UNA CARACTERIZACIÓN DE LOS CONJUNTOS ω-LÍMITES DE LOS SISTEMAS DINÁMICOS CONTINUOS EN EL PLANO

Francisco Balibrea(1) y Víctor Jiménez López(1)

(1) Departamento de Matemáticas, Universidad de Murcia, Campus de Espinardo, Aptdo. de Correos 4021, 30100 Murcia, España

Sea E un subconjunto abierto de $\mathbf{R}^2$. A partir de ahora consideraremos $\mathbf{R}^2$ como un subconjunto de $\mathbf{R}^2_\infty = \mathbf{R}^2 \cup \{\infty\}$, la compactificación estándar de $\mathbf{R}^2$, y todas las nociones topológicas se entenderán referidas a $\mathbf{R}^2_\infty$. Para cada $0 \leq n \leq \infty$, $C^n(E)$ denotará el conjunto de las aplicaciones de clase C^n definidas de E a $\mathbf{R}^2$. En este contexto decimos que una aplicación es de clase C^0 si es localmente lipschitziana; las aplicaciones de clase C^n para $n \geq 1$ están definidas del modo usual.

Un conjunto $\Gamma \subset \mathbf{R}^2$ homeomorfo respectivamente a un intervalo abierto I o a la circunferencia S^1 se denomina un *arco abierto* o una *curva de Jordan*. Llamamos a cada uno de los homeomorfismos $\varphi : I \to \Gamma$ (o, si Γ is una curva de Jordan, a cada aplicación continua $\varphi : \mathbf{R} \to \Gamma$ periódica de periodo p tal que $\varphi|_{[0,p)}$ es biyectiva) una *parametrización* de Γ. Si adicionalmente φ es diferenciable, $\varphi'(t) \neq 0$ para todo t y φ' es de clase C^{k-1} (en el sentido anteriormente explicado), decimos que Γ es un *k-arco abierto* o una *k-curva de Jordan* y llamamos a φ una *k-parametrización* de Γ. Si φ_1, φ_2 son parametrizaciones de Γ, decimos que φ_1 y φ_2 *inducen la misma orientación en* Γ si $(\varphi_2)^{-1} \circ \varphi_1$ (o, si Γ es una curva de Jordan, $(\varphi_2|_{[0,p_2)})^{-1} \circ \varphi_1|_{[0,p_1)}$, p_i el periodo de φ_i) es creciente. La propiedad "inducir la misma orientación" define una relación de equivalencia en el conjunto de las parametrizaciones de Γ. La clase de equivalencia que contiene a φ se denotará como $[\varphi]_\Gamma$ o, simplemente, como $[\varphi]$. El par $(\Gamma, [\varphi]_\Gamma)$ se denomina un *arco abierto orientado* o una *curva de Jordan orientada*.

Sea $f \in C^0(E)$ y considérese el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x_1'(t) = f_1(x_1(t), x_2(t)) \\ x_2'(t) = f_2(x_1(t), x_2(t)) \end{cases}$$

al que denotaremos en lo que sigue como $\mathcal{D}_f$. Cada solución del sistema se denomina una *órbita* de $\mathcal{D}_f$ y las *trayectorias* de $\mathcal{D}_f$ son los grafos de sus órbitas maximales. Si φ is una órbita maximal y Γ es su grafo, decimos que φ es una *órbita asociada* a la trayectoria Γ. Un punto $x \in \mathbf{R}^2_\infty$ es *singular* (para f) si pertenece a la frontera de E o $f(x) = 0$. El resto de puntos de E se denominan *regulares*. Denotaremos el conjunto de puntos singulares de f como $S(f)$. Si una trayectoria Γ de $\mathcal{D}_f$ consiste en un único punto singular se denomina una *trajectoria singular*. En caso contrario la llamaremos una *trayectoria regular*. Es bien sabido que en este último caso Γ debe ser o bien un arco abierto o bien una curva de Jordan. El *ω-límite* de una trayectoria Γ se define como

$$\omega(\Gamma) = \{x \in \mathbf{R}^2_\infty : \text{ existe una sucesión } (t_n)_{n=1}^\infty \text{ de puntos de } (u,v) \\ \text{convergente a } v \text{ tal que } (\varphi(t_n))_{n=1}^\infty \text{ converge a } x\},$$

donde $\varphi : (u,v) \to \Gamma$ es cualquiera de las órbitas asociadas a Γ.

El problema de caracterizar los conjuntos ω-límites de las trayectorias de $\mathcal{D}_f$ aparece de modo natural. Más precisamente, si $1 \leq k \leq \infty$ y $\{(\Gamma_i, o_i)\}_i$ es una familia de k-arcos abiertos orientados o k-curvas de Jordan orientadas disjuntos dos a dos, $S \subset \mathbf{R}^2_\infty$ es disjunto de cada Γ_i

y denotamos $\Omega = S \cup \bigcup_i \Gamma_i$, se trata de encontrar condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una aplicación f de clase C^{k-1} tal que $S \subset S(f)$, cada Γ_i sea una trayectoria de $\mathcal{D}_f$ (con $[\varphi_i] = o_i$ para cada órbita φ_i asociada a Γ_i) y exista una trayectoria Γ de $\mathcal{D}_f$ para la que $\Omega = \omega(\Gamma)$. El objetivo del presente trabajo es extender los resultados de [1]–[5] y obtener una caracterización completa de dichos conjuntos. Nuestro principal resultado es el siguiente:

Definición. Sean $1 \le k \le \infty$, $\mathcal{G} = \{(\Gamma_i, o_i)\}_i$ una familia de k-arcos abiertos orientados o k-curvas de Jordan orientadas disjuntos dos a dos y $S \subset \mathbf{R}^2_\infty$ disjunto de cada Γ_i. Denotemos $\Omega = S \cup \bigcup_i \Gamma_i$ y fíjese para cada i una k-parametrización φ_i de Γ_i tal que $[\varphi_i] = o_i$. Se dice que $(\mathcal{G}, S)$ es un *sistema k-realizable* si existe una región simplemente conexa $O \subset \mathbf{R}^2_\infty$, $\emptyset \ne O \ne \mathbf{R}^2_\infty$, tal que se verifican las siguientes propiedades:

(i) Ω es la frontera de O.

(ii) Si $x \in \Gamma_i$ para algún i entonces es un punto frontera simple de O, esto es, para cada sucesión $(x_n)_{n=1}^\infty$ de puntos de O con $x_n \to x$ cuando $n \to \infty$, existe un arco cerrado A —un conjunto homeomorfo al intervalo $[0,1]$— teniendo a x como uno de sus extremos y tal que $x_n \in A$ para cada n y $A \setminus \{x\} \subset O$.

(iii) $(\mathcal{G}, S)$ está orientado compatiblemente con respecto a O, esto es, para cada i y cada t en el que φ_i está definida, existe $\epsilon_{i,t} > 0$ tal que $\varphi_i(t) + u\epsilon_{i,t} N\varphi_i'(t) \in O$ para cada $0 < u < 1$, i y t o $\varphi_i(t) - u\epsilon_{i,t} N\varphi_i'(t)) \in O$ para cada $0 < u < 1$, i y t (aquí Nx se define como $(-x_2, x_1)$ para cada $x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$).

Teorema. *Sea $1 \le k \le \infty$. Entonces se verifican las siguientes propiedades:*

(i) Sean $f \in C^{k-1}(E)$ y Γ una trayectoria de $\mathcal{D}_f$. Entonces existen una familia $\{\Gamma_i\}_i$ de trayectorias regulares de $\mathcal{D}_f$ y $S \subset S(f)$ tales que si $\mathcal{G} = \{(\Gamma_i, [\varphi_i])\}_i$, donde cada φ_i es una órbita de $\mathcal{D}_f$ asociada a Γ_i, se tiene que $(\mathcal{G}, S)$ es un sistema k-realizable y $\omega(\Gamma) = S \cup \bigcup_i \Gamma_i$.

(ii) Sea $(\mathcal{G}, S)$ un sistema k-realizable, $\mathcal{G} = \{(\Gamma_i, o_i)\}_i$. Entonces existen $f \in C^{k-1}(\mathbf{R}^2)$ y una trayectoria Γ de $\mathcal{D}_f$ tales que para cada i, Γ_i es una trayectoria de $\mathcal{D}_f$ con $o_i = [\varphi_i]$ para cada órbita φ_i asociada a Γ_i, $S \subset S(f)$ y $\omega(\Gamma) = S \cup \bigcup_i \Gamma_i$.

Asimismo, en el trabajo se describe con detalle la estructura geométrica de los sistemas k-admisibles.

Bibliografía

[1] M. I. Al'mukhamedov, *Sobre la construcción de una ecuación diferencial teniendo curvas dadas como ciclos límites*, Izv. Vysš. Učebn. Zaved Matematika 1 (44) (1965), 12–16. (En ruso)

[2] F. Balibrea y V. Jiménez López, *ω-límites de sistemas dinámicos planos con una cantidad numerable de puntos críticos*, presentado en el XIII CEDYA / III Congreso de Matemática Aplicada, Madrid, 1993.

[3] I. Bendixson, *Sur les courbes définies par des équations différentielles*, Acta Math. **24** (1901), 1–88.

[4] Iu. K. Solncev, *Sobre el comportamiento asintótico de las curvas integrales de un sistema de ecuaciones diferenciales*, Izv. Akad. Nauk SSSR **9** (1945), 233–240. (En ruso)

[5] R. È. Vinograd, *Sobre el comportamiento asintótico de una curva integral no acotada*, Moskov. Gos. Univ. Uč. Zap. 155, Mat. **5** (1952), 94–136. (En ruso)