UN MÉTODO SEUDOESPECTRAL PARA LA RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE UNA ECUACIÓN DE CONVECCIÓN DIFUSIÓN NO LINEAL EN TODO EL ESPACIO

Julián Aguirre Estibalez, Martín-Blas Pérez Pinilla

Departamento de Matemáticas
Universidad del País Vasco
Apartado 644, 48080 BILBAO
e-mail: mtpagesj@lg.ehu.es,mtppepim@lg.ehu.es

Introducción

El objetivo de este trabajo es desarrollar un método espectral con funciones de Hermite para aproximar las soluciones de la ecuación $u_t - u_{xx} = (u^q)_x$ en todo $\mathbf{R}$. Esta ecuación, que ha sido estudiada exhaustivamente por numerosos investigadores, es un modelo simple pero no obstante muy interesante en el que aparecen simultáneamente difusión y convección no lineal. El caso $q = 2$ corresponde a la conocida ecuación de Burgers. Uno de los motivos para emplear las funciones de Hermite es que su decrecimiento en el infinito se adapta muy bien al comportamiento de las soluciones de la ecuación (para datos iniciales adecuados). Además, los métodos de diferencias finitas y espectrales con las bases usuales (como polinomios trigonométricos, de Lagrange...) son *per se* aplicables sólo a dominios acotados. Si queremos usarlos en un dominio no acotado, deberemos realizar un cambio de variable que lo transforme o tomar un dominio "grande" con condiciones de frontera artificiales, pero esto no siempre da buenos resultados. Por todo esto, Funaro y Kavian señalan en [3] que en el caso de la ecuación del calor en todo el espacio, "Hermite functions are a very natural choice for the approximation of solutions to diffusion PDE's, after an appropiate change of the space and time variables (the so-called *similarity transformation*)".

1. Aproximación de la ecuación

Como se pone de manifiesto en [3], la ecuación del calor en todo $\mathbf{R}^n$ presenta un problema: el operador $(-\Delta)$ no tiene inverso compacto. Esto da problemas a la hora de constuir aproximaciones numéricas. El cambio de variables

$$v(y,s) = e^{k(q)s}u(e^{2k(q)s}y, \frac{1}{4}(e^{4s-1}))$$

con $k(q) = 2/(q-1)$ transforma la ecuación

$$u_t - u_{xx} = (u^q)_x$$

en la ecuación

$$v_s + Lv = k(q)v + (v^q)_y$$

con

$$Lv = -(v_{yy} + 2yv_y)$$

L es un operador autoadjunto con inverso compacto en el espacio con peso L^2_w.

1.1 Definición. Sea $w(x) = e^{x^2}$. L^2_w es el conjunto de funciones φ para las que la integral

$$\int_{\mathbf{R}} \varphi^2 w$$

es finita. Es un espacio de Hilbert con el producto escalar

$$\langle \varphi, \psi \rangle_w = \int_{\mathbf{R}} \varphi \psi w$$

Para k entero, se define $H^k_w = \{\varphi \in L^2_w, D^\alpha \varphi \in L^2_w, 0 \leq \alpha \leq k\}$ con la norma natural. Para $s > 0$ no entero, H^s_w se puede definir por interpolación. H^{-s}_w se define como el dual de H^s_w. La norma en H^s_w se escribirá $\|.\|_{s,w}$.

Las autofunciones del operador L son las funciones de Hermite

$$h_n(x) = e^{-x^2} H_n(x)$$

y sus autovalores son

$$\lambda_n = 2(n+1), \quad n \geq 0$$

Las funciones de Hermite forman una base ortogonal de L^2_w.

1.2 Definición. V_N es el subespacio de L^2_w engendrado por las funciones de Hermite $h_0, h_1, ..., h_N$.

1.3 Definición. La proyección espectral π_N se define como

$$\pi_N u = \pi_N \sum_{n=0}^{\infty} u_n h_n = \sum_{n=0}^{N} u_n h_n$$

($\pi_N u$ es la aproximación óptima de u por elementos de V_N en la norma L^2_w)

Por la ortogonalidad de la base $\{h_n\}_{n \in \mathbf{N}}$, tenemos que

$$u_n = \frac{1}{\|u\|_{0,w}} \int u h_n w$$

1.4 Definición. Sean $x_1, \ldots, x_{N+1}$ las raíces del polinomio de Hermite H_{N+1}. La proyección seudoespectral P_N se define por

$$P_N u \in V_N, \quad P_N u(x_j) = u(x_j), \quad j = 1, \ldots, N+1$$

($wP_N u$ es el único polinomio de grado N que coincide con wu en los $N+1$ puntos $x_1, \dots, x_{N+1}$)

Si aproximamos u_n (coeficiente espectral) por una fórmula de integración de Gauss-Hermite, la aproximacion resulta ser el correspondiente coeficiente de la aproximación seudoespectral. Este hecho es muy importante a la hora de implementar la apro ximación numérica.

Aproximaremos las soluciones de

$$(P) \qquad \begin{cases} v_s + Lv = k(q)v + \partial_y(v^q) \\ v(0) = v_0 \end{cases}$$

mediante una *aproximación semidiscreta*:

$$(A) \qquad \begin{cases} (v_N)_s + Lv_N = k(q)v_N + P_N \partial_y P_N((v_N)^q) \\ v_N(0) = P_N v_0 \end{cases}$$

donde $v_N : [0,T] \longrightarrow V_N$. Este problema es de dimensión finita y su solución se puede aproximar por cualquiera de los métodos habituales.

A continuación se expondrán algunos resultados técnicos sobre espacios de Sobolev con peso y la proyección seudoespectral que serán necesarios para demostrar la convergencia del método numérico.

2. Resultados técnicos

2.1 Teorema. (Inclusiones de Sobolev para espacios con peso)

(a) Si $0 \leq s < 1/2$, entonces $H_w^s \subset L_w^r$ para $2 \leq r \leq \dfrac{2}{1-2s}$.

(b) Si $s = 1/2$, entonces $H_w^s \subset L_w^r$ para $2 \leq r < \infty$.

(c) Si $s > 1/2$, entonces $H_w^s \subset C(\mathbf{R})$.

2.2 Lema. Sean $1 < q < 2$, $\sigma > 1$, $0 < s < 1$, $s < (\sigma - 1/2)(q-1)$. Existe $C > 0$ tal que para todo $u \in H_w^\sigma$

$$\|u^q\|_{1+s,w} \leq C\|u\|_{\sigma,w}^q$$

2.3 Lema. Si $\varphi, \psi \in V_N$, $1 < q < 2$ y $c > 1/2$, entonces:

$$\|P_N(\varphi^q - \psi^q)\|_{-c,w} \leq C(\|\varphi\|_{0,w} + \|\phi\|_{0,w})^{(q-1)}\|\varphi - \psi\|_{0,w}$$

2.4 Teorema. Sean $\epsilon > 0$, $\sigma \geq 1+\epsilon$, $\mu < \sigma$. Existe $C > 0$ tal que para todo $u \in H_w^\sigma$

$$\|u - P_N u\|_{\mu,w} \leq CN^{(1+\epsilon+\mu-\sigma)/2}\|u\|_{\sigma,w}$$

2.5 Teorema. Sean $\epsilon > 0$, $\sigma \geq 1+\epsilon$. Existe $C > 0$ tal que para todo $u \in H_w^\sigma$

$$\|P_N e^{-tL}u - e^{-tL}P_N u\|_{0,w} \leq CN^{(1+\epsilon-\sigma)/2}\|u\|_{\sigma,w}$$

3. Convergencia del método numérico

En esta sección demostraremos la convergencia de la aproximación numérica (A). La demostración se basa en escribir en forma de ecuación integral el problema original y el problema aproximado y estimar la diferencia entre ambas soluciones. Esta t écnica ha sido empleada por Weinan E para la ecuación de Burgers (en un intervalo acotado y con diversas bases) [1] y la ecuación de Navier-Stokes [2]. Como la demostración es exactamente la misma, consideraremos un caso un poco más general y su stituiremos la constante $2/(q-1)$ por una constante a arbitraria. Concretamente, demostraremos que si el problema

$$(P) \qquad v(s) = e^{-sL} v_0 + \int_0^s e^{-(s-t)L}\big(av(t) + \partial_y(v^q(t))\big)\,dt$$

tiene una única solución suficientemente regular, entonces para N suficientemente grande, la aproximación

$$(A) \qquad v_N(s) = e^{-sL} P_N v_0 + \int_0^s e^{-(s-t)L}\big(av_N(t) + P_N\partial_y P_N(v_N^q(t))\big)\,dt$$

tiene una única solución v_N que converge a v cuando N tiende a infinito.

3.1 Lema. Sean $1 < q < 2$, $1 < \sigma < \min(2, \frac{3-q}{2(2-q)})$, $0 < \epsilon < \sigma - 1$ y $v : [0,T] \longmapsto H^0_w$ verificando las condiciones de regularidad $v \in L^\infty([0,T], H^{\sigma+1+\epsilon}_w)$, $v^q \in L^\infty([0,T], H^{\sigma+1}_w)$. Entonces existe $C > 0$ tal que

$$\int_0^s \|e^{-(s-t)L} P_N \partial_y P_N((P_N v(t))^q) - P_N e^{-(s-t)L}\partial_y(v^q(t))\|_{0,w}dt \le CN^{(1+\epsilon-\sigma)/2}$$

donde C es una constante que depende de v y de T pero no de N.

3.2 Teorema. Sean $1 < \sigma < \min(2, \frac{3-q}{2(2-q)})$, $0 < \epsilon < \sigma - 1$ y v la solución exacta del problema (P) verificando las condiciones de regularidad $v \in L^\infty([0,T], H^\mu_w)$ y $v^q \in L^\infty([0,T], H^{\sigma+1}_w)$. Entonces la aproximación (A) está definida para N suficientemente grande en $[0,T]$ y converge a la solución. Más concretamente, existe C (que depende de σ, ϵ y v pero no de N) tal que

$$\sup_{0\le t\le T} \|P_N v - v_N\|_{0,w} \le CN^{-(1+\epsilon-\sigma)/2}$$

Demostración:

La solución exacta v verifica la ecuación integral

$$v(s) = e^{-sL} v_0 + \int_0^s e^{-(s-t)L}\big(av(t) + \partial_y(v^q(t))\big)\,dt$$

Aplicando la proyección seudoespectral tenemos

$$(P_N v)(s) = P_N e^{-sL} v_0 + \int_0^s P_N e^{-(s-t)L} \big(av(t) + \partial_y (v^q(t)) \big)\, dt$$

Por otra parte, la aproximación (A) se puede escribir como la siguiente ecuación integral para v_N:

$$v_N(s) = e^{-sL} P_N v_0 + \int_0^s e^{-(s-t)L} \big(av_N(t) + P_N \partial_y P_N (v_N^q(t)) \big)\, dt$$

Definimos en $C([0,T_0], V_N)$ el operador Ψ por

$$(\Psi u)(s) = e^{-sL} P_N v_0 + \int_0^s e^{-(s-t)L} \big(au(t) + P_N \partial_y P_N (u^q(t)) \big)\, dt$$

Veremos que para T_0 suficientemente pequeño y N suficientemente grande, Ψ tiene un único punto fijo en

$$\mathcal{X} = \{ u \in C([0,T_0], V_N) : \sup_{0 \le s \le T_0} \| v_N(s) - (P_N u)(s) \|_{0,w} \le 1 \}$$

(i) Ψ es contractiva. En primer lugar observamos que $\mathcal{X}$ es acotado para la norma $\|.\|_{0,w}$. Sea $R > 0$ una cota. Dados $u, w \in \mathcal{X}$ tenemos

$$\begin{aligned} \|(\Psi u)(s) - (\Psi w)(s)\|_{0,w} \le |a| &\int_0^s \| e^{-(s-t)L} (u(t) - w(t)) \|_{0,w} dt \\ &+ \int_0^s \| e^{-(s-t)L} P_N \partial_y P_N (u^q(t) - w^q(t)) \|_{0,w} dt \end{aligned}$$

El primer sumando se estima como

$$\int_0^s \| e^{-(s-t)L} (u(t) - w(t)) \|_{0,w} dt \le T_0 \sup_{0 \le s \le T_0} \| u(s) - w(s) \|_{0,w}$$

Para el segundo, tomamos $3/4 < \beta < 1$ y razonamos así:

$$\begin{aligned} &\int_0^s \| e^{-(s-t)L} P_N \partial_y P_N (u^q(t) - w^q(t)) \|_{0,w} dt \\ &\le \int_0^s \| L^\beta e^{-(s-t)L} L^{-(\beta - 1/2)} L^{-1/2} \partial_y P_N (u^q(t) - w^q(t)) \|_{0,w} dt \\ &\le C \int_0^s (s-t)^{-\beta} \| P_N (u^q(t) - w^q(t)) \|_{1-2\beta,w} dt \\ &\le C \int_0^s (s-t)^{-\beta} (\|u(s)\|_{0,w} + \|w(s)\|_{0,w})^{q-1} \| u(t) - w(t) \|_{0,w} dt \\ &\le C T_0^{1-\beta} R^{q-1} \sup_{0 \le s \le T_0} \| u(s) - w(s) \|_{0,w} \end{aligned}$$

En la penúltima línea hemos usado que $\beta < 1$, $2(\beta - 1/2) > 1/2$ y el lema 2.3. Tomando T_0 suficientemente pequeño (independiente de N) se tiene

$$\sup_{0\le s\le T_0} \|(\Psi u)(s) - (\Psi w)(s)\|_{0,w} \le \frac{1}{2} \sup_{0\le s\le T_0} \|u(s) - w(s)\|_{0,w}$$

(ii) $\Psi(\mathcal{X}) \subset \mathcal{X}$**.** Se tiene

$$\begin{aligned}
\|\Psi v_N(s) - P_N v(s)\|_{0,w} &\le \|\Psi v_N(s) - \Psi P_N v(s)\|_{0,w} + \|\Psi P_N v(s) - P_N v(s)\|_{0,w} \\
&\le \frac{1}{2}\|v_N(s) - P_N v(s)\|_{0,w} + \|\Psi P_N v(s) - P_N v(s)\|_{0,w} \\
&\le \frac{1}{2} + \|\Psi P_N v(s) - P_N v(s)\|_{0,w}
\end{aligned}$$

Debemos estimar por lo tanto el segundo sumando $\|\Psi P_N v(s) - P_N v(s)\|_{0,w} = \delta_N$, que aparecerá más veces.

$$\begin{aligned}
\delta_N &\le \|e^{-sL} P_N v_0 - P_N e^{-sL} v_0\|_{0,w} + |a| \int_0^s \|e^{-(s-t)L} P_N v(t) - P_N e^{-(s-t)L} v(t)\|_{0,w} dt \\
&\quad + \int_0^s \|e^{-(s-t)L} P_N \partial_y P_N((P_N v)^q) - P_N e^{-(s-t)L} \partial_y (v^q(t))\|_{0,w} dt \\
&= E_1 + E_2 + E_3.
\end{aligned}$$

Estimamos cada término por separado. Como $v_0 \in H^\sigma_w$, por el teorema 2.5 tenemos que

$$E_1 \le C N^{-(1+\epsilon-\sigma)/2} \|v_0\|_{\sigma,w}$$

E_2 se estima de la misma forma, obteniéndose

$$E_2 \le C(T_0) N^{-(1+\epsilon-\sigma)/2} \sup_{0\le s\le T_0} \|v(s)\|_{\sigma,w}$$

Finalmente, E_3 se estima a partir del lema anterior, quedando

$$E_3 \le C(T_0) N^{-(1+\epsilon-\sigma)/2} \sup_{0\le s\le T_0} \|v(s)\|_{\sigma,w}$$

Reuniendo las tres desigualdades anteriores resulta

$$\delta_N \le C N^{-(1+\epsilon-\sigma)/2}$$

con un C que depende de v y de T_0, pero no de N. Por lo tanto podemos tomar N suficientemente grande para que $\delta_N \le 1/2$.

De **(i)** y **(ii)** deducimos que para T_0 suficientemente pequeño y N suficientemente grande existe un único punto fijo v_N de Ψ.

(iii) v_N aproxima v. Lo comprobamos estimando la diferencia entre la solución aproximada v_N y la proyección $P_N v$ de la solución exacta.

$$\begin{aligned}\|P_N v(s) - v_N(s)\|_{0,w} &\leq \|P_N v(s) - \Psi P_N v(s)\|_{0,w} + \|\Psi P_N v(s) - v_N(s)\|_{0,w} \\ &\leq \delta_N + \frac{1}{2}\|P_N v(s) - v_N(s)\|_{0,w}\end{aligned}$$

de donde

$$\|P_N v(s) - v_N(s)\|_{0,w} \leq C N^{-(1+\epsilon-\sigma)/2}$$

La demostración se termina iterando el proceso a partir de $v(T_0)$ hasta cubrir por completo el intervalo $[0, T]$. Esto es posible porque T_0 y N dependen exclusivamente de las estimaciones sobre la solución exacta v en $[0, T]$.

Bibliografía

[1] E, Weinan: Convergence of spectral methods for Burger's equation. SIAM J. Numer. Anal. Vol 29, No. 6, pp. 1520-1541, December 1992

[2] E, Weinan: Convergence of Fourier methods for the Navier-Stokes equations. SIAM J. Numer. Anal. Vol 30, No. 3, pp. 650-674, June 1993

[3] Funaro, Daniele; Kavian, Otared: Approximation of some diffusion evolution equations in unbounded domains by Hermite Functions. Math. Comp. Vol. 57, No. 196, pp. 597-619, October 1992