Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 296, 2003 г.

Л. Ю. Колотилина

О КРАЙНИХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ БЛОЧНЫХ 2×2 ЭРМИТОВЫХ МАТРИЦ

§1. Введение

Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $(n \geqslant 2)$ – симметричная матрица с собственными значениями

$$\lambda_1(A) \geqslant \lambda_2(A) \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n(A).$$

В работе [5] Парлетт рассматривает разброс собственных значений A, т.е. разность

$$\lambda_1(A) - \lambda_n(A)$$

ее крайних собственных значений (которую он называет спектральным диаметром A) как функцию диагональных элементов матрицы и устанавливает следующий результат.

Теорема 1. *Пусть $A = (a_{ij})$ – симметричная $n\times n$ $(n \geqslant 2)$ матрица, граф которой является деревом. Тогда*

$$\lambda_1(A) - \lambda_n(A) \geqslant \lambda_1(A - \operatorname{diag} A) - \lambda_n(A - \operatorname{diag} A), \tag{1.1}$$

где $\operatorname{diag} A = \operatorname{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn})$ *– это диагональная часть A.*

Заметим, что для произвольной симметричной матрицы неравенство (1.1), как было показно в [5], может и не выполняться.

Доказательство теоремы 1, представленное в [5], достаточно сложно и базируется на результатах из теории возмущений, теории графов и теории неотрицательных матриц. В частности, упомянутое доказательство использует следующие свойства вещественной симметричной матрицы A, граф которой является деревом. Во-первых, такая матрица обязательно неприводима. Во-вторых, существуют такая матрица-перестановка P и такая знаковая диагональная матрица S (т.е. диагональная матрица с ± 1 на главной диагонали), что

$$SP^{\intercal}APS = \begin{bmatrix} D_1 & N \\ N^{\intercal} & D_2 \end{bmatrix}, \tag{1.2}$$

где D_1 и D_2 – диагональные матрицы, а матрица N неотрицательна. Из этих двух свойств следует, что оба крайние собственные значения матрицы A являются простыми, а им соответствующие собственные векторы не имеют нулевых компонент.

Первый основной результат этой статьи (см. теорему 2 в §2) состоит в следующем. Мы доказываем, что если

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^* & A_{22} \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

– $n \times n$ ($n \geqslant 2$) эрмитова матрица, представленная в блочном 2×2 виде, то

$$\lambda_1(A) - \lambda_n(A) \geqslant 2\|A_{12}\| = \lambda_1(A - D_A) - \lambda_n(A - D_A), \tag{1.4}$$

где

$$D_A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

– блочно диагональная часть A, а также мы указываем условия, необходимые и достаточные для того, чтобы неравенство (1.4) обращалось в равенство. Эти условия формулируются в терминах собственных векторов матрицы A, соответствующих $\lambda_1(A)$ и $\lambda_n(A)$.

Из этого результата почти сразу же следует (см. следствие 3 в §2), что неравенство Парлетта (1.1) справедливо для любой эрмитовой матрицы A, перестановочно подобной блочной 2×2 матрице, диагональные блоки которой диагональны, и, в частности, для любой симметричной матрицы, граф которой является деревом. Заметим, что прочие свойства такой матрицы, указанные выше (т.е. ее неприводимость, неотрицательность матрицы N в (1.2), простота крайних собственных значений и отсутствие нулевых компонент в соответствующих собственных векторах), с точки зрения справедливости неравенства (1.1) несущественны.

Второй основной результат этой работы (см. теорему 4 в §2) состоит в том, что для любой $n \times n$ эрмитовой положительно определенной матрицы A вида (1.3) равенство

$$\lambda_1(A) - \lambda_n(A) = \min_D \left\{ \lambda_1(A + D) - \lambda_n(A + D) \right\}, \tag{1.5}$$

где D пробегает все множество эрмитовых матриц вида

$$\begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix}, \tag{1.6}$$

справедливо в том и только том случае, когда

$$\frac{\lambda_1(A)}{\lambda_n(A)} = \min_{\Delta}\left\{\frac{\lambda_1(\Delta^* A\Delta)}{\lambda_n(\Delta^* A\Delta)}\right\}, \tag{1.7}$$

где Δ пробегает все множество невырожденных матриц вида (1.6), т.е. когда матрица A оптимально обусловлена. Кроме того, оба равенства (1.5) и (1.7) выполнены тогда и только тогда, когда крайние собственные значения A удовлетворяют равенствам

$$\lambda_1(A) = \|A_{12}\|\frac{1+\|A_{11}^{-1/2}A_{12}A_{22}^{-1/2}\|}{\|A_{11}^{-1/2}A_{12}A_{22}^{-1/2}\|},$$

$$\lambda_n(A) = \|A_{12}\|\frac{1-\|A_{11}^{-1/2}A_{12}A_{22}^{-1/2}\|}{\|A_{11}^{-1/2}A_{12}A_{22}^{-1/2}\|}.$$

На основе этого результата вводится понятие матриц с оптимальными (относительно фиксированного блочного 2×2 разбиения) крайними собственными значениями и приводятся примеры таких матриц.

В завершение этого вводного параграфа мы напоминаем простой и хорошо известный результат, касающийся собственных значений блочной 2×2 эрмитовой матрицы с нулевыми диагональными блоками.

Лемма 1. *Пусть*

$$C = \begin{bmatrix} 0 & G \\ G^* & 0 \end{bmatrix}$$

– эрмитова $n\times n$ ($n\geqslant 2$) матрица, где G – $m\times(n-m)$ матрица, $1\leqslant m<n$. Тогда

$$\lambda_i(C) = \begin{cases} \sigma_i(G), & i=1,\dots,\operatorname{rank}G, \\ 0, & i=\operatorname{rank}G+1,\dots,n-\operatorname{rank}G, \\ -\sigma_{n-i+1}(G), & i=n-\operatorname{rank}G+1,\dots,n, \end{cases}$$

где $\sigma_1(G)\geqslant\dots\geqslant\sigma_q(G)$ – сингулярные значения G ($q=\min\{m,n-m\}$).

§2. Результаты

В этом параграфе мы будем использовать следующие обозначения:

$$D_A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

– это блочно диагональная часть блочной 2×2 эрмитовой матрицы A порядка n; $\operatorname{diag} A$ – (точечная) диагональная часть A, и

$$S = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & -I_{n-m} \end{bmatrix},$$

где m – это порядок блока A_{11}.

Справедливо следующее обобщение теоремы 1 Парлетта.

Теорема 2. *Пусть A – $n \times n$ ($n \geqslant 2$) эрмитова матрица вида*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^* & A_{22} \end{bmatrix},$$

где $A_{11} \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $1 \leqslant m < n$. Тогда

$$\lambda_1(A) - \lambda_n(A) \geqslant \lambda_1(A - D_A) - \lambda_n(A - D_A) = 2\|A_{12}\|, \tag{2.1}$$

причем это неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда существует ненулевой вектор $z \in \mathbb{C}^n$, такой что

$$Az = \lambda_1(A)z \tag{2.2}$$

и

$$ASz = \lambda_n(A)Sz. \tag{2.3}$$

Доказательство. Пусть векторы $x \in \mathbb{C}^m$ и $y \in \mathbb{C}^{n-m}$ образуют пару сингулярных векторов блока A_{12}, ассоциированную с $\sigma_1(A_{12}) = \|A_{12}\|$, так что

$$A_{12}y = \|A_{12}\|x, \quad \|x\| = \|y\| = 1, \tag{2.4}$$

и пусть $z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Тогда $\|z\|^2 = 2$, и мы имеем

$$\begin{aligned} \lambda_1(A) \geqslant \frac{z^*Az}{\|z\|^2} &= \frac{x^*A_{11}x + y^*A_{22}y + x^*A_{12}y + y^*A_{12}x}{2} \\ &= \frac{x^*A_{11}x + y^*A_{22}y}{2} + \|A_{12}\|. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Аналогично из (2.4) выводится неравенство

$$\lambda_n(A) \leqslant \frac{(Sz)^*A(Sz)}{\|Sz\|^2} = \frac{x^*A_{11}x + y^*A_{22}y}{2} - \|A_{12}\|, \tag{2.6}$$

и требуемое неравенство

$$\lambda_1(A) - \lambda_n(A) \geqslant 2\|A_{12}\|$$

немедленно следует из (2.5) и (2.6). Равенство же

$$\lambda_1(A - D_A) - \lambda_n(A - D_A) = 2\|A_{12}\|$$

является тривиальным следствием леммы 1.

Теперь для завершения доказательства теоремы 2 остается заметить, что неравенство (2.5) обращается в равенство тогда и только тогда, когда справедливо соотношение (2.2), а неравенство (2.6) обращается в равенство в том и только том случае, когда справедливо равенство (2.3). □

Теперь мы выведем некоторые следствия из теоремы 2. Сперва мы сформулируем обобщение неравенства (2.1), которое устанавливается с помощью симметричной перестановки строк и столбцов матрицы A.

Следствие 1. *Пусть $A = (a_{ij})$ – эрмитова $n \times n$ ($n \geqslant 2$) матрица и пусть $J \underset{\neq}{\subset} \langle n \rangle = \{1, \ldots, n\}$ – непустое собственное подмножество индексного множества. Тогда*

$$\lambda_1(A) - \lambda_n(A) \geqslant 2\big\|A[J, \overline{J}]\big\|, \tag{2.7}$$

где $\overline{J} = \langle n \rangle - J$ – дополнение подмножества J в $\langle n \rangle$, а $A[J, \overline{J}] = \big\{a_{ij}\big\}_{\substack{i \in J \\ j \in \overline{J}}}$ – подматрица матрицы A, специфицируемая множеством J.

В частности, если матрица A положительно полуопределена, то

$$\lambda_1(A) \geqslant 2\big\|A[J, \overline{J}]\big\|, \tag{2.8}$$

а если A положительно определена, то неравенство (2.8) является строгим.

Следующий результат, который легко выводится из следствия 1, представляет собой блочное обобщение хорошо известного неравенства

$$\lambda_1(A) - \lambda_n(A) \geqslant 2 \max_{i \neq j} |a_{ij}|,$$

справедливого для произвольной эрмитовой матрицы $A = (a_{ij})$ порядка $n \geqslant 2$ [4, теорема III.4.3.2].

Следствие 2. *Пусть* $A = \left(A_{ij}\right)_{i,j=1}^{N}$, $2 \leqslant N \leqslant n$, *– блочная эрмитова матрица порядка* n *с квадратными диагональными блоками. Тогда*

$$\lambda_1(A) - \lambda_n(A) \geqslant 2 \max_{1 \leqslant i \leqslant N} \left\| \left[A_{i1}, \ldots, A_{ii-1}, A_{ii+1}, \ldots, A_{iN}\right] \right\| \qquad (2.9)$$

и

$$\lambda_1(A) - \lambda_n(A) \geqslant 2 \max_{i \neq j} \|A_{ij}\|. \qquad (2.10)$$

Доказательство. Пусть $i \in \{1, \ldots, N\}$ и пусть

$$J = \left\{ \sum_{k=1}^{i-1} n_k + 1, \ldots, \sum_{k=1}^{i} n_k \right\}$$

– множество индексов строк и столбцов блока A_{ii} в A (через n_k, $k = 1, \ldots, N$, мы обозначаем порядок блока A_{kk}). Тогда по следствию 1 мы имеем

$$\lambda_1(A) - \lambda_n(A) \geqslant 2 \left\| A[J, \overline{J}] \right\|.$$

Поскольку

$$A[J, \overline{J}] = \left[A_{i1}, \ldots, A_{ii-1}, A_{ii+1}, \ldots, A_{iN}\right],$$

мы можем заключить, что

$$\lambda_1(A) - \lambda_n(A) \geqslant 2 \left\| \left[A_{i1}, \ldots, A_{ii-1}, A_{ii+1}, \ldots, A_{iN}\right] \right\|, \quad i = 1, \ldots, N,$$

что и доказывает (2.9). Из последнего неравенства также следует и (2.10), поскольку

$$\left\| \left[A_{i1}, \ldots, A_{ii-1}, A_{ii+1}, \ldots, A_{iN}\right] \right\|^2 = \left\| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} (A_{ij})^* A_{ij} \right\|$$
$$\geqslant \|A_{ij}\|^2, \quad j \neq i, \quad 1 \leqslant i,\ j \leqslant N.$$

□

Следующее следствие из теоремы 2 является непосредственным обобщением теоремы 1.

Следствие 3. *Если $n\times n$ $(n \geqslant 2)$ эрмитова матрица A перестановочно подобна матрице вида*

$$\begin{bmatrix} D_1 & G \\ G^* & D_2 \end{bmatrix},$$

где блоки D_1 и D_2 оба диагональны, т.е. матрица A является 2-циклической, то

$$\lambda_1(A) - \lambda_n(A) \geqslant \lambda_1(A - \operatorname{diag} A) - \lambda_n(A - \operatorname{diag} A). \tag{2.11}$$

Доказательство. Пусть

$$B = P^\intercal AP = \begin{bmatrix} D_1 & G \\ G^* & D_2 \end{bmatrix}. \tag{2.12}$$

Тогда мы имеем:

$$D_B = \operatorname{diag} B = P^\intercal \operatorname{diag} AP. \tag{2.13}$$

Используя (2.12) и (2.13) и применяя теорему 2, мы выводим неравенство (2.11) следующим образом:

$$\begin{aligned} \lambda_1(A) - \lambda_n(A) &= \lambda_1(B) - \lambda_n(B) \geqslant \lambda_1(B - D_B) - \lambda_n(B - D_B) \\ &= \lambda_1(P^\intercal AP - P^\intercal \operatorname{diag} AP) - \lambda_n(P^\intercal AP - P^\intercal \operatorname{diag} AP) \\ &= \lambda_1(A - \operatorname{diag} A) - \lambda_n(A - \operatorname{diag} A). \end{aligned}$$

□

Заметим, что результат следствия 3 тривиально переносится и на случай блочно 2-циклических эрмитовых матриц, когда матрицы D_1 и D_2 в (2.12) являются блочно диагональными.

Теорему 2, очевидно, можно интерпретировать следующим образом. Обозначим через $D(m, n-m)$, $1 \leqslant m < n$, множество всех эрмитовых $n\times n$ матриц вида

$$\begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix},$$

где D_1 и D_2 – матрицы порядков m и $n-m$ соответственно. Тогда теорема 2 означает, что равенство

$$\lambda_1(A) - \lambda_n(A) = \min_{D \in D(m,n-m)} \{\lambda_1(A + D) - \lambda_n(A + D)\}$$

справедливо тогда и только тогда, когда существует ненулевой вектор $z \in \mathbb{C}^n$, такой что

$$Az = \lambda_1(A)z \quad \text{и} \quad ASz = \lambda_n(A)Sz.$$

В такой формулировке теорема 2 может рассматриваться как аддитивный аналог приводимой ниже теоремы, которая описывает блочные 2×2 эрмитовы положительно определенные матрицы, оптимально обусловленные относительно невырожденных блочно диагональных преобразований подобия.

Теорема 3 [1]. *Пусть A – эрмитова положительно определенная $n\times n$ $(n \geqslant 2)$ матрица вида*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^* & A_{22} \end{bmatrix},$$

где блок A_{11} имеет порядок m, $1 \leqslant m < n$, и пусть $\Delta(m, n-m)$ – это группа всех невырожденных $n\times n$ матриц вида

$$\begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{bmatrix},$$

где Δ_1 – матрица порядка m. Тогда матрица A оптимально обусловна относительно $\Delta(m, n-m)$, т.е.

$$\frac{\lambda_1(A)}{\lambda_n(A)} = \min_{\Delta\in\Delta(m,n-m)} \left\{ \frac{\lambda_1(\Delta^* A\Delta)}{\lambda_n(\Delta^* A\Delta)} \right\} = \frac{1+\|A_{11}^{-1/2}A_{12}A_{22}^{-1/2}\|}{1-\|A_{11}^{-1/2}A_{12}A_{22}^{-1/2}\|}$$

в том и только том случае, когда существует ненулевой вектор $z \in \mathbb{C}^n$, такой что

$$Az = \lambda_1(A)z \quad \textit{и} \quad ASz = \lambda_n(A)Sz.$$

Основываясь на теореме 2 в новой формулировке и теореме 3, мы можем доказать следующий важный результат.

Теорема 4. *Пусть*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^* & A_{22} \end{bmatrix}$$

– эрмитова положительно определенная $n\times n$ $(n \geqslant 2)$ матрица и пусть блок A_{11} имеет порядок m, $1 \leqslant m < n$. Следующие утверждения равносильны:

(i) *Матрица A оптимально обусловлена относительно $\Delta(m, n-m)$, т.е.*

$$\frac{\lambda_1(A)}{\lambda_n(A)} = \min_{\Delta\in\Delta(m,n-m)} \left\{ \frac{\lambda_1(\Delta^* A\Delta)}{\lambda_n(\Delta^* A\Delta)} \right\} = \frac{1+\|A_{11}^{-1/2} A_{12} A_{22}^{-1/2}\|}{1-\|A_{11}^{-1/2} A_{12} A_{22}^{-1/2}\|}; \quad (2.14)$$

(ii) $\lambda_1(A) - \lambda_n(A)$

$$= \min_{D\in D(m,n-m)} \{\lambda_1(A+D) - \lambda_n(A+D)\} = 2\|A_{12}\|; \quad (2.15)$$

(iii) *существует ненулевой вектор $z \in \mathbb{C}^n$, такой что*

$$Az = \lambda_1(A)z \quad \textit{и} \quad ASz = \lambda_n(A)Sz;$$

(iv) *крайние собственные значения матрицы A удовлетворяют соотношениям*

$$\lambda_1(A) = \|A_{12}\| \frac{1 + \|A_{11}^{-1/2} A_{12} A_{22}^{-1/2}\|}{\|A_{11}^{-1/2} A_{12} A_{22}^{-1/2}\|}, \quad (2.16)$$

$$\lambda_n(A) = \|A_{12}\| \frac{1 - \|A_{11}^{-1/2} A_{12} A_{22}^{-1/2}\|}{\|A_{11}^{-1/2} A_{12} A_{22}^{-1/2}\|}. \quad (2.17)$$

Заметим, что соотношения (2.16) и (2.17) дают явные выражения для крайних собственных значений матрицы A через норму $\|A_{11}^{-1/2} A_{12} A_{22}^{-1/2}\|$ (которая инвариантна относительно преобразований подобия $A \to \Delta^* A\Delta$, $\Delta \in \Delta(m, n-m)$) и норму $\|A_{12}\|$ (инвариантную относительно аддитивных преобразований вида $A \to A + D$, $D \in D(m, n-m)$).

Доказательство теоремы 4. Равносильность утверждений (i) и (iii) следует из теоремы 3. Равносильность утверждений (ii) и (iii) вытекает из приведенной выше переформулировки теоремы 2. Наконец, как нетрудно убедиться, явные выражения (2.14) и (2.15) для отношения $\lambda_1(A)/\lambda_n(A)$ и разности $\lambda_1(A) - \lambda_n(A)$ равносильны формулам (2.16) и (2.17). □

Теорема 4 позволяет нам говорить, что эрмитовы положительно определенные матрицы, удовлетворяющие условиям (i)–(iii), имеют *оптимальные* (относительно рассматриваемого блочного 2×2 разбиения) *крайние собственные значения*, которые определяются по формулам (2.16) и (2.17).

В заключение данной статьи мы рассмотрим некоторые примеры блочных 2×2 эрмитовых положительно определенных матриц с оптимальными крайними собственными значениями.

Пример 1. В силу леммы 1, для произвольной матрицы вида

$$A=\begin{bmatrix}\alpha I_m & G\\ G^* & \alpha I_{n-m}\end{bmatrix},\quad \alpha>\|G\|,$$

мы имеем

$$\lambda_1(A)-\lambda_n(A)=2\|G\|,$$

так что по теореме 4 матрица A имеет оптимальные крайние собственные значения. Заметим, что тот факт, что A оптимально обусловлена относительно $\mathbf{\Delta}(m,n-m)$, хорошо известен (см., например, [3] или [1]).

Пример 2 [3]**.** Пусть

$$A=\begin{bmatrix}\alpha & 0 & \vdots & 0\\ 0 & 2 & \vdots & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 1 & \vdots & 2\end{bmatrix},\quad 1\leqslant\alpha\leqslant 3.$$

Как легко видеть,

$$\lambda_1(A)=3,\quad \lambda_2(A)=\alpha,\quad \lambda_3(A)=1.$$

Поскольку

$$\lambda_1(A)-\lambda_3(A)=2=2\left\|\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\|,$$

матрица A имеет оптимальные крайние собственные значения в силу теоремы 4.

Пример 3. Уравновешенные матрицы.

В соответствии с [2] эрмитова положительно определенная блочная 2×2 матрица

$$A=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{12}^* & A_{22}\end{bmatrix}$$

порядка n $(n\geqslant 2)$ называется *уравновешенной*, если

$$A_{ii}=A'_{ii},\quad i=1,2,$$

где мы используем обозначение

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} \\ A'_{21} & A'_{22} \end{bmatrix}.$$

Как было установлено в [2], любая уравновешенная матрица оптимально обусловлена относительно группы $\Delta(m, n-m)$, где m – порядок блока A_{11}. Следовательно, по теореме 4 матрица A имеет оптимальные крайние собственные значения.

Пример 4. Пусть

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ \overline{b} & c \end{bmatrix}, \quad ac > |b|^2,$$

– эрмитова положительно определенная 2×2 матрица. Тогда

$$\lambda_1(A) = \frac{a + c + \sqrt{(a-c)^2 + 4|b|^2}}{2}, \quad \lambda_2(A) = \frac{a + c - \sqrt{(a-c)^2 + 4|b|^2}}{2}.$$

С другой стороны, как показывает тривиальная проверка,

$$\|A_{12}\| \frac{1 \pm \|A_{11}^{-1/2} A_{12} A_{22}^{-1/2}\|}{\|A_{11}^{-1/2} A_{12} A_{22}^{-1/2}\|} = \sqrt{ac} \pm |b|.$$

Следовательно, матрица A имеет оптимальные собственные значения, определяемые формулами (2.16) и (2.17), тогда и только тогда, когда

$$\frac{a+c}{2} = \sqrt{ac} \quad \text{и} \quad \frac{\sqrt{(a-c)^2 + 4|b|^2}}{2} = |b|$$

или, что равносильно, когда

$$a = c.$$

Литература

1. Л. Ю. Колотилина, *Оптимально обусловленные блочные* 2×2 *матрицы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **268** (2000), 72–85.
2. Л. Ю. Колотилина, *Об одном классе оптимально обусловленных блочных* 2×2 *матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **284** (2002), 64–76.
3. S. C. Eisenstat, J. W. Lewis, M. H. Schultz, *Optimal block diagonal scaling of block 2-cyclic matrices.* — Linear Algebra Appl. **44** (1982), 181–186.
4. M. Marcus, H. Minc, *A Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities.* — Boston, Allyn and Bacon, Inc. (1964).

5. B. N. Parlett, *The spectral diameter as a function of the diagonal entries.* — Numer. Linear Algebra Appl., to appear.

Kolotilina L. Yu. On the extreme eigenvalues of block 2×2 Hermitian matrices.

The lower bound

$$\lambda_1(A) - \lambda_n(A) \geqslant 2\|A_{12}\|$$

for the difference of the extreme eigenvalues of an $n \times n$ Hermitian block 2×2 matrix $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^* & A_{22} \end{bmatrix}$ is established, and conditions necessary and sufficient for this bound to be attained at A are provided. Some corollaries of this result are derived. In particular, for a positive-definite matrix A, it is demonstrated that $\lambda_1(A) - \lambda_n(A) = 2\|A_{12}\|$ if and only if A is optimally conditioned, and explicit expressions for the extreme eigenvalues of such matrices are obtained.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 22 ноября 2002 г.