Existencia de medidas invariantes asociadas a ciertas familias uniparametricas

Francisco Balibrea y Antonio Linero
Departamento de Matematicas
Universidad de Murcia.-Campus de Espinardo
30100 Murcia.

0. Introducción.

Dada una función continua f del intervalo $I = [0,1]$ en sí mismo,decimos que $x \in I$ es un *punto fijo* de f cuando $f(x) = x$. La *iterada n-ésima* de f se representa por f^n, esto es, $f^n = f \circ f \circ^{\dots n\ veces} \circ f$, $n \geq 2$, $f^0 = Id$.Un punto $x \in I$ se dice que es *periódico de orden k* cuando $f^k(x) = x$, $f^j(x) \neq x$, j=1,2,..,k-1. En general, la *órbita* de un punto a través de la función continua f es el conjunto $Orb_f(x) = \{x, f(x), f^2(x), \dots\} = \{f^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$. En particular, si el punto es periódico, se dice que la órbita es un *ciclo* u *órbita periódica*: $P = \left\{x, f(x), \dots, f^{k-1}(x)\right\}$. Hay un tipo muy concreto de ciclo: los ciclos atractores. Dada una función continua f, se dice que un punto fijo x es *atractor* si existe un entorno $U = U(x)$ tal que para cualquier punto $y \in U$ se cumple que la sucesión de iteradas $\{f^n(y)\}_{n \geq 0}$ converge a x. En oposición a este concepto, aparecen los punto fijos *repulsores:* Un punto fijo x se dice que es repulsor cuando posee un entorno $U = U(x)$ de modo que para todo $y \in U$, $y \neq x$, ocurre que $f^n(y) \notin U$, para algún valor n, es decir, empezando la iteración en cualquier punto de U, habrá iteradas que salgan continuamente de U. Se dice que un ciclo de orden k, $\{x_0, x_{1,\dots,} x_{k-1}\}$ es un *ciclo atractor* cuando algún punto del ciclo es un punto fijo atractor de f^k. Si, en cambio, cualquier punto del ciclo es un punto fijo repulsor de f^k, el ciclo se denomina repulsor.

Una condición suficiente para que un punto fijo x sea atractor viene dada en términos de la derivada: Si f es derivable en x, con $\mid Df(x) \mid < 1$, el punto fijo x es atractor. Análogamente, cuando la derivada es mayor que 1, el punto fijo x es repulsor. Cuando se trata de trasladar esta condición a los ciclos, se utiliza la regla de la cadena, $Df^k(x_0) = \Pi_{i=0}^{k-1} Df(x_i)$, sobre el ciclo $P = \{x_i\}_{i=0}^{k-1}$ de orden k. Entonces, si $\mid Df^k(x_i) \mid < 1$, el ciclo es atractor. Obsérvese que $Df^k(x_i) = Df^k(x_0)$, $\forall i$. Cuando la derivada vale 1, pueden darse los dos casos: atracción o repulsión.

¿Por qué interesa investigar la existencia o no de ciclos atractores en funciones continuas? El interés de las iteraciones queda estrechamente ligado a su aplicación en otros campos de la ciencia como la física, biología, economía, ... Por ejemplo, cuando se proporciona un modelo matemático para el crecimiento o la evolución de un sistema dinámico, se obtiene una relación de recurrencia del tipo $x_{n+1} = f(x_n)$, donde f es una función continua , x_n es el estado o situación del sistema inicial al cabo de un interavalo de tiempo repetido n veces. Así que, por ejemplo, si la función posee, dentro de los posibles valores para los estados iniciales, un único punto fijo, y además es atractor, se puede concluir que el sistema evolucionará finalmente hacia el mismo estado estacionario.

Un modelo discreto de poblacón en movimiento es $x_{n+1} = ax_n(1 - x_n)$, aquí $x_n \in [0, 1]$ es el índice de población relativa, y a un parámetro que recoge diversas circunstancias como alimentos disponibles, agresiones del medio ambiente, ... Un modelo epidemiológico viene formulado a través de la relación $x_{n+1} = (1 - x_n).(1 - e^{-ax_n})$, donde x_n es el número relativo de individuos enfermos en el tiempo n, y a representa un parámetro de mortandad que contiene la información sobre cantidad y calidad de alimentos, condiciones de higiene, ...(el desarrollo pormenorizado puede encontrarse en [Sm]).

En los modelos anteriores, se puede analizar la presencia de puntos fijos atractores o repulsores, ciclos atractores, ..., dependiendo del valor del parámetro a elegido al formalizar el desarrollo. Según tal elección, existirán o no ciclos atractores. En el primer caso, los sistemas tenderán a estabilizarse alrededor de situaciones concretas (extinción de la población, control de la epidemia entre ciertos valores, ...). En el segundo,se producirán fenómenos caóticos: La población crece de forma extremadamente irregular, la epidemia presenta de súbito, tras un aparente estado de calma, un inesperado rebrote, ... Aquí radica, por tanto, el interés del estudio de los ciclos atractores, en sus aplicaciones a la ecología, la física, ...

En los dos modelos comentados aparecen funciones unimodales con ciertas propiedades de derivación: son funciones S-unimodales. Una función continua $f : I \longrightarrow I$ se dice que es $S-unimodal$ cuando:

$S1)$ f es $C^1 - unimodal$: f es estrictamente creciente en $[0, c]$, estrictamente decreciente en $[c, 1]$, f es de clase C^1, $f(c) = 1$, $Df(x) \neq 0$, si $x \neq 0$.

$S2)$ f es de clase C^3, para poder definir la *derivada schwarziana* Sf:

$$Sf(x) = \frac{D^3 f(x)}{Df(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{D^2 f(x)}{Df(x)}\right)^2.$$

Ha de ser $Sf(x) < 0$, $\forall x \in I - \{c\}$, y en $x = c$ se admite el valor $-\infty$.

$S3) D^2 f(c) < 0$,esto es, el punto crítico c es no degenerado.

Este tipo de funciones presenta una sorprendente peculiaridad: Si existe algun ciclo atractor, es único, y atrae a los extremos del intervalo o al punto crítico ([CE]). Esto permite dar un criterio para localizar ciclos no atractores (

por ejemplo, para $f(x) = 4x(1-x)$, las órbitas de $0, 1/2$ y 1 son $\{0,0,0,...\}$, $\{1/2,1,0,0,0,...\}$, $\{1,0,0,0,...\}$, respectivamente, así que el punto fijo $\{0\}$ atrae a $0, 1/2$ y 1, sin embargo $Df(0) = 4 > 1$, por tanto no hay ciclos atractores.

No siempre es fácil apreciar la marcha de las iteradas de $0, 1/2$ y 1. Entonces, se acude a la evolución de las derivadas $\mid Df^n(1) \mid$, utilizando el concepto de exponente de Lyapunov:

$$\text{(CE) } lím \inf{}_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mid Df^n(1) \mid = \lambda(f).$$

Si una función unimodal, con buenas propiedades de partida, como ser S-unimodal, verifica la *condición de Collet-Eckmann* $\lambda(f) > 0$, el teorema de Singer asegura que f no posee órbitas periódicas estables o atractoras([Sin]). La condición de Collet-Eckmann impide la presencia de ciclos atractores, porque si los hubiera,en la órbita del extremo $\{1\}$ se estabilizaría alrededor de una cierta órbita periódica estable, y su derivada quedaría acotada. Pero no es el caso, ya que por cumplirse (CE) se llega a que $\mid Df^n(1) \mid > e^{\alpha n}$, para cierto valor $\alpha > 0$.

El primer objetivo que nos planteamos es, para cierta familia de funciones unimodales del intervalo en sí mismo que depende de un determinado parámetro a, la obtención de un conjunto de valores del parámetro a, de medida de Lebesgue positiva, para cuyas funciones asociadas no existen órbitas atractoras o estables. Esto da idea de la complicación dinámica tan grande que puede presentar un modelo de población tan simple de formalizar como el propuesto por R. May en 1976 para una colonia de insectos, $f_a(x) = ax(1-x)$ ([May]). Además, obsérvese cómo a partir de una propuesta determinista, se presenta un proceso caótico, aleatorio, del que, no obstante, queremos extraer cierta dosis de regularidad.

Responderemos a la cuestión planteada en el párrafo anterior sobre la siguiente familia:

$h_\alpha(x) = \cos(\alpha\pi\left(x - \frac{1}{2}\right))$, $x \in I = [0,1]$, $\alpha \in [0,1]$,que tiene interés para conocer el comportamiento de ciertos sistemas de ecuaciones diferenciales en el escenario de Hopf-Silnikov.

La estructura de este trabajo es la siguiente:

— Se encuentra para h_α un conjunto de valores del parámetro α que verifican la condición (CE), impidiendo la aparición de ciclos atractores. Generalmente, la obtención de este conjunto de valores se realiza por una construcción directa utilizando un fino proceso de inducción ([BC1, 2], [J], [Ry], ...). Sin embargo, es posible obtener el conjunto mediante la descripción, en un entorno adecuado, de su complementario. Este método es más simple, pero el conjunto se obtiene de forma menos precisa, y es debido a M. Tsujii ([Ts1, 2]). El desarrollo que emplearemos está inspirado precisamente en ese par de artículos. Recordemos que la realización de la condición (CE) implica la existencia de una medida μ_α invariante para h_α,y absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue ([J] , [BC] , [CE] , [Mis] , ...).

— Basándonos en el estudio anterior, expondremos una cuestión acerca de la posible construcción de medidas invariantes asociadas a *funciones bimodales* relacionadas con problemas cuya resolución se efectúa mediante ecuaciones en derivadas parciales muy concretas.

1. Definiciones. Enunciado de los teoremas.

Estudiamos la función analítica $h_\alpha(x) = \cos\left(\alpha\pi\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)$, $\alpha \in [0,1]$.

Empezaremos definiendo la función auxiliar η_m que recoge la información sobre la evolución de las iteradas del punto crítico: $\eta_m(\alpha) = h_\alpha^m(1)$, $m \geq 0$, $\alpha \in [0,1]$, $h_\alpha : [0,1] \longrightarrow [0,1]$.

Al construir el conjunto de parámetros que verifican la condición (CE), debemos, en principio, descartar todos los elementos α que cumplan $\eta_m(\alpha) = \frac{1}{2}$, para algún valor m, porque en dicho caso se llega , usando la regla de la cadena, a que $\mid Dh_\alpha^n(1) \mid = 0$, $\forall n > m$, y no tiene sentido hablar de la condición (CE).

Por otro lado, si α es tal que $h_\alpha^n(1) = \frac{1}{2}$, entonces aparece una órbita periódica de periodo $p \mid m+1$, que además es superestable (órbita periódica estable de orden p tal que $Dh_\alpha^p(x) = 0$, para cualquier elemento x del ciclo), pues $Dh_\alpha^n(\frac{1}{2}) = 0$. Tenemos, por tanto, un ciclo atractor, que genera una medida singular, alejada de nuestro interés: medidas invariantes absolutamente continuas respecto a la medida de Lebesgue.

Surge seguidamente la siguiente cuestión: ¿Cómo habrá que proceder alrededor de los valores α tales que $\eta_m(\alpha) = \frac{1}{2}$? Si el parámetro no cumple la condición (CE), existirá una sucesión de enteros $1 \leq m(1) < m(2) < ... < m(p)$ tales que $h_\alpha^{m(i)} = \eta_{m(i)}(\alpha) \sim \frac{1}{2}$, y para cada i se puede encontrar un valor α_i de modo que $\alpha_i \sim \alpha$, con $h_{\alpha_i}^{m(i)}(1) = 0$. Esto quiere decir que si h_α no cumple (CE), el parámetro α pertenece a un entorno pequeño de $\left\{\beta \in [0,1] \ / \ h_\beta^{m(i)}(1) = \frac{1}{2}\right\}$, para cada i. ¿Cómo debemos proceder a la hora de eliminar esos pequeños intervalos de parámetros ?

Sea $\Im_m = \left\{\alpha \in [0,1] \ / \ \eta_m(\alpha) = \frac{1}{2},\ \partial_\alpha\eta_i(\alpha) \neq 0,\ 1 \leq i \leq m\right\}$ el conjunto de las antiimágenes de $\frac{1}{2}$ a través de η_m con la condición adicional de derivada no nula, para así garantizar que η_i sea difeomorfa sobre el intervalo J descartado. Para que esto ocurra, a su vez debemos asegurar la acotación de la derivada $\partial_\alpha\eta_i$ en J, $1 \leq i \leq m$, en términos puramente formales, debemos garantizar que la distorsión de η_m quede acotada.

Se define la *distorsión* de una función continua g sobre un intervalo J como

$$dist(g,J) = \sup_{x,y\in J} \log \frac{|Dg(x)|}{|Dg(y)|}.$$

Obsérvese que $dist(g,J) = \infty$ cuando el intervalo J contiene algún punto crítico.

Asociado a cada valor del parámetro α y a cada número natural m, se define $\tau = \tau(m,\alpha)$ como el mayor número real $\tau \geq 0$ que cumple:

$\tau 1)$ $dist\left(\eta_i, [\alpha-\tau, \alpha+\tau] \cap [0,1]\right) < \frac{1}{10}$, para $1 \leq i \leq m$.
$\tau 2)$ $\eta_m\left([\alpha-\tau, \alpha+\tau] \cap [0,1]\right) \subset \left[\eta_m(\alpha) - \frac{1}{100}, \eta_m(\alpha) + \frac{1}{100}\right]$.

Alrededor de cada valor α definimos los intervalos

$$J_m^0(\alpha) = [\alpha - \tau(m,\alpha), \alpha + \tau(m,\alpha)],\ J_m^0 = \cup_{\alpha \in \Im_m} J_m^0(\alpha).$$

Evidentemente, puede ocurrir que $J_m^0(\alpha) \cap J_n^0(\alpha') \neq \emptyset$, para ciertos valores m, n, $\alpha \in \Im_m$, $\alpha' \in \Im_n$. En dicho caso, nos interesará trocear los intervalos de modo que se obtengan buenas propiedades de inclusión de un intervalo en otro, y que permita, además, dar alguna estimación sobre la longitud de dicha intersección. Por ello, se define, para $k = 0, 1, 2, \ldots$:

$$J_m^k(\alpha) = \left[\alpha - \tau(m,\alpha)e^{-\beta k}, \alpha + \tau(m,\alpha)e^{-\beta k}\right],\ J_m^k = \cup_{\alpha \in \Im_m} J_m^k(\alpha),$$

donde el valor de la constante β se precisará en su momento.

También los intervalos del tipo J_m^k se pueden cortar entre sí. Nos fijamos en esas intersecciones, de longitud controlada, como se verá en el lema 1.1. Se define:

$$A_n = \left\{ \begin{array}{c} \alpha \in [0,1] \ / \ \alpha \in \cap_{i=1}^p J_{m(i)}^{k(i)}, \text{ para algún } p \leq n, \text{ y algunas sucesiones } \{m(i)\}_i, \{k(i)\}_i \\ \text{que cumplen } A1 \text{ y } A2 \end{array} \right\}$$

Las condiciones $A1$ y $A2$ son:
$(A1)$ $1 \leq m(1) < m(2) < \ldots < m(p) \leq n$, así que $p \leq n$.
$(A2)$ $\sum_{i=1}^p (k(i)-1)\beta > \gamma.n$, con $k(i) \geq 2$, $\forall i$, donde γ es una nueva constante que se determinará posteriormente.

Nuestro conjunto candidato a complementario del conjunto de valores que verifican la condición (CE) es:

$$A = \cup_{n \geq 1} A_n.$$

Con todas las notaciones y definiciones ya expuestas , enunciamos:

Teorema 1:

e cumple $|\ A \cap [1-\epsilon, 1]\ | < \epsilon^{1+\rho} < \epsilon$ *, para* ϵ *suficientemente pequeño y* $0 < \rho < 10^{-10}$ *constante (aquí* $|\ .\ |$ *denota la medida deLebesgue). Esto implica que la medida de Lebesgue del complementario de* A*, en un entorno adecuado del valor* $\alpha = 1$ *es positiva.*

Teorema 2:

Para cada valor $\alpha \in [1-\epsilon, 1]$ *,* h_α *verifica la condición Collet-Eckmann (CE), asegurando para* h_α *la existencia de medidas invariantes absolutamente continuas respecto a la medida de Lebesgue.*

2. Demostración del teorema 1.

Definición: α_m es el valor más próximo a 1 tal que $\eta_m(\alpha_m) = \frac{1}{2}$, es decir, $\alpha_m = m\acute{a}x\left\{\eta_m^{-1}(\frac{1}{2})\right\}$. Por otro lado, $J_m = [\alpha_m, 1]$.

Propiedades de la función η_m :

$\eta 1)$ η_m es decreciente en J_m (se demuestra por inducción, teniendo en cuenta que $\eta_{m+1}(\alpha) = h_\alpha(\eta_m(\alpha)) = \cos\left(\alpha\pi(\eta_m(\alpha) - \frac{1}{2})\right)$, entonces

$\partial_\alpha \eta_{m+1} = -\pi sen\left(\alpha\pi(\eta_m(\alpha) - \frac{1}{2})\right).(\eta_m(\alpha) - \frac{1}{2} + \alpha\partial_\alpha\eta_m(\alpha))$ tiene signo negativo en J_{m+1}.

$\eta 2)$ Si $\alpha' \in \eta_m^{-1}(\frac{1}{2})$, entonces , usando de nuevo la regla de la cadena aplicada en $\eta 1)$, resulta $\partial_\alpha \eta_{m+1}(\alpha') = 0$.

$\eta 3)$ η_m es difeomorfa sobre J_m , verificándose que $\eta_m(J_m) = \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

$\eta 4)$ $\eta_i\ (J_m) \subseteq \left[0, \frac{1}{6}\right]$, para i=1,2,...,m-1, porque $J_1 \subset J_2 \subset ... \subset J_{m-1} \subset J_m$, y además es $0 \leq \eta_1(\alpha_m) \leq ... \leq \eta_{m-1}(\alpha_m) < \frac{1}{2}$, porque si fuera mayor que $1/2$, η_{m-1} no sería decreciente en $[\alpha_{m-1}, 1]$. Como $\eta_m(\alpha_m) = \frac{1}{2} = h_\alpha(\eta_{m-1}(\alpha)) = \cos\left(\alpha_m\pi(\eta_{m-1}(\alpha_m) - \frac{1}{2})\right)$, y ya que el ángulo cuyo coseno calculamos es negativo, resulta $\eta_{m-1}(\alpha_m) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3\alpha_m} < \frac{1}{6}$.

$\eta 5)$ Se cumple $l\acute{i}m_{n\to\infty}\ {}_{\partial_\alpha}\eta_n(1) = -\infty$. Se comprueba que $\partial_\alpha\eta_1(1) = -\frac{\pi}{2}$,$\partial_\alpha\eta_2(1) = \frac{-\pi(\pi+1)}{2}$, y en general, $|\partial_\alpha\eta_n(1)\ |= \pi\ \mid -\frac{1}{2} + \partial_\alpha\eta_{n-1}(1)\ \mid$. Aprovechando estos cálculos, se obtiene la desigualdad

$$\pi \leq \left|\frac{\partial_\alpha\eta_{n+1}(1)}{\partial_\alpha\eta_n(1)}\right| \leq \pi + 1.$$

Propiedades de los intervalos $J_m^k(\alpha)$, $\alpha \in \Im_m$:

$J1)$ $\left|J_m^k(\alpha)\right| = e^{-k\beta}\left|J_m^0(\alpha)\right|$, $\forall\alpha \in \Im_m$. Por las propiedades $\eta 2)$ y $\eta 3)$, y la acotación de la distorsión propuesta por $\tau(m, \alpha)$, también $\left|J_m^k\right| = e^{-k\beta}\left|J_m^0\right|$, porque los intervalos $J_m^k(\alpha)$ y $J_n^p(\alpha')$ son disjuntos si $\alpha \neq \alpha'$.

$J2)$ De la misma forma, $\left|J_m^k(\alpha)\right| = e^{-\beta}\left|J_m^{k-1}(\alpha)\right|$,$\forall\alpha \in \Im_m$, $\left|J_m^k\right| = e^{-\beta}\left|J_m^{k-1}\right|$.

$J3)$ Cuando $J_m^k(\alpha) \cap J_n^p(\alpha') \neq \emptyset$ son no vacías, para algunos valores $\alpha \in \Im_m$, $\alpha' \in \Im_n$, $m < n$ y $k, p \geq 1$, entonces se cumple que

$\frac{1}{2}\left(1 - e^{-p\beta}\right) \mid J_n^0(\alpha') \mid \leq \mid J_m^k(\alpha) \mid$, obteniéndose la inclusión $J_n^0(\alpha') \subset J_m^{k-1}(\alpha)$.

$J4)$ Cuando $n > m$,se verifica $J_m^0 \cap J_n = \emptyset$. Esto se deduce de la propiedad $\eta 4)$, y de la segunda condición de la definición de $\tau(m, \alpha)$.

Conocidas las propiedades de la función η_m y de los intervalos J_m^k, se demuestra el siguinte lema.

Lema 1.1:

Si las sucesiones $\{m(i)\}_{i=0}^p$ y $\{k(i)\}_{i=0}^p$ verifican la condición A1) de la definición de A_n, para algún $n \geq p$, se cumple:

$$\left|J_m \cap \left(\cap_{i=1}^p J_{m(i)}^{k(i)}\right)\right| < 2\exp(-\textstyle\sum_{i=1}^p(k(i) - 1)\beta).\left|J_m\right|.$$

En particular, si $m > n$, la intersección anterior es vacía (por J4)), y se cumple trivialmente la desigualdad .

Evaluaremos la medida de A en un entorno adecuadamente reducido de $\alpha = 1$, $[1-\epsilon, 1]$. Se necesita la siguiente acotación:

Lema 1.2:

Se cumple , para m suficientemente grande,

$$|J_m| < 2(\pi+1)\ |J_{m+1}|\,.$$

Precisamos ahora la elección del intervalo J_m.

Lema 1.3:

Para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, podemos encontrar un valor N=N(ϵ) tal que

$$\epsilon < |J_N| < 2(\pi+1)\epsilon.$$

Además, $N >$ $\left|\frac{\log \epsilon}{\log(2(\pi+1))}\right|$.

En la demostración final del teorema 1, se toma el intervalo J_N , en cuyo caso

$$\begin{aligned} |J_N \cap A| \le \textstyle\sum_{n\ge N} |J_N \cap A_n| \le \sum_{n\ge N}\sum_{k(i),m(i)} \left|J_N \cap \left(\cap_{i=1}^{p} J_{m(i)}^{k(i)}\right)\right| \le \\ \le \textstyle\sum_{n\ge N}\sum_{k(i),m(i)} 2\exp\left(-\sum_{i=1}^{p}(k(i)-1)\,\beta\right)|J_N|\,. \end{aligned}$$

Si tenemos en cuenta que el número de sucesiones $\{m(i)\}_{i=1}^{p}, \{k(i)\}_{i=1}^{p}$ que cumplen $A1$) y con $\sum_{i=1}^{p}(k(i)-1) = q$ es menor que el número combinatorio $\binom{q+n}{q}$,y mediante la fórmula de Stirling, llegamos a la acotación $\binom{q+n}{q} < \exp(\beta q/2)$, para $q > \frac{\gamma n}{\beta}$, resulta finalmente:

$|J_N \cap A| \le \sum_{n\ge N}\sum_{q>\frac{\gamma n}{\beta}} 2\exp\left(-\frac{\beta q}{2}\right)|J_N| \le \sum_{n\ge N} 3\exp\left(-\frac{\gamma n}{2}\right)|J_N| \le \epsilon^{1+\rho}$,

para $\beta > 4, \gamma = 2.e^{-10}$ y $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño.

3. Lemas preliminares del teorema 2.

Sea $h_\alpha(x) = \cos\left(\alpha\pi\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)$, $\alpha\in[0,1]$, $x \in [0,1]$.

Examinamos, en primer lugar, la evolución de las iteradas de $h_1(x)$.

Lema 2.1:

Para $\left|x-\frac{1}{2}\right| < 1/6$, $x \neq 1/2$, sea k(x)= $\min\left\{k \ge 2/h_1^k(x) \ge \alpha_0\right\}$, donde α_0 es la preimagen del punto fijo f_0 de h_1, $\alpha_0 = h_1^{-1}(f_0) \cap [0,1/2]$ .Entonces,

$$k(x) < \frac{\log(8/H^2)}{\log 2},\ \textit{donde } H{=}|x-1/2|\,.$$

Además, $|Dh_1(x)|.\left|Dh_1^{k(x)}(x)\right|>1.$

Sea $\delta>0$ una constante convenientemente pequeña, que permitirá construir el entorno $(\frac{1}{2}-\delta,\frac{1}{2}+\delta)$ alrededor del punto crítico c=1/2, dando lugar a las definiciones del conjunto de retornos $\Re(\alpha)$ y del conjunto de retornos libres $\ell(\alpha)$, para $\alpha\in[0,1]$.

El lema siguiente analiza la evolución de las iteradas h_α^j y de las derivadas Dh_α^j, para $\alpha\sim1$. Asegura que el crecimiento de $|Dh_\alpha^j(1)|$ es exponencial cuando la órbita $h_\alpha^j(1)$ cae dentro de un pequeño entorno de 0, en donde $Dh_\alpha>2$.

En principio, para que se cumpla la primera parte del lema 2.2., pondremos $\delta<6^{-100}$.

Lema 2.2:

Existe un valor $\epsilon_1>0$ suficientemente pequeño tal que para $\alpha\in[1-\epsilon_1,1]$, h_α verifica:

a) *Si $\delta\le\left|x-\frac{1}{2}\right|\le\delta^{1/100}$, existe un entero k> 0 de modo que $\left|h_\alpha^j(x)-\frac{1}{2}\right|>\left|\alpha_0-\frac{1}{2}\right|$, para $0<j<k$, y con $|Dh_\alpha(x)|.\left|Dh_\alpha^k(x)\right|>1$.*

b) *Si $\left|h_\alpha^j(x)-\frac{1}{2}\right|\ge\delta$, para $0\le j\le k-1$, entonces $\left|Dh_\alpha^k(x)\right|>\omega.e^{k\lambda}$, con $\lambda>0, 0<\omega<1$ constantes. Si en la iterada k-ésima es $\left|h_\alpha^k(x)-\frac{1}{2}\right|<\delta$, entonces se mejora la desigualdad anterior ya que $\left|Dh_\alpha^k(x)\right|>e^{k\lambda}$.*

Se puede aplicar la siguiente lectura al lema 2.2, en su apartado b): Si los puntos $h_\alpha^i(1),h_\alpha^{i+1}(1),...,h_\alpha^{i+k-1}(1)$ no pasan por el entorno $(1/2-\delta,1/2+\delta)$, hay crecimiento exponencial de $Dh_\alpha^k(h_\alpha^j(1))$ respecto a k.

En un intervalo compacto J donde sea $Dh_\alpha(x)\neq0$, $\forall x\in J$, la distorsión es finita. Buscamos acotar la distorsión sobre intervalos del tipo $[x-a_d,x+a_d]$.

Definición:

Sea x$\neq\frac{1}{2}$, tal que $Dh_\alpha^m(x)\neq0,\alpha\in\left[\frac{2}{3},1\right]$. Se define el *término de distorsión m-ésimo de h_α en el punto x* como

$$a_d=a_d(x,m,\alpha)=\left[K.\sum_{j=0}^{m-1}\frac{\left|Dh_\alpha^j(x)\right|}{\left|Dh_\alpha(h_\alpha^j(x))\right|}\right]^{-1},K=1000.$$

Observaciones:

1) a_d no se podrá definir para x=1/2 ni para $x\in\cup_{j=0}^{m-1}h_\alpha^{-j}(1/2)$.

2) La condición $Dh_\alpha^m(x)\neq0$ garantiza que $Dh_\alpha^j(x)\neq0$, $0\le j\le m-1$, y, por tanto, $h_\alpha^j(x)\neq1/2$, $0\le j\le m-1$.

3) Si $x<1/2$, entonces $x+a_d<1/2$. Análogamente, cuando $x>1/2$ ocurre que $x-a_d>1/2$.

4) Una acotación de a_d : $a_d<\frac{\left|Dh_\alpha(h_\alpha^j(x))\right|}{K\left|Dh_\alpha^j(x)\right|}$, $0\le j\le m-1$.

Se puede comparar la distorsión de un intervalo J que no contiene el punto crítico c=1/2 y la distancia de dicho intervalo al punto crítico.

Lema 2.3:

a) $dist(h_\alpha\ ,J) \leq \frac{2|J|}{d(1/2,J)}$, *para cualquier intervalo compacto conexo* $J \subset [0,1]$ *que no contiene a* $c = 1/2$.

b) *Como consecuencia de a), si* $dist(h^j_\alpha, [x - a_d, x + a_d]) < \frac{1}{10}$, *entonces*

$$|h^j_\alpha([x - a_d, x + a_d])| < \frac{1}{10}. \left|h^j_\alpha(x) - \frac{1}{2}\right|.$$

Utilizando el lema 2.3 se consigue la siguiente *acotación uniforme de la distorsión:*

Lema 2.4:

$$dist(h^j_\alpha, [x - a_d, x + a_d]) < \frac{1}{10},\ para\ j = 1, ..., m-1, m.$$

En su demostración, se prueba por inducción que
$dist(h^m_\alpha, [x - a_d, x + a_d]) \leq \sum_{j=0}^{m-1} dist(h_\alpha, h^j_\alpha\,[x - a_d, x + a_d]) <$
$< \sum_{j=0}^{m-1} \frac{M.a_d.\left|Dh^j_\alpha(x)\right|}{|Dh_\alpha(h_\alpha)|} = \frac{M.a_d}{K.a_d} = \frac{1}{10}$, tomando $M = \frac{K}{10} = 100$.

4. Etapa principal de la demostración del teorema 2.

El siguiente paso es crucial en la prueba del teorema 2.

Definiciones:

a) Dado $\alpha \in [1 - \epsilon_1, 1]$, donde ϵ_1 es el número positivo arbitrariamente pequeño del lema 2.2, y $\delta < 6^{-100}$ la constante del mismo lema, se define el *conjunto* $\Re(\alpha)$ *de los retornos de* h_α como

$$\Re(\alpha) = \left\{m \in N\ /\ \left|h^m_\alpha(1) - \frac{1}{2}\right| < \delta\right\},$$

es decir, los retornos de la órbita del punto 1, a través de h_α , al entorno $(1/2 - \delta, 1/2 + \delta)$.

b) Una vez que aparezca un retorno m, $\left|h^m_\alpha(1) - \frac{1}{2}\right| < \delta$, es $|1 - h^{m+1}_\alpha(1)| \sim 0$, así que,en principio,para valores iniciales del índice,$|Dh^i_\alpha(1)|\,.\,|1 - h^{m+1}_\alpha(1)| \ll 1$. ¿Puede ocurrir que se recupere esta expresión? Esto es, ¿existe un valor de recuperación $r = r(m, \alpha)$ tal que el producto anterior quede compensado, $|Dh^r_\alpha(1)|\,.\,|1 - h^{m+1}_\alpha(1)| \sim 1$?

En caso afirmativo, a pesar de que $Dh_\alpha(h^m_\alpha(1)) \sim 0$, se cumple:

— $|Dh^r_\alpha(h^{m+1}_\alpha(1))| \sim |Dh^r_\alpha(1)| \sim |1 - h^{m+1}_\alpha(1)|^{-1}$.

— $|1 - h^{m+1}_\alpha(1)| = \left|1 - \cos\left(\alpha\pi(h^m_\alpha(1) - \frac{1}{2})\right)\right| \sim \frac{\pi^2}{2}\left|h^m_\alpha(1) - \frac{1}{2}\right|^2$,puesto que $1 - \cos x$ es equivalente a $\frac{x^2}{2}$ cuando $x \to 0$.

— $|Dh_\alpha(h^m_\alpha(1)| = \alpha\pi\left|sen\left(\alpha\pi(h^m_\alpha(1) - \frac{1}{2})\right)\right| \sim \pi^2\left|h^m_\alpha(1) - \frac{1}{2}\right|$, donde se usa que $senx \sim x$ para $x \to 0$.

Por tanto,

$$Dh^r_\alpha(1) \sim \frac{1}{\left|1 - h^{m+1}_\alpha(1)\right|} \sim 2\pi^2\,|Dh_\alpha(h^m_\alpha(1)|^{-2}.$$

Esta explicación permite asociar a cada retorno $m \in \Re(\alpha)$ un *valor de recuperación* $r = r(m, \alpha)$ definido como el menor entero positivo que verifica la desigualdad

$$|Dh_\alpha^r(1)| > 2\pi^2 \, |Dh_\alpha(h_\alpha^m(1)|^{-1'9} .$$

En caso de que no exista tal valor r de recuperació , tendremos

$$|Dh_\alpha^n(1)| \leq 2\pi^2 \, |Dh_\alpha(h_\alpha^m(1)|^{-1'9} \ , \forall n,$$

y consecuentemente, no se cumplirá la condición de Collet-Eckmann, debiéndose descartar el parámetro α.

c) Dentro del conjunto $\Re(\alpha)$ se selecciona de modo inductivo una subsucesión que compondrá el *conjunto de los retornos libres.*

Como primer elemento se toma $m_1(\alpha) = m\acute{i}n \Re(\alpha)$. Este valor mínimo se puede elegir, gracias a los lemas 2.1 y 2.2 , suficientemente grande de modo que, por ejemplo, $|Dh_\alpha(h_\alpha^j(1))| > e$, para cualquier índice $0 \leq j \leq m_1(\alpha)$, con $\alpha \in [1-\epsilon_2, 1]$, siendo $0 < \epsilon_2 < \epsilon_1$.

Supongamos que se tiene definido el valor $m_j(\alpha)$. A dicho valor le corresponde una etapa de recuperación $r_j = r(m_j(\alpha), \alpha)$. Pues bien,

$$m_{j+1}(\alpha) = m\acute{i}n \, \{m \in \Re(\alpha) \ / \ m > m_j(\alpha) + r_j\} \, ,$$

es decir, alcanzado el tramo de recuperación, el siguiente retorno libre corresponde al primer retorno de $\Re(\alpha)$ que nos encontramos. Entonces,

$$\ell(\alpha) = \{m_1(\alpha), m_2(\alpha), ..., m_j(\alpha), m_{j+1}(\alpha), ...\}$$

es el *conjunto de los retornos libres.*

Los conjuntos $\Re(\alpha)$ y $\ell(\alpha)$ pueden ser vacíos (este es el caso de $\alpha = 1$) o bien finitos, pero si $\alpha \sim 1$, esa circunstancia asegura automáticamente, por el lema 2.2, el cumplimiento de la condición (CE).

d) La *condición* $(CE)_{\alpha,m}$. Hemos observado en el apartado b) que la cantidad $|Dh_\alpha(h_\alpha^m(1))|$, a pesar de ser pequeña, se puede compensar con $|Dh_\alpha^r(1)|$, donde r es el valor de recuperación asociado.A continuación, nos interesa seleccionar valores del parámetro $\alpha \in [1-\epsilon_2, 1]$ de modo que podamos seguir controlando las cantidades $Dh_\alpha(h_\alpha^{m_j(\alpha)}(1))$, para cualquier retorno libre $m_j \in \ell(\alpha)$. Aparece así la condición restrictiva $(CE)_{\alpha,m}$:

$$(CE)_{\alpha,m} : \Pi_{j \in \ell(\alpha) \cap [0,m]} \ |Dh_\alpha(h_\alpha^j(1))| \geq e^{-\zeta k}, \forall 0 \leq k \leq m, \ \zeta = 10^{-3}\theta, \text{ con } \theta \sim \log 2.$$

Estamos evaluando el producto de los retornos libres de $\ell(\alpha)$ hasta el paso m, y apreciamos que se pueden acotar por una cantidad que depende exclusivamente de la longitud m considerada. Esto significa que hay retornos al entorno $(1/2-\delta, 1/2+\delta)$,sí, pero de forma controlada, guardando una distancia al punto crítico $c=1/2$.

Conocidas las definiciones básicas, pasamos a la exposición de resultados de esta sección.

Lema 2.5:

Supongamos que m verifica la condición $(CE)_{\alpha,m}$, para $\alpha \in [1-\epsilon_2, 1]$. Entonces,

$$\left|Dh_\alpha^k(1)\right| \geq e^{\theta k} \text{ , } \forall 0 \leq k \leq m+1 \text{ , } \theta \sim \log 2.$$

La demostración de este lema se hace por inducción, y se apoya en los siguientes resultados:

Sublema 2.6:

Si m cumple la condición $(CE)_{\alpha,m}$,entonces, suponiendo que $\left|Dh_\alpha^k(1)\right| \geq e^{\theta k}$, para $0 \leq k \leq m$, se cumple , $\forall n \in \ell(\alpha) \cap [0,m]$:

1) $r(n,\alpha) \leq -\theta_1 . \log\left|Dh_\alpha(h_\alpha^n(1)\right|$, $\theta_1 \sim 4$ constante.

2) $\log\left|Dh_\alpha^{r(n,\alpha)}(h_\alpha^n(1)\right| > -\theta . \log\left|Dh_\alpha(h_\alpha^n(1)\right|$.

3) $\log\left|Dh_\alpha(h_\alpha^i(1)\right| > \log\left|Dh_\alpha(h_\alpha^n(1)\right|$, $\forall n < i \leq n + r(n,\alpha)$.

Corolario 2.7:

Si para $\alpha \in [1-\epsilon_2, 1]$ se cumple $(CE)_{\alpha,m}$, $\forall m \geq 1$, entonces se verifica la condición de Collet-Eckmann (CE), asegurando así la existencia de medidas μ_α invariantes para h_α y absolutamente continuas respecto a la medida de Lebesgue.

5. Demostración final del teorema 2.

Se fija $\alpha \in [1-\epsilon_2, 1]$. Efectuamos el siguiente razonamiento de contrarrecíprocos: Vamos a suponer que α no verifica la condición (CE) , y llegaremos a que $\alpha \in A$.

Si α no cumple (CE), tampoco cumplirá $(CE)_{\alpha,m}$, para algún m.

Sea M el menor entero para el que no se cumple $(CE)_{\alpha,m}$, esto es:

$$\Pi_{j\in\ell(\alpha)\cap[0,M]} \left|Dh_\alpha(h_\alpha^j(1))\right| < e^{-\zeta M}.$$

Dentro del conjunto $\ell(\alpha) \cap [0,M]$ se define el subconjunto $\wp(\alpha) = \{m(1) < m(2) < ... < m(p)\}$ mediante la condición

$$(C\wp) \; m \in \wp(\alpha) \text{ sii } \left|Dh_\alpha(h_\alpha^j(1))\right| \geq \Pi_{i\in\ell(\alpha)\cap[j+1,m]} \left|Dh_\alpha(h_\alpha^i(1)\right|^2 , \\ \forall j \in \ell(\alpha) \cap [0, m-1].$$

(de nuevo, pretendemos controlar las cantidades $|Dh_\alpha(h_\alpha^i(1)|)$.

Con esta condición, se cumple:

Lema 2.8:

$$\sum_{m\in\wp(\alpha)} \log\left|h_\alpha^m(1)-\tfrac{1}{2}\right| < -\tfrac{1}{2}\zeta M.$$

Lema 2.9:

$$a_d(1,m,\alpha).\,|Dh_\alpha^m(1)| > \left(\left|h_\alpha^m(1)-\tfrac{1}{2}\right|\right)^{1/5},\ \forall m\in\wp(\alpha).$$

Finalmente, se prueba que $\alpha\in\cap_{i=1}^{p} J_{m(i)}^{k(i)}$, siendo $\{m(i)\}_i=\wp(\alpha)$, $k(j)=E\left(\frac{-\log\left|h_a^{m(j)}(1)-\frac{1}{2}\right|}{2\sigma}\right)>100$, con $\sigma=\sigma(\gamma)$ constante que depende de γ, donde E representa la parte entera de un número. Entonces:

— Por el lema 2.8 se puede comprobar que los valores $k(j)$ verifican la condición $A2)$ de la definición de A_M , porque $\sum_{j=1}^{p}(k(j)-1)\beta>\gamma M$.

— Todavía se necesitan dos resultados:

Lema 2.10:

Para $k\leq m+1$, $\alpha\in[1-\epsilon_2,1]$, si m cumple la condición $(CE)_{\alpha,m}$, entonces se tiene

$$\frac{1}{Q}<\left|\frac{\partial_\alpha\eta_k(\alpha)}{Dh_\alpha^k(1)}\right|<Q.$$

Lema 2.11:

Si $\alpha\in[1-\epsilon_2,1]$, m cumple la condición $(CE)_{\alpha,m}$, entonces:

$$\tau(n,\alpha)>\tfrac{1}{100}a_d(1,n,\alpha)\ ,\ \forall n\in\ell(\alpha)\cap[0,m+1]\,.$$

Con ellos, y el lema 2.9, se concluye que $\alpha\in\cap_{j=1}^{p}J_{m(j)}^{k(j)}(\alpha_j)$, para ciertos $\alpha_j\in\Im_{m(j)}$, por tanto, $\alpha\in A_M$, $\alpha\in A$.

6.Comentario.

Analizada con profundidad la familia analítica de los cosenos, una interesante línea de trabajo consiste en atacar el problema de la existencia de medidas invariantes para aplicaciones bimodales, desarrollando un estudio similar al descrito en esta comunicación sobre cada uno de los puntos críticos de la función bimodal. Estas funciones bimodales aparecen estrechamente ligadas al problema de la aparición de atractores en un escenario del tipo Hopf-Silnikov ([BS]).

BIBLIOGRAFÍA:

[BC]: Benedicks,M. ; Carleson,L.:
1.- *"Iterations of* $1-ax^2$ *on* $(-1,1)$ *"* , Ann. of Math. **122** (1985) , $1-25$.
2.- *"The dynamics of the Hénon map "* , Ann. of Math. **133** (1991) , $73-169$.

[BS]: Bosch,M. ; Simó,C.:
"Attractors in a Silnikov-Hopf scenario and a related one-dimensional map"
,
Physica D **62** (1993) , $217-229$. North-Holland.

[CE]: Collet,P. ; Eckmann,J.-P. :
1.- *"Iterated Maps on the Intervals as Dynamical Systems"*,Birkhäuser (1980).
2.- *"Positive Lyapunov exponent and absolute continuity for maps of the interval "*, Ergodic Theory & Dynamical Systems **3** (1983) , $13-46$.

[J]: Jakobson,M.V. :
"Absolutely continuous invariant measures for one-parameter families of one dimensional maps" , Commun. Math. Phys. **81** (1981) , $39-88$.

[May]: May,R. M.:
"Simple mathematicals models with very complicated dynamics ",
Nature **261** (1976) , $459-467$.

[Mis]: Misiurewicz,M:
"Absolutely continuous measures for certain maps of the interval ",
Publ. Math. IHES **53** (1981) , $17-51$.

[Ry]: Rychlik,M. R.:
"Another proof of Jakobson's theorem and related results ",
Ergodic Theory & Dynamical Systems **8** (1988) , $39-88$.

[Sin]: Singer, D.:
"Stable orbits and bifurcation of maps of the interval ",
SIAM J. Appl. Math. **85** (1978) , $260-267$.

[Sm]: Smital,J.:
" On functions and functional equations ",
Bristol-Filadelfia (Adam Hilger), 1988.

[Ts]: Tsujii,M.:
1.- *"A proof of Benedicks-Carleson-Jacobson Theorem"* ,
Tokyo J. Math. , vol **16,** No. 2, 1993, $295-310$.
2.- *"Positive Lyapunov exponents in families of one dimensional maps "* ,
Invent. Math. **111** (1993) , $113-137$.