\, \frac{(u-\bar{\psi}_p)_+^2}{\psi_a^n - \psi_p^n}\, dr\, dz \tag{3.17}
$$

donde la función de reluctividad relativa ν es positiva y creciente.

Tanto $F_{\bar{\psi}_a\bar{\psi}_p\bar{\lambda}}$ como G son funcionales convexos y continuos definidos sobre $V = \left\{ v \in \hat{W}^{1,s}(\Omega, r) : \; v = 0 \text{ sobre } \Gamma_0 \right\}$, si $s > 2$ ($V = \left\{ v \in \hat{W}^{1,s}(\Omega, r) \cap \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) : v = 0 \text{ sobre } \Gamma_0 \right\}$, si $s = 2$).

Las soluciones de (2.i) son puntos críticos del funcional $J(\psi) = F_{\psi_a^n\psi_p^n\lambda^n}(\psi) - G(\psi)$ que verifican el sistema de optimalidad (véase [Toland (1978)])

$$
\psi \in \partial G^*(q) \qquad\qquad q \in \partial F_{\bar{\psi}_a,\bar{\psi}_p,\bar{\lambda}}(\psi) \tag{3.18}
$$

Utilizando un resultado de [Bermúdez y Moreno (1981)], (3.18) puede escribirse de manera equivalente como

$$\psi \in \partial G^*(q) \qquad\qquad q = (\partial F_{\bar{\psi}_a,\bar{\psi}_p,\bar{\lambda}})_\eta(\psi + \eta q) \tag{3.19}$$

cualquiera que sea $\eta > 0$ ($(\partial F_{\bar{\psi}_a\bar{\psi}_p\bar{\lambda}})_\eta$ denota la regularizada de Moreau-Yosida de $\partial F_{\bar{\psi}_a,\bar{\psi}_p,\bar{\lambda}}$), lo que sugiere un esquema semiexplícito para resolverlo:

- Dado $q^0 \in V'$, para $k \in \mathbb{N}$ calcular

$$\left\{ \begin{array}{lcl} q^k & \in & \partial G(\psi^{k+1}) \\ q^{k+1} & = & (\partial F_{\bar{\psi}_a\bar{\psi}_p\bar{\lambda}})_\eta(\psi^{k+1} + \eta q^k) \end{array} \right. \tag{3.20}$$

Sobre la existencia de solución de (3.18) y la convergencia de (3.20) puede consultarse [Fernández-Cara y Moreno (1992)].

Notemos que, en el algoritmo (3.20), para cada k la primera ecuación es no lineal; además admite solución única que es el mínimo del funcional $\hat{G}_k(v) = G(v) - < q^k, v >$ por lo que necesitaremos un método iterativo para resolverla. Sean A_1 y G^ω definidos por:

$$A_1(u,u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{1}{\mu_0 r}\|\mathbf{grad}\, u\,\|^2 dr\, dz$$

$$G^\omega(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega g\left(\frac{\|\mathbf{grad}\, u\,\|^2}{r^2}\right) r dr\, dz - \int_\Omega \frac{\omega}{2\mu_0 r}\|\mathbf{grad}\, u\,\|^2\, dr\, dz$$

Se verifica que $G(u) = \omega A_1(u,u) + G^\omega(u)$. Para cada valor de k, conocido q^k se calcula ψ^{k+1} de nuevo utilizando el esquema iterativo:

- Dado $\mathbf{m}_0^{k+1} \in (L^s(\Omega, r))^2$, para $l \in \mathbb{N}$ calcular

$$\left\{ \begin{array}{ccc} -\mathbf{div}\, \mathbf{m}_l^{k+1} & \in & \omega\partial A_1(\psi_{l+1}^{k+1}) - q^k \\ \mathbf{m}_{l+1}^{k+1} & = & \sigma_\eta^\omega(\dfrac{\mathbf{grad}\, \psi_{l+1}^{k+1}}{r} + \eta \mathbf{m}_l^{k+1}) \end{array} \right. \tag{3.21}$$

siendo $\sigma(z_1, z_2) = \nu(\|z_1, z_2\|^2)(z_1, z_2)$. La convergencia de (3.21) está entonces garantizada por la proposición 3.1. de [Bermúdez y Moreno (1981)].

Más concretamente, el algoritmo propuesto, con los dos esquemas iterativos imbricados es el siguiente:

Sean $\omega, \eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}$.

1- Inicialización q^0

2- Etapa k: Dado q^k,

2.1 Hallar $\psi^{k+1} \in V$ tal que

$$\int_\Omega \nu\left(\frac{\|\mathbf{grad}\,\psi^{k+1}\|^2}{r^2}\right)\frac{1}{\mu_0 r}\mathbf{grad}\,\psi^{k+1}\,\mathbf{grad}\,\varphi\,dr\,dz = \int_\Omega q^k \qquad \forall \varphi \in V$$

resolviendo

(2.1.i) Inicialización $\mathbf{m}_0^{k+1}$

(2.1.ii) Dado $\mathbf{m}_l^{k+1}$, hallar $\psi_{l+1}^{k+1} \in V$ tal que

$$\omega \int_\Omega \mathbf{grad}\,\psi_{l+1}^{k+1} \cdot \mathbf{grad}\,\varphi\,\frac{dr}{\mu_0 r}dz = \int_\Omega \mathbf{m}_l^{k+1} \cdot \mathbf{grad}\,\varphi\,drdz + \int_\Omega q^k\,dr\,dz$$

(2.1.iii) Actualización del multiplicador

$$\mathbf{m}_{l+1}^{k+1} = \sigma_{\eta_1}^{\omega}\left(\frac{\mathbf{grad}\,\psi_{l+1}^{k+1}}{r} + \eta_1 \mathbf{m}_l^{k+1}\right)$$

(2.1.iv) Si $\|\mathbf{m}_{l+1}^{k+1} - \mathbf{m}_l^{k+1}\| > \epsilon$ volver a (2.1.ii)

2.2 Actualización del multiplicador q

$$q^{k+1} = (\partial F_{\bar\psi_a \bar\psi_p \bar\lambda})_{\eta_2}(\psi^{k+1} + \eta_2 q^k)$$

3- Si $|q^{k+1} - q^k| > \epsilon$ volver a (2)

Desde el punto de vista numérico pueder ser interesante implementar una variante con la actualización simultánea de ambos multiplicadores.

3.3 El problema discretizado.

Se ha considerado un dominio como el de la figura 2 con una triangulación $\mathcal{T}_h$ (Fig. 3) de manera que cada triángulo es de material homogéneo. Las zonas oscuras y el borde semicircular de la cámara de vacío son de hierro y hay cinco bobinas rectangulares para controlar la posición del plasma.

Se considera el espacio de funciones continuas, polinómicas de grado uno a trozos, relativo a la triangulación. El problema discretizado sería:

- Hallar $\psi_h \in V_h = \{\varphi_h \in \mathcal{C}^0 : \varphi_h|_T \in \mathbb{P}_1 \text{ para todo } T \in \mathcal{T}_h, \varphi_h = 0 \text{ sobre } \Gamma_0\}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que

$$\int_\Omega \nu_h\left(\frac{\|\mathbf{grad}\,\psi_h(r,z)\|^2}{r^2}\right)\frac{1}{\mu_0 r}\mathbf{grad}\,\psi_h(r,z)\mathbf{grad}\,\varphi_h(r,z)\,dr\,dz =$$

$$\int_\Omega \lambda\, f(r)\, \psi_N \varphi_h(r,z)\, dr\, dz \qquad \forall \varphi_h \in V_h$$

$$I_p = \int_{\Omega_p} \lambda\, f_h(r)\, \psi_N\, dr\, dz$$

donde $\nu_h\left(\dfrac{\|\mathbf{grad}\, \psi_h\,(r,z)\|^2}{r^2}\right)$ y f_h son la proyecciones por interpolación sobre V_h en los vértices de la malla de $\nu\left(\dfrac{\|\mathbf{grad}\, \psi_h\,(r,z)\|^2}{r^2}\right)$ y f. Esto corresponde a calcular las integrales utilizando fórmulas integración numérica exactas en $\mathbb{P}_1$ (fórmula del baricentro o de los vértices).

El algoritmo que aproxima la solución del problema discretizado es el análogo al construido para el problema continuo. Lo detallamos para la versión con actualización simultánea de ambos multiplicadores:

Sean $\omega, \eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}$.

1- Inicialización ψ_a^0, ψ_p^0, λ^0

2- Etapa n

(2.i) Dados $\psi_a^n > \psi_p^n$ y λ^n.

(2.i.1) Inicialización q_h^0 y $\mathbf{m}_h^0$

(2.i.2) Etapa k: Dados q_h^k, $\mathbf{m}_h^k$

- Hallar $\psi_h^{k+1} \in V_h$ tal que

$$\omega \int_\Omega \mathbf{grad}\, \psi_h^{k+1} \cdot \mathbf{grad}\, \varphi_h \frac{dr}{\mu_0 r} dz =$$

$$\int_\Omega \mathbf{m}_h^k \cdot \mathbf{grad}\, \varphi_h\, dr dz + \int_\Omega \lambda^n\, f(r)\, q_h^k\, \varphi_h\, dr dz \;\; \forall \varphi_h \in V_h$$

- Actualización de los multiplicadores

$$\mathbf{m}_h^{k+1} = \sigma_{\eta_1}^\omega \left(\frac{\mathbf{grad}\, \psi_h^{k+1}}{r} + \eta_1 \mathbf{m}_h^{k+1}\right)$$

$$q_h^{k+1} = N_{\eta_2}(\psi_h^{k+1} + \eta_2 q_h^k)$$

siendo $N(u) = \dfrac{(u-\psi_p^n)_+}{\psi_a^n - \psi_p^n}$ y $\sigma(z_1,z_2) = \nu(\|z_1,z_2\|^2)(z_1,z_2)$.

(2.i.3) Si $|q_h^{k+1} - q_h^k| + \|\mathbf{m}^{k+1} - \mathbf{m}^k\| > \epsilon$ volver a (2)

(2.ii) Calcular

$$\psi_p^{n+1} \;\; = \;\; \sup_{x \in D} \psi_h^{n+1}(x)$$

$$
\begin{aligned}
\Omega_p^{n+1} &= \left\{ Q \in \Omega_v | \ \ \psi_h^{n+1}(Q) > \psi_p^{n+1} \right\} \\
\psi_a^{n+1} &= \sup_{x \in \Omega_p^{n+1}} \psi_h^{n+1}(x) \\
\lambda^{n+1} &= \frac{I_p}{\displaystyle\int_{\Omega_p} f(r)\,(\psi_h^{n+1})_N \ dr\,dz}
\end{aligned}
$$

(2.iii) Si $\|(\psi_p^{n+1}, \psi_a^{n+1}) - (\psi_p^n, \psi_a^n)\| + |\lambda^{n+1} - \lambda^n| > \epsilon$ volver a (2)

3.4 Resultados Numéricos

En la malla de la figura 3 las dimensiones de la estructura mallada son 9.35 m. $\times$ 7.6 m.. La cámara de vacío tiene un radio de $r_0 = 1.5$ m. y un radio mayor de $R_0 = 2.96$ m. Hemos tomado la función de reluctividad relativa considerada en [Marrocco y Pironneau (1977)] $\nu(t) = \epsilon + (c - \epsilon)\dfrac{t^\alpha}{t^\alpha + T}$ donde $\alpha = 5.419$, $\epsilon = 5.16 \times 10^{-4}$, $T = 8.759 \times 10^3$, $c = 0.176$. El campo toroidal está creado por las bobinas

	intensidad(J_θ)	posición	área(S)
B_1	-0.97×10^5	$(2, .3.7)$	.7225
B_2	-0.97×10^5	$(5., 2.45)$	.5625
B_3	-0.97×10^5	$(6.65, 4.)$	.4225
B_4	5.5×10^6	$(.9, 0.)$	.4
B_5	0.	$(1.1, 2.65)$	.5686

y el plasma es recorrido por una intensidad de 5×10^5 A. El limitador está situado en el punto $(2., 0.)$. Se obtiene $\lambda = 2.428 \times 10^5$, $\psi_a = 75.85$ y $\psi_p = 71.84$. Las equipotenciales de la solución se representan en la figura 4 y la posición del plasma en 5.

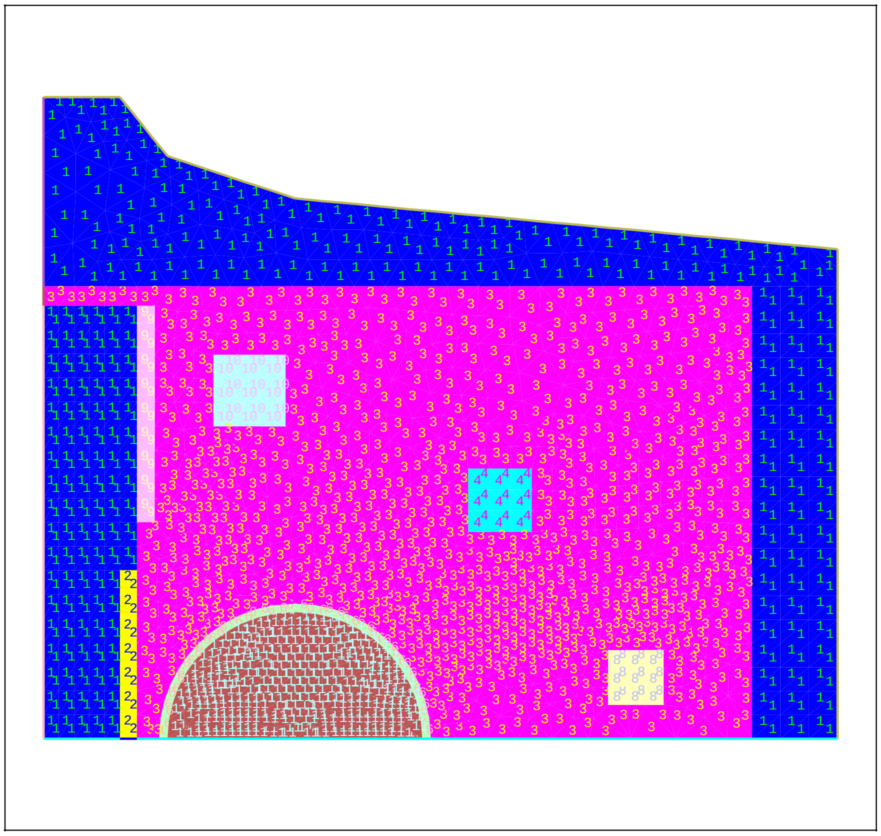

Figure 2: Dominio.

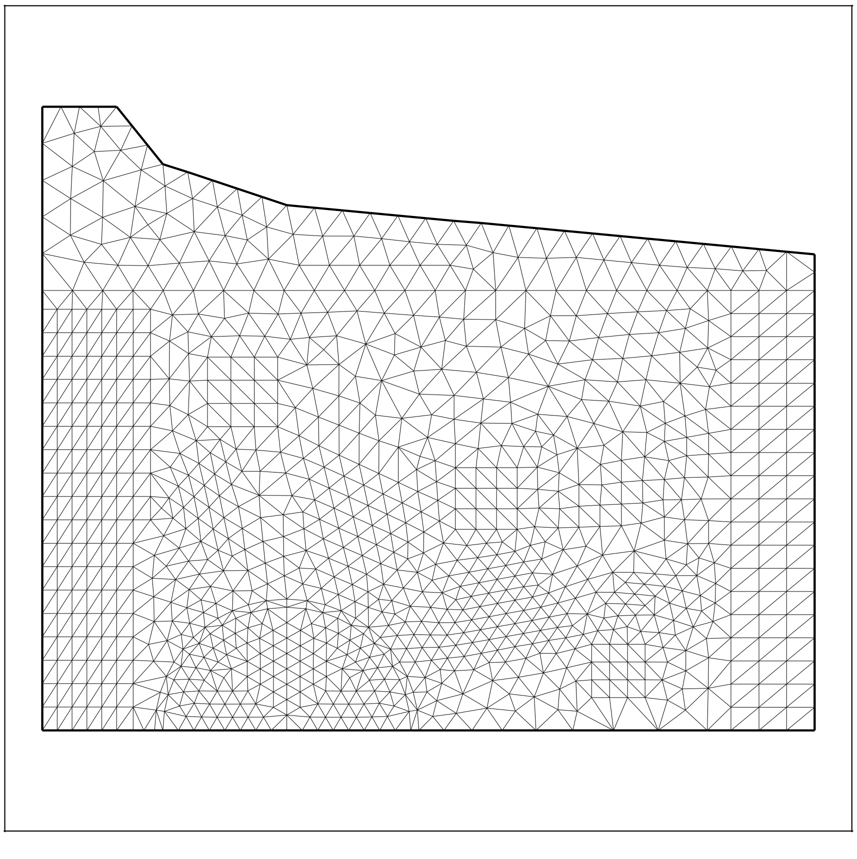

Figure 3: Malla.

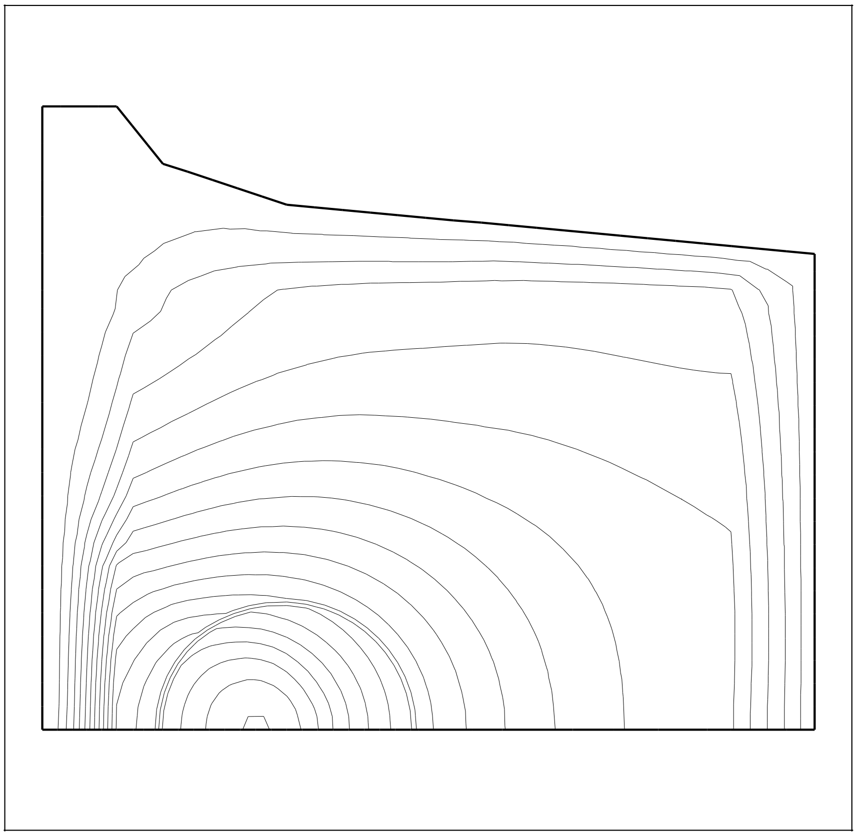

Figure 4: Equipotenciales (limitador en (2.,0.)).

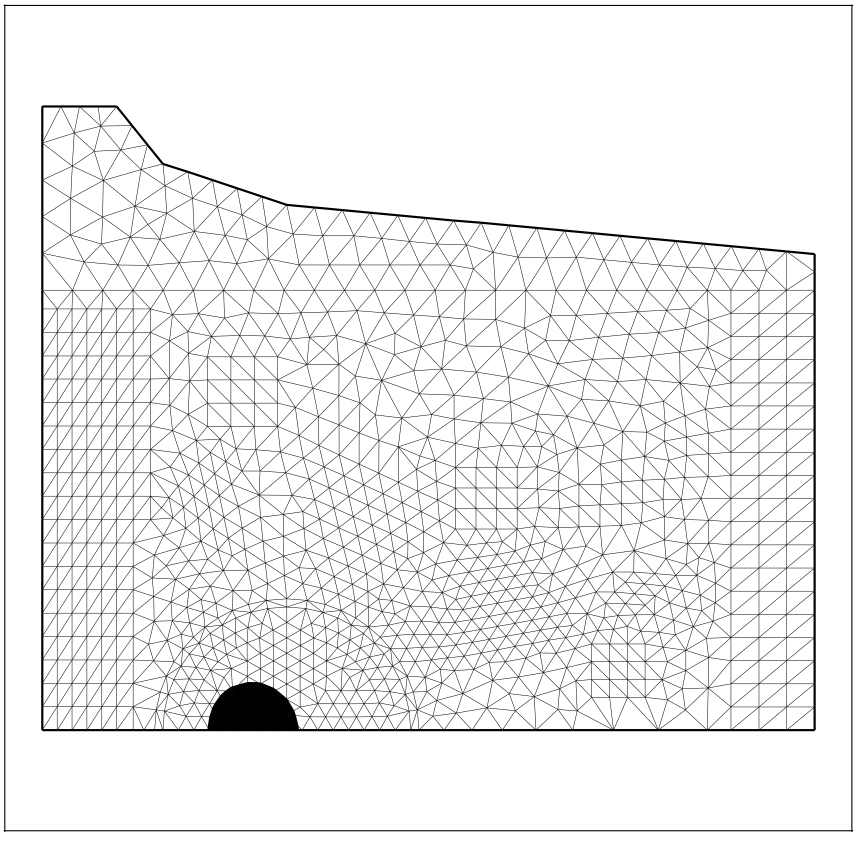

Figure 5: Posición del plasma (limitador en (2.,0.)).

Referencias

[Berestycki y Brezis (1980)] Berestycki, H., Brezis, H. (1980): "On a free boundary problem arising in plasma physics", *Nonlin. Anal.* **4**, 415-436.

[Bermúdez y Moreno (1981)] Bermúdez, A., Moreno, C. (1981): "Duality Methods for Solving Variational Inequalities", *Comp. Maths. Appls.* **7**, 43-58.

[Blum *et al.* (1986)] Blum, J., Gallouet, T., Simon, J.(1986): "Existence and Control of plasma equilibrium in a tokamak", *SIAM J. Math. Anal. 17* **5**, 1158-1177.

[Blum (1989)] Blum, J.(1989): *Numerical Simulation and Optimal Control in Plasma Physics*. Wiley/Gauthier-Villars.

[Fernández-Cara y Moreno (1992)] Fernández-Cara, E. - Moreno, C. (1992): "Critical Point Approximation Through Exact Regularization", *Math. Comp. 50* **181**, 139-153.

[Marrocco y Pironneau (1977)] Marrocco, A. - Pironneau, O. (1977): "Optimum desing with lagrangian finite elements: desing of an electromagnet", *Rap. Rech. IRIA* **251**.

[Mignot y Puel (1980)] Mignot, F., Puel, J.P. (1980): "On a class of nonlinear problems with positive, increasing, convex nonlinearity", *Comm. Par. Diff. Eq. 5* **8**, 791-836.

[Miyamoto (1989)] Miyamoto, K.(1989): *Plasma Physics for Nuclear Fusion*. MIT Press.

[Puel (1977)] Puel, J.P. (1977): "A nonlinear eigenvalue problem with free boundary", *C.R.A.S. Paris, 284, Série* **A**, 861-863.

[Rockafellar (1970)] Rockafellar, R.T.(1970): *Convex Analysis*. Princeton University Press.

[Teman (1975)] Teman (1975): "A nonlinear eigenvalue problem: equilibrium shape of a confined plasma", *Arch. Rat. Mech. Anal.* **65**, 51-73.

[Teman (1977)] Teman (1977): "Remarks on a free boundary problem arising in plasma physics", *Comm. Par. Diff. Eq. 2* **6**, 563-585.

[Toland (1978)] Teman (1978): "Duality in nonconvex optimization", *J. Math. Appl.* **66**, 399-415.