Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 313, 2004 г.

**А. А. Заитов**

# ФУНКТОР СЛАБО АДДИТИВНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ КОНЕЧНОЙ СТЕПЕНИ

**Определение 1.** *Функционал $\nu : C(X) \to \mathbb{R}$ назовем*

(1) *слабо аддитивным, если для всех $c \in \mathbb{R}$ и $\varphi \in C_b(X)$ выполняется равенство $\nu(\varphi + c_X) = \nu(\varphi) + c$, где через $c_X$ обозначается постоянная на $X$ функция, равная $c$;*

(2) *сохраняющим порядок, если для всех пар функций $\varphi$, $\psi \in C(X)$ из $\varphi \leqslant \psi$ следует $\nu(\varphi) \leqslant \nu(\psi)$;*

(3) *нормированным, если $\nu(1_X) = 1$.*

Для тихоновского пространства $X$ через $O \circ \beta(X)$ обозначим множество всех слабо аддитивных, сохраняющих порядок, нормированных функционалов. Для краткости, слабо аддитивный сохраняющий порядок нормированный функционал, будем просто называть слабо аддитивным функционалом. Рассмотрим $O \circ \beta(X)$ как подпространство пространства $C_p(C_b(X))$ всех непрерывных функций на $C_b(X)$, снабженного топологией поточечной сходимости.

Пусть $X$ – компакт, $O$ – функтор слабо аддитивных, сохраняющих порядок нормированных функционалов. Известно, что пространство $O(X) \equiv O \circ \beta(X)$ является компактом для любого компакта $X$ [1]. Напомним, что

$$\operatorname{supp} \mu = \cap\{F : F \text{ замкнуто в } X \text{ и } \mu \in O(F)\}.$$

Для компакта $X$ обозначим через $O_n(X)$ множество всех слабо аддитивных функционалов $\mu \in O(X)$, для которых $|\operatorname{supp} \mu| \leqslant n$, где $|A|$ – мощность множества $A$. а $n$ – положительное целое число. Пусть $f : X \to Y$ – непрерывное отображение компакта $X$ в $Y$. Отображение $O_n(f) : O_n(X) \to O(Y)$, определенное по формуле

$$O_n(f)(\mu)(\varphi) = \mu(\varphi \circ f) = \mu\big(\varphi \circ f\big|_{\operatorname{supp} \mu}\big) = \mu\big(\varphi\big|_{\operatorname{supp} \mu} \circ f\big),$$

где $\mu \in O_n(X)$, $\varphi \in C(Y)$ является непрерывным. Очевидно, что $O_n(f)(O_n(X)) \subset O_n(Y)$. Таким образом определено отображение

$O_n(f) : O_n(X) \to O_n(Y)$. Непосредственная проверка показывает, что $O_n(g \circ f) = O_n(g) \circ O_n(f)$, где $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ – непрерывные отображения компактов. Кроме того, если $\mathrm{id}_X : X \to X$ – тождественное отображение компакта $X$, то легко проверить, что $O_n(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{O_n(X)}$. Таким образом $O_n$ – ковариантный функтор степени $\leqslant n$, действующий в категории Comp. Легко видеть, что если $f : X \to Y$ – вложение компакта $X$ в компакт $Y$, то отображение $O_n(f)$ – также вложение пространства $O_n(X)$ в $O_n(Y)$, а если $f : X \to Y$ – отображение "на", то отображение $O_n(f)$ также является отображением "на". Иными словами, функтор $O_n$ мономорфен и эпиморфен. Так как мономорфный функтор конечной степени непрерывен, то функтор $O_n$ является непрерывным. Кроме того, функтор $O_n$ сохраняет вес бесконечного компакта, пустое множество, точку и пересечение замкнутых подмножеств компакта. Заметим, что он не сохраняет прообраза.

**Пример.** Пусть $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ и $Y = \{y_1, y_2\}$ – конечные компакты (все точки $x_1$, $x_2$, $x_3$, $y)1$, $y_2$ различны). Отображение $f : X \to Y$ построим как следующее: $f(x_1) = y_1$ и $f(x_2) = f(x_3) = y_2$. Рассмотрим функционал $\delta_{y_2} \in O(Y)$, сосредоточенный на $\{y_2\} \subset Y$. Функционал $\mu \in O(X)$ определим по формуле

$$\mu(\varphi) = \max\big\{\min\{\varphi(x_1), \varphi(x_2)\}, \min\{\varphi(x_1), \varphi(x_3)\}, \min\{\varphi(x_2), \varphi(x_3)\}\big\}.$$

Возьмем произвольную функцию $\psi \subset C(Y)$. Имеем

$$O(f)(\mu)(\psi) = \mu(\psi \circ f) = \max\big\{\min\{\psi(f(x_1)), \psi(f(x_2))\},$$

$$\min\{\psi(f(x_1)), \psi(f(x_3))\}, \min\{\psi(f(x_2)), \psi(f(x_3))\}\big\} =$$

$$= \max\big\{\min\{\psi(f(y_1)), \psi(f(y_2))\}, \psi(y_2)\big\} = \psi(y_2) = \delta_{y_2}(\psi),$$

т.е. $O(f)(\mu) = \delta_{y_2}$. С другой стороны, $\mu \notin O(\{x_2, x_3\})$, хотя $f^{-1}(y_2) = \{x_2, x_3\}$. Значит функтор $O_n$ не сохраняет прообразы.

Положительным целым числом $n$ мы будем также обозначать дискретное пространство $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, содержащее ровно $n$ точек. Если $X$ – компакт, то пространство $X^n$ всех отображений $\xi : n \to X$ также является компактом.

Теперь построим отображение $\pi_{OXn} : X^n \times O(n) \to O_n(X)$ формулой $\pi_{OXn}(\xi, \mu) = O + n(\xi)(\mu)$ для $\xi : n \to X$ и $\mu \in O(n) \equiv O_n(n)$. Определенное отображение $\pi_{OXn}$ непрерывно (см. [2]). Так как $O(n)$ является компактом, то произведение $X^n \times O(n)$ – также компонент.

**Теорема 2.** *$O_n(X)$ является компактом для любого компакта $X$.*

**Доказательство.** Достаточно показать, что отображение $\pi_{OXn}$ является отображением "на". Сначала заметим, что множество $O_n(X)$ представляется в виде объединения

$$O_n(X) = \cup\{O(Y) : Y \subset Y \text{ и } |Y| \leqslant n\}. \tag{1}$$

Пусть $Y = \{x_0, \ldots, x_n\}$ – произвольное конечное подмножество пространства $X$, содержащее не более $n$ точек. Тогда множества $O(Y)$ и $O(k+1)$ гомеоморфны. Теперь выберем $\xi \in X^k \subset X^n$ так, чтобы было $\xi(i) = x_i$, $i = 0, \ldots, k$. Следовательно, для любого $\nu \in O(Y)$ существует $\mu \in O(k+1)$ такое, что $\pi_{OXn}(\xi, \mu) = O_n(\xi)(\mu) = \mu$.

Пусть теперь $\nu \in O_n(X)$ – произвольный функционал. Тогда $|\operatorname{supp}\nu| = m \leqslant n$ и $\nu \in O(|\operatorname{supp}\nu|)$. Значит отображение $\pi_{OXn}$ является отображением "на". Таким образом, множество $O_n(X)$ является компактом как непрерывный образ компакта. Теорема 2 доказана.

Пусть теперь $X$ – тихоновское пространство, а $\beta X$ – его стоун–чеховское расширение. Известно [3], что пространство $O \circ \beta(X)$ является компактом; компакты $O \circ \beta(X)$ и $O(\beta X)$ – гомеоморфны для любого тихоновского пространства $X$. Положим

$$O_n(X) \equiv \left\{\mu \in O \circ \beta(X) : |\operatorname{supp}\mu| \leqslant n\right\}. \tag{2}$$

Тогда теорема 2 обобщается следующем образом.

**Теорема 2′.** *$O_n(X)$ – компакт для любого тихоновского пространства $X$. Следовательно, компакты $O_n(X)$ и $O_n(\beta X)$ гомеоморфны для произвольного тихоновского пространства $X$.*

**Замечания.** (а) Сначала отметим, что $O_1(X)$ гомеоморфно пространству $X$ для любого компакта $X$. Следовательно, $O_1(X) \equiv O_1(\beta X)$ гомеоморфно стоун–чеховскому расширению $\beta X$ для любого тихоновского пространства $X$. Таким образом, стоун–чеховское расширение $\beta X$ тихоновского пространства $X$ – это в точности пространство $O_1(X)$.

(б) В общем случае носитель функционала $\mu \in O \circ \beta(X)$ не определен для тихоновского пространства $X$. Это связано с тем, что не всякая непрерывная ограниченная функция, определенная на произвольном замкнутом подмножестве тихоновского пространства, может быть продолжена непрерывно и ограничено на все

пространство. Поскольку имеет место теорема Брауэра–Титце–Урысона, носитель любого функционала $\mu \in O \circ \beta(X)$ определен для нормального пространства $X$. Но носитель произвольного функционала $\mu \in O_n(X)$ для любого тихоновского пространства $X$ определен, поскольку всякая функция, определенная на конечном подмножестве произвольного пространства, имеет хотя бы одно непрерывное и ограниченное продолжение.

## Литература


1. T. Radul, *On the functor of order-preserving functionals.* — Comm. Math. Univ. Carol. **39,** No. 3 (1998), 609–615.
2. A. A. Zaitov, *On categorical properties of the functor of order-preserving functionals.* Methods of Functional Analysis and Topology **9**, No. 4 (2003), 357–364..
3. В. Н. Басманов, *Ковариантные функторы конечных степеней на категории бикомпактных пространств.* — Фунд. и прикл. матем. **2,** No. 3 (2002), 637–654.
4. В. В. Федорчук, В. В. Филиппов, *Общая топология. Основные конструкции.* МГУ, М. (1988).



Zaitov A. A. The functor of order-preserving functionals of finite degree.

In this paper we proved that the space of all order-preserving functionals with finite supports is a compact, and we showed that this space is the Stone–Chech compactification of given Tychonoff space if supports consist only one point.



Институт математики
им. В. И. Романовского
АН Республики Узбекистан
*E-mail*: mathinst@uzsci.net


Поступило 4 октября 2003 г.