Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 315, 2004 г.

Е. Коротяев, А. Куценко

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИСКРЕТНОГО ПЕРИОДИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА ШРЁДИНГЕРА

1. Введение

В работе изучаются изоспектральные множества для дискретного $(N+1)$-периодического оператора Шрёдингера. При малых нечётных потенциалах изоспектральные множества в основном состоят из $2^{\frac{N+1}{2}}$ элементов, а при больших потенциалах из $(N+1)!$ элементов. Более того, в работе дана асимптотика краёв зон спектра этого оператора в случае больших по норме потенциалов и в случае малых по норме нечётных потенциалов.

Рассмотрим периодический оператор Шрёдингера

$$(Ly)_n = y_{n-1} + y_{n+1} + q_n y_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad y \in l^2(\mathbb{Z}).$$

Здесь потенциал $\{q_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ есть вещественная $(N+1)$-периодическая последовательность, $q_{n+N+1} = q_n$, $n \in \mathbb{Z}$. Введём пространство потенциалов

$$q \equiv \{q_n\}_1^{N+1} \in \mathcal{Q} \equiv \left\{ q \in \mathbb{R}^{N+1} : \sum_1^{N+1} q_n = 0 \right\}, \qquad \|q\|^2 = \sum_{n=1}^{N+1} q_n^2. \tag{1.1}$$

Хорошо известно, что спектр оператора L абсолютно непрерывен и состоит из $(N+1)$-й зоны $\sigma_n = \sigma_n(q) = [\lambda_n^+, \lambda_{n+1}^-]$, $n = 0, 1, \ldots, N$, где $\lambda_n^{\pm} = \lambda_n^{\pm}(q)$ края зон и $\lambda_0^+ < \lambda_1^- \leqslant \lambda_1^+ < \ldots < \lambda_N^- \leqslant \lambda_N^+ < \lambda_{N+1}^-$. Эти зоны отделены друг от друга лакунами $\gamma_n = \gamma_n(q) = (\lambda_n^-, \lambda_n^+)$ длины $|\gamma_n| \geqslant 0$. Лакуны могут быть вырожденными: $|\gamma_n| = 0$.

Введём фундаментальные решения $\varphi_n(\lambda, q)$ и $\vartheta_n(\lambda, q)$, $n \in \mathbb{Z}$, уравнения

$$y_{n-1} + y_{n+1} + q_n y_n = \lambda y_n, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \ n \in \mathbb{Z}, \tag{1.2}$$

с начальными условиями

$$\varphi_0(\lambda, q) \equiv \vartheta_1(\lambda, q) \equiv 0, \quad \varphi_1(\lambda, q) \equiv \vartheta_0(\lambda, q) \equiv 1.$$

Функция $\Delta(\lambda,q) = \varphi_{N+2}(\lambda,q) + \vartheta_{N+1}(\lambda,q)$ называется функцией Ляпунова для оператора L. Видно, что Δ, φ_n и $\vartheta_n, n \geqslant 1$, являются полиномами от $(\lambda,q) \in \mathbb{C}^{N+1}$. Спектр оператора L находится по формуле $\sigma(q) = \{\lambda \in \mathbb{R} : |\Delta(\lambda,q)| \leqslant 2\}$, и заметим что $(-1)^{N+1-n}\Delta(\lambda_n^{\pm},q) = 2$, $n = 0,\dots,N+1$.

Введём параметры, которые оказываются очень удобными для описания поведения спектра при различных потенциалах. Для каждого $n = 1,\dots,N$ найдётся точка $\lambda_n = \lambda_n(q) \in [\lambda_n^-, \lambda_n^+]$ такая, что

$$\Delta'(\lambda_n,q) = 0, \quad \Delta''(\lambda_n,q) \neq 0, \quad (-1)^{N+1-n}\Delta(\lambda_n,q) \geqslant 2. \tag{1.3}$$

Здесь и ниже мы будем использовать обозначение $(\,') = \partial/\partial\lambda$. Определим отображение $h : \mathcal{Q} \to \mathbb{R}^N$, $h(q) = \{h_n(q)\}_1^N$ по формуле

$$\Delta(\lambda_n,q) = 2(-1)^{N+1-n}\cosh h_n, \quad h_n \geqslant 0. \tag{1.4}$$

По данным h однозначно восстанавливается функция Ляпунова Δ, которая определяет спектр σ. Это значит, что h, Δ, σ находятся друг с другом во взаимно однозначном соответствии, то есть

$$\sigma(q) = \sigma(p) \quad \Leftrightarrow \quad h(q) = h(p) \quad \Leftrightarrow \quad \Delta(\cdot,q) \equiv \Delta(\cdot,p). \tag{1.5}$$

Отображение h есть некоторый аналог отображения Марченко–Островского в случае непрерывного оператора Шрёдингера (см. [1]). Ввиду такой тесной связи со спектром, важным вопросом представляется изучение "особенностей" и областей локального и глобального изоморфизма отображения h.

Полином Δ имеет разложение

$$\begin{aligned} &\Phi(q) = \{\phi_n(q)\}_1^N, \\ &\Delta(\lambda,q) = \lambda^{N+1} + \phi_1(q)\lambda^{N-1} + \phi_2(q)\lambda^{N-2} + \ldots + \phi_N(q) \end{aligned} \tag{1.6}$$

для некоторых полиномов $\phi_n(q)$, $q \in \mathcal{Q}$. Тогда определитель производной Фреше $\det d_q\Phi(q)$ – тоже полином. Введём множество

$$\mathcal{S} = \{q \in \mathcal{Q} : \quad \det d_q\Phi(q) = 0\}. \tag{1.7}$$

Оказывается, что поверхность S состоит из "особенностей" отображения h.

Предложение 1.1. *Определитель* $\det d_q h$ *не равен нулю тогда и только тогда, когда* $q \notin \mathcal{S}$. *Более того, если* $q \notin \mathcal{S}$, *то* $h_n(q) > 0$ *для всех* n.

Большие по норме потенциалы. Первая теорема будет показывать поведение границ зон спектра и асимптотику длин этих зон при больших по норме потенциалах. Обозначим через $\mathcal{M}_n$ представление группы перестановок S_n размерности n в пространстве $(n \times n)$-матриц:

$$\mathcal{M}_n = \{M_\omega : \ M_\omega q = \{q_{\omega(j)}\}_{j=1}^n, \ \omega \in S_n, \ q \in \mathbb{R}^n\}. \tag{1.8}$$

Теорема 1.2. *Пусть* $p \in \mathcal{Q}$ *и* $p_1 \leqslant p_2 \leqslant \ldots \leqslant p_{N+1}$. *Предположим, что* $p_{n-1} < p_n < p_{n+1}$ *для некоторого* n, $2 \leqslant n \leqslant N$ *или* $p_1 < p_2$, $n = 1$, *или* $p_N < p_{N+1}$, $n = N+1$. *Тогда при* $q = Mp$, $M \in \mathcal{M}_n$ *верны следующие асимптотики при* $t \to +\infty$:

$$\lambda_{n-1}^+(tq) = p_n t - \left(\frac{1}{p_n - q_{m-1}} + \frac{1}{p_n - q_{m+1}}\right) t^{-1} + O(t^{-2}), \tag{1.9}$$
$$p_n = q_m,$$

$$|\sigma_n(tq)| = \lambda_n^-(tq) - \lambda_{n-1}^+(tq) = 4t^{-N} \prod_{j \neq n} |p_j - p_n|^{-1} + O(t^{-N-1}). \tag{1.10}$$

Теперь посмотрим на поведение поверхности S при больших по норме потенциалах.

Теорема 1.3. *Предположим, что* $\varepsilon = \inf\limits_{n \neq m} |q_m - q_n| > 0$ *для некоторого* $q \in \mathcal{Q}$. *Тогда* $tq \notin S$ *для любого* $t > \frac{4}{N!}\left(\frac{3}{2\varepsilon}\right)^N$.

Далее будем искать области глобального изоморфизма для отображения h. Введём множества

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_\varepsilon &= \{q \in \mathcal{Q} \colon \|q\| < 1, \ \inf_{n \neq m} |q_n - q_m| > \varepsilon\}, \\ \mathcal{Z}_\varepsilon^0 &= \{q \in \mathcal{Z}_\varepsilon : q_1 < \ldots < q_{N+1}\}, \quad \varepsilon > 0. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Тогда $\mathcal{Z}_\varepsilon = \bigcup\limits_{\omega \in S_{N+1}} \mathcal{Z}_\varepsilon(\omega)$, где $\mathcal{Z}_\varepsilon(\omega) = M_\omega \mathcal{Z}_\varepsilon^0$, $M_\omega \in \mathcal{M}_{N+1}$ (см. (1.8)). Множества $\mathcal{Z}_\varepsilon(\omega)$ открыты, выпуклы и непусты при $0 < \varepsilon < N^{-\frac{3}{2}}$. Также введём множество

$$\mathcal{Z}_{t,\varepsilon}(\omega) = \{p = sq : \ q \in \mathcal{Z}_\varepsilon(\omega), \ s > t\}. \tag{1.12}$$

Теорема 1.4. (i) *Для любого* $\omega \in S_{N+1}$, *любого* $0 < \varepsilon < N^{-\frac{3}{2}}$ *существует такое* $t > 0$, *что отображение* $h : \mathcal{Z}_{t,\varepsilon}(\omega) \to h(\mathcal{Z}_{t,\varepsilon}(\omega))$ *является вещественным аналитическим изоморфизмом.*

(ii) *Для любого* $h^* \in \mathbb{R}^N$ *существует такое* $t > 0$, *что полупрямая* $\{h^* + s \cdot 1_0,\ s > t\}$ *содержится в* $h(\mathcal{Q})$ *и каждая точка этой полупрямой имеет в точности* $(N+1)!$ *прообразов в* $\mathcal{Q}$. *Здесь* $1_0 = (1, \dots, 1)$.

На основании изложенных фактов и их доказательств можно показать, что при больших потенциалах вся поверхность S асимптотически сосредоточена в конической окрестности каждой из плоскостей $\{q \in \mathcal{Q} :\ q_i = q_j,\ i \neq j\}$. На бесконечности эти окрестности разбивают $\mathcal{Q}$ на $(N+1)!$ областей глобального изоморфизма для отображения h. При этом образ каждой из этих областей примерно один и тот же, в том смысле что $\sigma(q) \approx \sigma(Mq)$, $M \in \mathcal{M}_{N+1}$ для $q \in \mathcal{Z}_{t,\varepsilon}(\omega)$, $\omega \in S_{N+1}$ при больших t. В пункте (ii) последней теоремы даётся частичное описание образа.

Малые по норме нечётные потенциалы. Определим пространство нечётных потенциалов

$$\begin{aligned} &\mathcal{Q}^{\mathrm{odd}} = \{q \in \mathbb{R}^{N+1} :\ q_{N+2-n} = -q_n,\ n = 1, \dots, N\}, \\ &N + 1 = 2k, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Введём ортонормированный базис e_m и координаты $\hat{q}_m$ в пространстве $\mathcal{Q}^{\mathrm{odd}}$:

$$\begin{aligned} e_m &= \frac{2^{-\frac{\delta_{k,m}}{2}}}{\sqrt{k}} \left\{ \sin \frac{(2n-1)m\pi}{2k} \right\}_{n=1}^{2k}, \\ q &= \sum_{m=1}^{k} \hat{q}_m e_m, \quad q \in \mathcal{Q}^{\mathrm{odd}}, \end{aligned} \tag{1.14}$$

здесь δ – символ Кронекера. В случае $q \in \mathcal{Q}^{\mathrm{odd}}$ мы имеем $h_{k-n}(q) = h_{k+n}(q)$, $n = 1, \dots, k-1$. Поэтому можно считать, что $h : \mathcal{Q}^{\mathrm{odd}} \to \mathbb{R}^k$, взяв $h = \{h_n\}_1^k$. Далее при $q \in \mathcal{Q}^{\mathrm{odd}}$ все ϕ_{2n} тождественно равны нулю, и можно считать, что $\Phi : \mathcal{Q}^{\mathrm{odd}} \to \mathbb{R}^k$ (см. (1.6)). Взяв производную Фреше такого отображения $d_q\Phi$, положим $\mathcal{S} = \{q \in \mathcal{Q}^{\mathrm{odd}} :\ \det d_q\Phi(q) = 0\}$ (см. (1.7)). В итоге для новых h и $\mathcal{S}$ в случае $q \in \mathcal{Q}^{\mathrm{odd}}$ остаются верными утверждение (1.5) и предложение 1.1.

Первая теорема даёт асимптотику h и границ спектральных лакун оператора L при малых $q \in \mathcal{Q}^{\mathrm{odd}}$. Результат записан для первых k лакун, для остальных же $\lambda^{\pm}_{k-n}(q) = -\lambda^{\pm}_{k+n}(q)$, $1 \leqslant n \leqslant k-1$, $q \in \mathcal{Q}^{\mathrm{odd}}$.

Теорема 1.5. *При $1 \leqslant n \leqslant k$ имеет место асимптотика*

$$(\lambda^{\pm}_n(q) + 2\cos\frac{\pi n}{2k})^2 = \frac{2^{\delta_{k,n}}}{4k}\hat{q}_n^2 + O(\|q\|^3), \quad \|q\| \to 0, \tag{1.15}$$

$$h_n^2(q) = \frac{2^{\delta_{k,n}}k}{4\sin^2\frac{\pi n}{2k}}\hat{q}_n^2 + O(\|q\|^4), \quad \|q\| \to 0, \tag{1.16}$$

здесь δ – символ Кронекера.

Замечательно то, что каждая координата спектральных данных в отдельности асимптотически ведёт себя независимо и позволяет примерно "найти" соответствующую координату потенциала.

Введём множество потенциалов с одинаковым спектром

$$\mathrm{Iso}(q) = \{p \in \mathcal{Q}^{\mathrm{odd}} : \quad \sigma(q) = \sigma(p)\}. \tag{1.17}$$

Теорема 1.6. *Пусть $q \in \mathcal{Q}^{\mathrm{odd}}$ и $\hat{q}_n \neq 0$ для всех $n = 1, \ldots, k$. Тогда существует такое $t_0 = t_0(q) > 0$, что $p \notin \mathcal{S}$ и $\#\mathrm{Iso}(p) = 2^k$ для каждого $p \in (0, t_0 q)$.*

То есть можно показать, что около точки 0 листы поверхности S асимптотически ведут себя как ортогональные друг другу плоскости $\{q \in \mathcal{Q}^{\mathrm{odd}} : \hat{q}_n = 0\}$, $n = 1, \ldots, k$. На бесконечности же в случае нечётных потенциалов верны результаты, аналогичные теореме 1.4. Различие в поведении наблюдается и в количестве элементов множества Iso, около точки 0 оно в основном состоит из 2^k элементов, а на ∞ в основном из $2^k k!$ элементов.

Литература

1. В. А. Марченко, *Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения*. Наукова думка, Киев (1977).
2. P. van Moerbeke, *The spectrum of Jacobi matrices*. — Invent. Math. **37**, No. 1 (1976), 45–81.
3. Y. Last, *On the measure of gaps and spectra for discrete 1D Schrodinger operators*. — Comm. Math. Phys. **149**, No. 2 (1992), 347–360.
4. E. Korotyaev, I. Krasovsky, *Spectral estimates for periodic Jacobi matrices*. — Comm. Math. Phys. **234**, No. 3 (2003), 517–532.
5. L. Perkolab, *An inverse problem for a periodic Jacobi matrix*. — Teor. Funk. Funk. Anal. Prilozh. **42** (1984), 107–121.

Korotyaev E., Kutsenko A. Inverse problem for the discrete periodic Schrödinger operator.

We study the isospectral sets for the discrete 1D Schrödinger operator on $\mathbb{Z}$ with a N+1 periodic potential. We show that for small odd potentials the isospectral set consists of $2^{(N+1)/2}$ elements, while for the large potentials the isospectral set consists of $(N+1)!$ elements. Moreover, the asymptotics of the end of the spectrum of the Schrödinger operator for small (and large) potentials are determined.

Поступило 20 апреля 2004 г.

Institut für Mathematik,
Humboldt Universität zu Berlin, Germany
E-mail: ek@mathematik.hu-berlin.de

Санкт-Петербургский
государственный университет,
Institut für Mathematik,
Universität Potsdam
E-mail: kucenko@math.uni-potsdam.de