Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 291, 2002 г.

В. О. Тарасов

О РЕШЕНИЯХ БЕТЕВСКИХ УРАВНЕНИЙ В XXZ МОДЕЛИ

Недавно в работе [1] были получены некоторые тождества для решений бетевских уравнений в шестивершинной модели. В данной заметке приводится элементарное доказательство аналогичных тождеств в случае XXX или XXZ модели произвольного спина. Хотя соответствующие вычисления переносятся почти без изменений на эллиптический случай, получающиеся при этом тождества имеют достаточно трансцендентный вид. Даже в случае шестивершинной модели приводимое нами доказательство тождеств для решений бетевских уравнений проще оригинального доказательства в работе [1].

Подробное изложение метода анзатца Бете можно найти в монографии [2].

Используемые в заметке обозначения не совпадают с обозначениями в работах [1] и [2], однако читатель может без труда установить необходимые соответствия.

1. Рассмотрим неоднородную XXX модель на решетке из N узлов с квазипериодическими граничными условиями. Пусть $\ell_1, \ldots, \ell_N$ — спины представлений в узлах, $z_1, \ldots, z_N$ — параметры неоднородности, и e^μ — параметр квазипериодичности; периодическим граничным условиям отвечает $e^\mu = 1$. Мы будем предполагать, что $2\ell_i \in \mathbb{Z}_{>0}$ при всех $i = 1, \ldots, N$, другими словами, все представления в узлах решетки нетривиальны и конечномерны.

В k-частичном секторе: $S_z = \ell_1 + \ldots + \ell_N - k$, бетевские уравнения на быстроты $t_1, \ldots, t_k$ имеют вид

$$\prod_{i=1}^{N}(t_a - z_i + \ell_i)\prod_{\substack{b=1\\ b\neq a}}^{k}(t_a - t_b - 1) \;=\; e^\mu \prod_{i=1}^{N}(t_a - z_i - \ell_i)\prod_{\substack{b=1\\ b\neq a}}^{k}(t_a - t_b + 1)\,, \quad (1)$$

$a = 1, \ldots, k$. Мы не различаем решения данной системы, которые получаются друг из друга перестановками переменных $t_1, \ldots, t_k$.

Работа частично поддержана грантом РФФИ 02-01-00085а.

Будем говорить, что решение $t_1, \ldots, t_k$ *содержит* точку u, если $u \in \{t_1, \ldots, t_k\}$.

Решение $t_1, \ldots, t_k$ системы (1) назовем *допустимым*, если $t_a \neq t_b + 1$ при всех $a, b = 1, \ldots, k$. Следующая лемма описывает характеристические свойства допустимых решений.

Лемма 1.

а) *Пусть* $z_i + \ell_i \neq z_j - \ell_j$ *при всех* $i, j = 1, \ldots, N$. *Тогда всякое допустимое решение системы* (1) *не содержит точек* $z_1 \pm \ell_1, \ldots, z_N \pm \ell_N$.

б) *Если решение системы* (1) *не содержит ни одной из точек* $z_1 + \ell_1, \ldots, z_N + \ell_N$, *то оно допустимо.*

в) *Если решение системы* (1) *не содержит ни одной из точек* $z_1 - \ell_1, \ldots, z_N - \ell_N$, *то оно допустимо.*

Доказательство. Утверждения следуют из достаточно простого анализа системы (1). Начнем с пункта а). Пусть, например, $t_1 = z_1 + \ell_1$. Тогда из уравнения при $a = 1$ следует, что $t_1 = t_b + 1$ для некоторого b, поскольку по предположению $t_1 \neq z_i - \ell_i$ при всех $i = 1, \ldots, N$.

Доказательства пунктов б) и в) аналогичны. Рассмотрим пункт б) и для упрощения изложения ограничимся случаем $k = 3$. Пусть t_1, t_2, t_3 — недопустимое решение и, например, $t_2 = t_1 + 1$. Тогда из уравнения при $a = 2$ следует, что либо $t_2 = z_i + \ell_i$ для некоторого i, либо $t_3 = t_2 + 1$. В последнем случае из уравнения при $a = 3$ следует, что $t_3 = z_i + \ell_i$ для некоторого i. •

Замечание. В литературе бетевские уравнения обычно записывают в следующем виде:

$$\prod_{i=1}^{N} \frac{t_a - z_i + \ell_i}{t_a - z_i - \ell_i} = e^{\mu} \prod_{\substack{b=1 \\ b \neq a}}^{k} \frac{t_a - t_b + 1}{t_a - t_b - 1}\,, \qquad a = 1, \ldots, k\,, \qquad (2)$$

причем неявно предполагается, что рассматриваются только допустимые решения и $z_i + \ell_i \neq z_j - \ell_j$ при всех $i, j = 1, \ldots, N$. Из Леммы 1 следует, что при таких предположениях системы (1) и (2) эквивалентны.

Решение $t_1, \ldots, t_k$ бетевских уравнений называется *внедиагональным*, если $t_a \neq t_b$ при всех $a \neq b$. В работе [3] было показано,

что при общих $z_1,\dots,z_N$ и общем e^{μ} число различных допустимых внедиагональных решений системы (1) совпадает с размерностью подпространства векторов с заданным $S_z=\ell_1+\ldots+\ell_N-k$ в пространстве состояний XXX модели. Если $e^{\mu}=1$, то известно, что система (1) имеет допустимые внедиагональные решения только при $S_z\geqslant 0$, т.е. при $k\leqslant \ell_1+\ldots+\ell_N$, причем при общих $z_1,\dots,z_N$ их число совпадает с размерностью подпространства особых (старших) векторов с данным S_z.

Наибольший интерес при изучении решений системы (1) представляет случай однородной модели: $\ell_1=\ldots=\ell_N$, $z_1=\ldots=z_N$. Гипотетически, число допустимых внедиагональных решений в однородном случае не меняется по сравнению со случаем общих $z_1,\dots,z_N$.

Рассмотрим многочлен $P(u)=\prod\limits_{i=1}^{N}\prod\limits_{r=0}^{2\ell_i-1}(u-z_i-\ell_i+r)$ и функцию

$$F(\alpha;s_1,\dots,s_k)\;=\;\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\infty}\frac{e^{-\alpha u}P(u)}{\prod\limits_{a=1}^{k}(u-s_a)(u-s_a-1)}\,du\,, \qquad (3)$$

где интеграл берется по положительно ориентированному замкнутому контуру, содержащему внутри все точки $s_1,\dots,s_k$, s_1+1, $\dots,s_k+1$. Очевидно, что при фиксированных $s_1,\dots,s_k$ функция $F(\alpha;s_1,\dots,s_k)$ есть целая функция α.

Замечание. Многочлен $P(u)$ есть многочлен Дринфельда представления янгиана $Y(\mathfrak{gl}_2)$, соответствующего рассматриваемой XXX модели произвольного спина.

Предложение 2. *Пусть $t_1,\dots,t_k$ — допустимое решение бетевских уравнений* (1), *и $n\in\mathbb{Z}$. Тогда*

$$F(\mu+2\pi i n;t_1,\dots,t_k)\;=\;0\,. \qquad (4)$$

Доказательство. Обозначим через $f(u)$ подинтегральное выражение в формуле (3). Вычисляя интеграл (3) по вычетам, мы получим, что

$$F(\mu+2\pi i n;t_1,\dots,t_k)\;=\;\sum_{a=1}^{k}\bigl(\operatorname{Res} f(t_a)+\operatorname{Res} f(t_a+1)\bigr)\;=\;0\,,$$

так как в силу бетевских уравнений $\operatorname{Res} f(t_a) + \operatorname{Res} f(t_a+1) = 0$ для любого $a = 1, \ldots, k$.

В случае периодических граничных условий: $e^{\mu} = 1$, одно из равенств (4) принимает вид $F(0; t_1, \ldots, t_k) = 0$ и становится алгебраическим соотношением для переменных $t_1, \ldots, t_k$, $z_1, \ldots, z_N$:

$$\operatorname*{Res}_{u=\infty} \frac{P(u)}{\prod\limits_{a=1}^{k} (u-t_a)(u-t_a-1)} = 0 .$$

Например, при $k = \ell_1 + \ldots + \ell_N$, мы получаем, что

$$t_1 + \ldots + t_k = \ell_1 z_1 + \ldots + \ell_N z_N .$$

2. Рассмотрим неоднородную XXZ модель на решетке из N узлов с анизотропией γ и квазипериодическими граничными условиями. Положим $q = e^{i\gamma}$. Пусть $\ell_1, \ldots, \ell_N$ — спины представлений в узлах, $z_1, \ldots, z_N$ — параметры неоднородности, и $q^{2\mu}$ — параметр квазипериодичности; периодическим граничным условиям отвечает $q^{2\mu} = 1$. Мы предполагаем, что $q^2 \neq 1$, $z_i \neq 0$ и $2\ell_i \in \mathbb{Z}_{>0}$ при всех $i = 1, \ldots, N$.

В k-частичном секторе: $S_z = \ell_1 + \ldots + \ell_N - k$, бетевские уравнения на быстроты $t_1, \ldots, t_k$ имеют вид

$$\prod_{i=1}^{N} (q^{2\ell_i} t_a - z_i) \prod_{\substack{b=1 \\ b\neq a}}^{k} (t_a - q^2 t_b) = q^{2\mu} \prod_{i=1}^{N} (t_a - q^{2\ell_i} z_i) \prod_{\substack{b=1 \\ b\neq a}}^{k} (q^2 t_a - t_b) , \quad (5)$$

$a = 1, \ldots, k$. Решение $t_1, \ldots, t_k$ системы (5) назовем *допустимым*, если $t_a \neq 0$ и $t_a \neq q^2 t_b$ при всех $a, b = 1, \ldots, k$.

Лемма 3. *Пусть $q^{2\ell_i} z_i \neq q^{-2\ell_j} z_j$ при всех $i, j = 1, \ldots, N$. Тогда всякое допустимое решение системы (5) не содержит точек $q^{\pm 2\ell_1} z_1$, $\ldots, q^{\pm 2\ell_N} z_N$.*

Лемма 4. *Пусть $q^{2m} \neq 1$ при всех $m = 1, \ldots, k$.*

а) *Если решение системы (5) не содержит ни одной из точек $q^{2\ell_1} z_1, \ldots, q^{2\ell_N} z_N$, то оно допустимо.*

б) *Если решение системы (5) не содержит ни одной из точек $q^{-2\ell_1} z_1, \ldots, q^{-2\ell_N} z_N$, то оно допустимо.*

Утверждения доказываются аналогично Лемме 1.

Решение $t_1, \ldots, t_k$ бетевских уравнений называется *внедиагональным*, если $t_a \neq t_b$ при всех $a \neq b$. В работе [3] было показано, что при общих $z_1, \ldots, z_N$ и общем $q^{2\mu}$ число различных допустимых внедиагональных решений системы (5) совпадает с размерностью подпространства векторов с заданным $S_z = \ell_1 + \ldots + \ell_N - k$ в пространстве состояний XXZ модели. Гипотетически, число допустимых внедиагональных решений в однородном случае: $\ell_1 = \ldots = \ell_N$, $z_1 = \ldots = z_N$, не меняется по сравнению с общим случаем. В периодическом случае: $q^{2\mu} = 1$, число допустмых внедиагональных решений гипотетически не меняется по сравнению с общим случаем, если q не является корнем из единицы.

Рассмотрим многочлен $Q(u) = \prod\limits_{i=1}^{N} \prod\limits_{r=0}^{2\ell_i - 1} (u - q^{2(\ell_i - r)} z_i)$ и функцию

$$G(\alpha; s_1, \ldots, s_k) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{0,\infty} \frac{u^{-\alpha - S_z - 1} Q(u)}{\prod\limits_{a=1}^{k} (u - s_a)(u - q^2 s_a)} \, du \,, \qquad (6)$$

где $S_z = \ell_1 + \ldots + \ell_N - k$, а интеграл берется по положительно ориентированному замкнутому контуру содержащему внутри все точки $s_1, \ldots, s_k$, $q^2 s_1, \ldots, q^2 s_k$ и оставляющему снаружи точку 0; аргумент u обладает однозначной ветвью на таком контуре. Очевидно, что при фиксированных $s_1, \ldots, s_k$ и фиксированой ветви аргумента u функция $G(\alpha; s_1, \ldots, s_k)$ есть целая функция α.

Предложение 5. *Пусть $t_1, \ldots, t_k$ — допустимое решение бетевских уравнений (5), и $n \in \mathbb{Z}$. Тогда*

$$G(\mu + \pi n/\gamma; t_1, \ldots, t_k) = 0 \,. \qquad (7)$$

Утверждение доказывается аналогично Предложению 2.

Если $q^{2\mu} = q^{2(m - S_z)}$ для некоторого целого m, то одно из равенств (7) принимает вид $G(m; t_1, \ldots, t_k) = 0$ и становится алгебраическим соотношением для переменных $t_1, \ldots, t_k$, $z_1, \ldots, z_N$:

$$\left(\operatorname*{Res}_{u=0} + \operatorname*{Res}_{u=\infty} \right) \frac{u^{-m-1} Q(u)}{\prod\limits_{a=1}^{k} (u - t_a)(u - q^2 t_a)} = 0 \,. \qquad (8)$$

Например, при $S_z = 0$, $k = \ell_1 + \ldots + \ell_N$, мы получаем, что

$$\begin{aligned} t_1^2 \ldots t_k^2 &= z_1^{2\ell_1} \ldots z_N^{2\ell_N}\,, && \text{если } m = 0\,,\\ [2]_q(t_1 + \ldots + t_k) &= [2\ell_1]_q\, z_1 + \ldots + [2\ell_N]_q\, z_N\,, && \text{если } m = -1\,,\\ [2]_q(t_1^{-1} + \ldots + t_k^{-1}) &= [2\ell_1]_q\, z_1^{-1} + \ldots + [2\ell_N]_q\, z_N^{-1}\,, && \text{если } m = 1\,. \end{aligned}$$

Здесь $[r]_q = (q^r - q^{-r})/(q - q^{-1})$.

В случае однородной XXZ модели спина $1/2$ (шестивершинной модели) с четным числом узлов и периодическими граничными условиями: $\ell_1 = \ldots = \ell_N = 1/2$, $z_1 = \ldots = z_N = 1$, $q^{2\mu} = 1$, соотношения (8) совпадают с тождествами (sum rules) для решений бетевских уравнений, полученными в работе [1].

Литература

1. K. Fabricius, B. M. McCoy, *Qvaluation parameters and Bethe roots for the six vertex model at roots of unity.* — Preprint YITPSB–01–42 (2001), 1–24.
2. Н. М. Боголюбов, А. Г. Изергин, В. Е. Корепин, *Корреляционные функции интегрируемых систем и квантовый метод обратной задачи*— (под ред. Л. Д. Фаддеева), М., Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1992, 240 с.
V. E. Korepin, N. M. Bogolyubov, A. G. Izergin, *Quantum inverse scattering method and correlation functions*, — Cambridge University Press, 1993, 556 п.
3. V. Tarasov, A. Varchenko, *Completeness of Bethe vectors and difference equations with regular singular points.* — Int. Math. Res. Notices No. 13 (1996), 637–669.

Tarasov V. O. On solutions of Bethe equations for the XXZ model.

It is shown that solutions of the Bethe ansatz equations for the inhomogeneous arbitrary spin XXX or XXZ model satisfy certain identites which generalize those, recently obtained by K. Fabricius and B. M. McCoy, for solutions of the Bethe ansatz equations for the six-vertex model. Even in the last case, the given proof is simpler than the original one.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: vt@pdmi.ras.ru

Поступило 7 октября 2002