Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 282, 2001 г.

Е. Г. Зельдина

ЯДРА БЕРГМАНА ПОЧТИ СФЕРИЧЕСКИХ ОБЛАСТЕЙ С ГРАНИЦЕЙ КЛАССА H^σ

Ядра Бергмана в областях в $\mathbb{C}^n$ изучаются давно, и на эту тему написано много работ. Во всех работах, начиная с работ Керзмана [10], Феффермана [7], Буте де Монвеля и Шёстранда [5], написанных в начале семидесятых, и вплоть до конца девяностых, все результаты о поведении ядер Бергмана вблизи границы предполагали C^∞-гладкость границы. Соответствующие результаты представлены, например, в работах [2–4, 6, 8, 9, 11–13, 15].

Для ядра Бергмана B_Ω ограниченной псевдовыпуклой области $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$, с C^∞-гладкой границей в предположении, что $\mathbf{0} = (0, \dots, 0) \in \partial\Omega$ и внешняя нормаль к $\partial\Omega$ в точке $\mathbf{0}$ направлена по положительной полуоси $(x_1, 0 \dots, 0)$, асимптотическое разложение для $\mathbf{z}_\delta = (-\delta, 0, \dots, 0)$, $\delta > 0$ выглядит так [5]:

$$B_\Omega(\mathbf{z}_\delta, \mathbf{z}_\delta) = \frac{c_{n1}(\Omega)}{\delta^{n+1}} + \sum_{k=n}^{1} \frac{c_{n,n-k}(\Omega)}{\delta^k} + \tilde{c} \log \frac{1}{\delta} + O(1). \tag{1}$$

Если опустить условие строгой псевдовыпуклости, оставив лишь условие C^∞-гладкости границы, то при тех же геометрических условиях на расположение Ω в $\mathbb{C}^n$ изменяется даже первый член асимптотики (1) (или оценки для $B_\Omega(\mathbf{z}_\delta, \mathbf{z}_\delta)$ [4, 13]). С другой стороны, для строго псевдовыпуклых областей, близких к шару, с границей класса C^6, как выяснено в [1] и [14], имеет место асимптотическое разложение $B_\Omega(\mathbf{z}_\delta, \mathbf{z}_\delta)$ вида

$$B_\Omega(\mathbf{z}_\delta, \mathbf{z}_\delta) = \frac{c_{n1}(\Omega)}{\delta^{n+1}} + \frac{c_{n2}(\Omega)}{\delta^n} + O\left(\frac{1}{\delta^{n-1}}\right), \tag{2}$$

которое согласуется с (1) как в виде двух первых слагаемых, так и в порядке роста остатка.

Работа частично поддержана грантом “Научные школы” No. 00-15-96-022.

Оказывается, однако, что ослабление требования на гладкость границы $\partial\Omega$ до H^σ, $4 < \sigma < 6$, для строго псевдовыпуклой области может кардинально изменить привычный вид асимптотики $B_\Omega(\mathbf{z}_\delta, \mathbf{z}_\delta)$ (1) (даже в частном случае (2)). Именно, для некоторых областей Ω, близких к шару, после первых двух слагаемых в (2) в асимптотике для $B_\Omega(\mathbf{z}_\delta, \mathbf{z}_\delta)$ будет стоять произвольное количество слагаемых степенного роста вида $\frac{c}{\delta^\varkappa}$, а остаток тем не менее будет совпадать по росту с остатком в (2). Впервые это было отмечено в [14] для областей с границей класса H^5, при этом там строились области с добавлением в $B_\Omega(\mathbf{z}_\delta, \mathbf{z}_\delta)$ одного нового по сравнению с (2) слагаемого.

Перейдем к обозначениям.

Мы рассматриваем случай $n \geqslant 3$. Рассмотрим $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ и обозначим $\mathbf{z}' = (z_2, \ldots, z_n)$. Пусть $|\mathbf{z}|$ и $|\mathbf{z}'|$ – стандартные нормы в пространствах $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}^{n-1}$ соответственно. Далее, через α' и β' обозначим мультииндексы $\alpha' = (\alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\beta' = (\beta_2, \ldots, \beta_n)$, и $|\alpha'| = |\alpha_2| + \cdots + |\alpha_n|$, $|\beta'| = |\beta_2| + \cdots + |\beta_n|$. Для краткости положим $\mathbf{z}'^{\alpha'} := z_2^{\alpha_2} \ldots z_n^{\alpha_n}$, $\overline{\mathbf{z}}'^{\beta'} := \overline{z}_2^{\beta_2} \ldots \overline{z}_n^{\beta_n}$. Обозначим через $B_\Omega(\mathbf{z}, \boldsymbol{\xi})$ ядро Бергмана области $\Omega \subset \mathbb{C}^n$.

Теперь мы можем сформулировать основную теорему данной статьи.

Теорема. *Пусть $n \geqslant 3$, $\nu \in \mathbb{R}$, $4 < \sigma = \sigma_1 < \sigma_2 < \ldots < \sigma_N$, $A = \{A_{\alpha'\beta'}\}$ – набор коэффициентов, соответствующий различным парам мультииндексов α', β', $|\alpha'| = |\beta'| = 2$, $A_{\alpha'\alpha'} \in \mathbb{R}$ и*

$$\sum_{\alpha',\beta'} |A_{\alpha'\beta'}| + |a_1| + \cdots + |a_N| \leqslant 1, \tag{3}$$

где a_k, $k = 1, \ldots, N$, – некоторые вещественные числа.

Пусть $\Omega(A, a, \nu) \subset \mathbb{C}^n$ – следующая область:

$$\begin{aligned} \Omega(A, a, \nu) = \Bigg\{ & \mathbf{z} = (z_1, \mathbf{z}') : |z_1| < 1, |\mathbf{z}'| < 2, \\ & |\mathbf{z}|^2 + \nu \left(\operatorname{Re} \left(\sum_{\alpha',\beta'} A_{\alpha'\beta'} \mathbf{z}'^{\alpha'} \overline{\mathbf{z}}'^{\beta'} \right) + a|\mathbf{z}'|^5 \right) < 1|\mathbf{z}|^2 + \\ & + \nu \left(\operatorname{Re} \sum_{\alpha',\beta'} A_{\alpha'\beta'} \mathbf{z}'^{\alpha'} \overline{\mathbf{z}}'^{\beta'} + \sum_{k=1}^{N} a_k |\mathbf{z}'|^{\sigma_k} \right) < 1 \Bigg\}. \end{aligned} \tag{4}$$

Тогда существует $\nu_2 = \nu_2(n) > 0$, такое что при $|\nu| \leqslant \nu_2$ для ядра Бергмана $B_\Omega(\mathbf{z}, \boldsymbol{\xi})$ при $\mathbf{z}_r = \boldsymbol{\xi}_r = (r, 0, \ldots, 0)$, $0 < r < 1$, справедливо соотношение

$$B_\Omega(\mathbf{z}_r,\mathbf{z}_r)=\frac{c_{n0}(\Omega)}{(1-r^2)^{n+1}}+\sum_{\alpha'}c_n(\alpha')\nu A_{\alpha'\alpha'}\frac{1}{(1-r^2)^n}+$$
$$+\sum_{k=1}^{N}\frac{\widetilde{c}_n(\sigma_k)\nu a_k}{(1-r^2)^{n-3+\frac{\sigma_k}{2}}}+O\left(\frac{\nu}{(1-r^2)^{n-1}}\right), \tag{5}$$

причем коэффициенты c_{n0}, $c_n(\alpha')$ совпадают с соответствующими коэффициентами в формулировке (1.8) *теоремы* 2, [1], *а* $\widetilde{c}_n(\sigma_k)\neq 0$.

Таким образом, конечная гладкость границы $\Gamma=\partial\Omega$ может существенно изменить асимптотику ядра Бергмана вблизи границы.

Доказательство теоремы требует применения всего подхода, вместе с необходимыми модификациями, который был изложен для случая областей с C^6-гладкими границами в [1] и [14]. Это может быть проделано, поэтому мы ограничимся перечнем лемм, обозначающих этапы доказательства, с теми изменениями, которые приходится сделать в их формулировке в новой ситуации. Соответствующие доказательства аналогичны, но не тождественны предшествующим. Конечно, мы изложим подробно пункт, относящийся непосредственно к вычислению асимптотики, в котором и появится формула (5).

Лемма 1 (каноническое биголоморфное отображение F_r, (3.1), [1]). *Пусть* $0<r<1$,

$$\boldsymbol{\omega}=F_r(\mathbf{z}):\quad \omega_1=\frac{z_1-r}{1-rz_1},\quad \omega_k=\frac{\sqrt{1-r^2}}{1-rz_1}z_k,\quad 2\leqslant k<n,$$
$$\widetilde{\Omega}_r(A,a,\nu):=F_r(\Omega(A,a,\nu)),$$

где область $\Omega(A,a,\nu)$ *определена в* (4). *Тогда существует такое* $\nu_0=\nu_0(n)>0$, *что при* $\nu\leqslant\nu_0$ *имеем соотношение*

$$\widetilde{\Omega}_r(A,a,\nu)=\Bigg\{\boldsymbol{\omega},|\omega_1|<1,|\boldsymbol{\omega}'|<2,$$
$$\nu\operatorname{Re}\sum_{\alpha',\beta'}A_{\alpha'\beta'}\frac{(1-r^2)\boldsymbol{\omega}'^{\alpha'}\overline{\boldsymbol{\omega}}'^{\beta'}}{1+r\overline{\omega}_1}+\nu\sum_{k=1}^{N}a_k\frac{(1-r^2)^{\frac{\sigma_k}{2}-1}}{|1+r\omega_1|^{\sigma_k-2}}|\boldsymbol{\omega}|^2+ \tag{6}$$
$$+\nu\operatorname{Re}\sum_{\alpha',\beta'}A_{\alpha'\beta'}\frac{(1-r^2)\boldsymbol{\omega}'^{\alpha'}\overline{\boldsymbol{\omega}}'^{\beta'}}{|1+r\omega_1|^2}+\nu\sum_{k=1}^{N}a_k\frac{(1-r^2)^{\frac{\sigma_k}{2}-1}}{|1+r\omega_1|^{\sigma_k-2}}<1\Bigg\}.$$

Элементарное доказательство соотношения (6) совершенно аналогично рассуждениям (3.2)–(3.9), [1].

Поскольку между величинами $B_{\Omega(A,a,\nu)}(\mathbf{z}_r,\mathbf{z}_r)$ и $B_{\widetilde{\Omega}_r(A,a,\nu)}(\mathbf{0},\mathbf{0})$ имеется соотношение

$$B_{\Omega(A,a,\nu)}(\mathbf{z}_r,\mathbf{z}_r)=\frac{1}{(1-r^2)^{n+1}}B_{\widetilde{\Omega}_r(A,a,\nu)}(\mathbf{0},\mathbf{0}),$$

далее, как и в [1], мы будем заниматься асимптотикой величины $B_{\widetilde{\Omega}_r(A,a,\nu)}(\mathbf{0},\mathbf{0})$.

Далее постоянные $\nu_0(n)$, упоминаемые в формулировках, в разных утверждениях могут иметь разные значения.

Лемма 2. *Пусть $\Gamma_r(A,a,\nu)=\partial\widetilde{\Omega}_r(A,a,\nu)$. Существует $\nu_0=\nu_0(n)$, такое что при $|\nu|\leqslant\nu_0$ и для всех $\boldsymbol{\omega}_0\in S$ существует единственное $R(\boldsymbol{\omega}_0,\overline{\boldsymbol{\omega}}_0,A,a,\nu,r)>0$, такое что*

$$R(\boldsymbol{\omega}_0,\overline{\boldsymbol{\omega}}_0,A,a,\nu,r)\boldsymbol{\omega}_0\in\Gamma_r(A,a,\nu),$$

функция R C^1-гладко зависит от своих аргументов и голоморфно зависит от переменных ν,

$$\lambda_j=\frac{(1-r^2)\boldsymbol{\omega}_0'^{\,\alpha'}\overline{\boldsymbol{\omega}}_0'^{\,\beta'}}{|1+r\omega_{01}|^2},\quad 1\leqslant j\leqslant L,$$

$$\mu_1=\frac{r\omega_{01}}{1+r\omega_{01}},\quad \mu_2=\frac{r\overline{\omega}_{01}}{1+r\overline{\omega}_{01}},$$

$$\Lambda_k=\frac{(1-r^2)^{\frac{\sigma_k}{2}-1}|\boldsymbol{\omega}_0'|^{\sigma_k}}{|1+r\omega_{01}|^{\sigma_k-2}},\quad 1\leqslant k\leqslant N.$$

В некоторой окрестности начала координат $\{\nu=0,\lambda_j=0,\mu_k=0,\Lambda_k=0\}$ для функции R справедливы все утверждения лемм 10, 11 и соотношений (7.11)–(7.16) из [1].

Новым по сравнению с [1] является лишь наличие новых переменных Λ_k. Функция $R=R(\boldsymbol{\omega}_0,\overline{\boldsymbol{\omega}}_0,A,a,\nu,r)$, аналогично [1], является решением уравнения

$$R^2+\nu R^4\operatorname{Re}\sum_{\alpha',\beta'}A_{\alpha'\beta'}\frac{(1-r^2)\boldsymbol{\omega}_0'^{\,\alpha'}\overline{\boldsymbol{\omega}}_0'^{\,\beta'}}{|1+Rr\omega_{01}|^2}+\sum_{k=1}^{N}\nu aR^{\sigma_k}\frac{(1-r^2)^{\frac{\sigma_k}{2}-1}|\boldsymbol{\omega}_0'|_k^{\sigma}}{|1+Rr\omega_{01}|^{\sigma_k-2}}=1.$$

Детальное изучение этой функции позволяет использовать тождества, аналогичные (1.30) из [1], и оценки коэффициентов, аналогичные (1.35) из [1]. Эти свойства, а также другие свойства

функции R, используются в наиболее важной части доказательства – в части, где мы получаем вариационную формулу [16] для $B_{\widetilde{\Omega}_r(A,a,\nu)}(\mathbf{0},\mathbf{0})$ (см. лемма 3 ниже) и упрощаем ее (см. лемма 4 ниже). Это производится в соответствии с методом работ [1] и [14].

Лемма 3. *Существует такое $\nu_0 = \nu_0(n) > 0$, что при $|\nu| \leqslant \nu_0$ справедливо соотношение*

$$B_{\widetilde{\Omega}_r(A,a,\nu)}(\mathbf{0},\mathbf{0}) = B_U(\mathbf{0},\mathbf{0}) - \\ - \int\limits_0^1 dt \int\limits_{\Gamma_{(t)}} |B_{(t)}(\mathbf{0},\mathbf{s})|^2 \varphi_t^*(\mathbf{s}) d\nu_t(\mathbf{s}) = B_U(\mathbf{0},\mathbf{0}) - I(r,\nu), \quad (7)$$

где

$$\Gamma_{(t)} = \Gamma_t(A,a,\nu t),\ B_{(t)} = B_{\widetilde{\Omega}_r(A,a,\nu t)},\ \varphi_t^*(\boldsymbol{\omega}) = \frac{\partial R^*(\boldsymbol{\omega}_0,t)}{\partial t}\cos\theta(\boldsymbol{\omega}), \quad (8)$$

$\boldsymbol{\omega} \in \Gamma_{(t)}$, $d\nu_t(\mathbf{s})$ – *элемент $(2n-1)$-мерной поверхностной меры на $\Gamma_{(t)}$. В свою очередь, в (8) функция $R^*(\boldsymbol{\omega}_0,t)$ при $\boldsymbol{\omega}_0 \in \Gamma_{(t)}$ определяется из соотношения $R^*(\boldsymbol{\omega}_0,t)\boldsymbol{\omega}_0 \in \Gamma_{(t)}$, $\theta(\boldsymbol{\omega})$ определяется как угол между внешней нормалью к $\Gamma_{(t)}$ в точке $\boldsymbol{\omega}$ и радиус-вектором $[\mathbf{0},\boldsymbol{\omega}]$.*

Доказательство леммы 3 требует реализации значительной части подхода, изложенного [1, 14]. Оказывается, что наличие дополнительных слагаемых (Λ_k в терминах леммы 2) это позволяет. Аналогично обстоит дело и с упрощением формулы (7) (в [1] этому посвещены пункты 7, 8, и (9.1)–(9.17) в пункте 9) Сформулируем лишь окончательный результат этих упрощений.

Лемма 4. *Пусть $\varkappa_n = B_U(\mathbf{0},\mathbf{0})$, $I_{r,\nu}$ определено в (7). Тогда существует такое $\nu_0 = \nu_0(n) > 0$, что при $|\nu| \leqslant \nu_0$ справедливо соотношение*

$$\left| I(r,\nu) - \int\limits_0^1 dt \int\limits_S \varkappa_n^2 (-\frac{\nu}{2} U_0(\boldsymbol{\omega}_0,\overline{\boldsymbol{\omega}}_0)) ds(\boldsymbol{\omega}_0) \right| \leqslant c_n \nu^2 (1-r^2)^2, \quad (9)$$

где c_n – некоторая постоянная, зависящая только от n,

$$U_0(\boldsymbol{\omega}_0,\overline{\boldsymbol{\omega}}_0) = \sum_{\alpha',\beta'} \mathrm{Re}\left(A_{\alpha'\beta'} \frac{(1-r^2)\boldsymbol{\omega}'^{\alpha'}\overline{\boldsymbol{\omega}}'^{\beta'}}{|1+r\omega_{01}|^2} \right) +$$

$$+\sum_{k=1}^{N} a_k \frac{(1-r^2)^{\frac{\sigma_k}{2}-1}|\boldsymbol{\omega}_0'|_k^{\sigma}}{|1+r\omega_{01}|^{\sigma_k-2}}. \tag{10}$$

Теперь соотношения (7), (9), (10) и уже проделанные вычисления (9.18), (9.19) и далее в [1] показывают, что для завершения доказательства теоремы достаточно проверить следующую лемму. В этой лемме мы используем новые слагаемые в (10). Эти слагаемые появляются из-за того, что в формуле для $\Omega(A,a,\nu)$ мы имеем дополнительные слагаемые вида $\nu a_k|\mathbf{z}'|^{\sigma_k}$, имеющие гладкость H^{σ}. А соответствующие слагаемые в (10) и приводят к возникновению новых слагаемых в асимптотике $B_{\widetilde{\Omega}_r(A,a,\nu)}(\mathbf{0},\mathbf{0})$.

Лемма 5. *Пусть $n \geqslant 3$, $4 < \sigma < 6$. Тогда*

$$J(r) = \int\limits_S \frac{|\boldsymbol{\omega}_0'|^{\sigma}}{|1+r\omega_{01}|^{\sigma-2}} ds$$

$$= (n-1)\operatorname{mes}_{2n-1} S\left(\frac{1}{n-1+\frac{\sigma}{2}} + \frac{\Gamma(n-1+\frac{\sigma}{2})}{\Gamma^2(\frac{\sigma}{2}-1)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Gamma^2(m-1+\frac{\sigma}{2})}{m!\Gamma(m+n+\frac{\sigma}{2})}\right)$$

$$+O(1-r^2). \tag{11}$$

Доказательство. Пусть $\delta = \frac{\sigma-2}{2}$, тогда

$$\frac{1}{(1+\zeta)^{\delta}} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\Gamma(\delta+m)}{m!\Gamma(\delta)} \zeta^m.$$

Обозначим $c_m = \frac{\Gamma(m+\delta)}{m!\Gamma(\delta)}$, $m \geqslant 1$, тогда

$$J(r) = \int\limits_S |\boldsymbol{\omega}_0'|^{\sigma} ds + \sum_{m=1}^{\infty} c_m^2 r^{2m} \int\limits_S |\omega_{01}|^{2m} |\boldsymbol{\omega}'|^{\sigma} ds$$

$$= \frac{(n-1)\operatorname{mes}_{2n-1} S}{\pi}\Bigg(\int\limits_{|\omega_{01}|<1} (1-|\omega_{01}|^2)^{n-2+\frac{\sigma}{2}} dm_2(\omega_{01}) \sum_{m=1}^{\infty} c_m^2 r^{2m} \times$$

$$\int\limits_{|\omega_{01}|<1} |\omega_{01}|^{2m} (1-|\omega_{01}|^2)^{n-2+\frac{\sigma}{2}} dm_2(\omega_{01}) \int\limits_{|\omega_{01}|<1} (1-|\omega_{01}|^2)^{n-2+\frac{\sigma}{2}} dm_2(\omega_{01}) +$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} c_m^2 r^{2m} \int\limits_{|\omega_{01}|<1} |\omega_{01}|^{2m}(1-|\omega_{01}|^2)^{n-2+\frac{\sigma}{2}} dm_2(\omega_{01})\Bigg) =$$

$$(n-1)\operatorname{mes}_{2n-1} S\Bigg(\int_0^1 (1-x)^{n-2+\frac{\sigma}{2}} dx + \sum_{m=1}^{\infty} c_m^2 r^{2m} \int_0^1 x^m (1-x)^{n-2\frac{\sigma}{2}} dx\Bigg) =$$

$$(n-1)\operatorname{mes}_{2n-1} S\left(\frac{1}{n-1\frac{\sigma}{2}} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Gamma^2(\delta+m)}{(m!)^2\Gamma^2(\delta)} r^{2m} \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(n-1+\frac{\sigma}{2})}{\Gamma(n+m+\frac{\sigma}{2})}\right) =$$

$$(n-1)\operatorname{mes}_{2n-1} S\left(\frac{1}{n-1\frac{\sigma}{2}} + \frac{\Gamma(n-1+\frac{\sigma}{2})}{\Gamma^2(\frac{\sigma}{2}-1)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Gamma(m+1)\Gamma^2(m-1+\frac{\sigma}{2})}{(m!)^2\Gamma(m+n+\frac{\sigma}{2})}\right)$$

$$+(n-1)\operatorname{mes}_{2n-1} S \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Gamma(m+1)\Gamma^2(m-1+\frac{\sigma}{2})}{(m!)^2\Gamma(m+n+\frac{\sigma}{2})}(r^{2m}-1). \qquad (12)$$

Так как $c_m \asymp m^{\delta-2} = m^{\frac{\sigma}{2}-2}$,

$$\frac{\Gamma(m+1)\Gamma(n-1+\frac{\sigma}{2})}{\Gamma(n+m+\frac{\sigma}{2})} \asymp \frac{1}{m^{n-1+\frac{\sigma}{2}}},$$

то ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} 2mc_m^2\Gamma(m+1)\Gamma\left(n-1+\frac{\sigma}{2}\right)\Gamma\left(n+m+\frac{\sigma}{2}\right) \asymp$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^{\sigma-3}}{m^{n-1+\frac{\sigma}{2}}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{n+2-\frac{\sigma}{2}}}$$

сходится при $4 < \sigma < 6$, $n \geqslant 3$ и тогда (12) влечет утверждение леммы 5.

Лемма 5, а значит и теорема, доказаны.

Литература

1. E. Anissova (Zeldina), N. Shirokov, *Bergman kernels for C^6-smooth almost spherical domains.* — Dept. of Math. Chalmers/Göteborg University preprint series, Preprint 2000:29.
2. M. Beals, C. Fefferman, R. Grossman, *Strictly pseudoconvex domains in $\mathbb{C}^n$.* — Bull. Am. Math. Soc. (N.S.) **8** no. 2 (1983), 125–322.
3. H. P. Boas, E. J. Straube, Ji Ye Yu, *Boundary limits of the Bergman kernel and metric.* — Michigan Math. J. **42** no. 3 (1995), 449–461.

4. A. Bonami, S. Grellier, *Weighted Bergman projections in domains of finite type in* $\mathbb{C}^2$. Harmonic Analysis and Operator Theory. vol. 189, Am. Math. Soc., Contemp. Math., 1995, pp. 65–80.
5. L. Boutet de Monvel, J. Sjöstrand, *Sur la singularité des noyaux de Bergman et de Szegö*. — Société Mathematique de France, Astérisque **34–35** (1976), 123–164.
6. S. Cho, *Estimates of the Bergman kernel function on certain pseudoconvex domains in* $\mathbb{C}^n$. — Math. Z. **222** no. 2 (1996), 329–339.
7. C. Fefferman, *The Bergman kernel and biholomorphic mapping of pseudoconvex domains*. — Invent. Math. **26** (1974), 1– 65.
8. C. Fefferman, *The Bergman kernel in quantum mechanics*. Analysis and Geometry in Several Complex Variables (Katata 1997). Trends Math., Birkhäuser: Boston, MA, 1999, pp. 39–58.
9. K. Hitachi, G. Komatsu, *Invariant theory of the Bergman kernel*. Adv. Stud. Pure Math.. vol. 25, Math. Soc. Japan, Tokio, 1997, pp. 167–220.
10. N. Kezman, *The Bergman kernel function. Differentiability at the boundary*. — Math. Ann. **195** (1972), 149–158.
11. J. Kamimoto, *Asymptotic expansion of the Bergman kernel for weakly pseudoconvex tube domains in* $\mathbb{C}^n$. — Ann. Fac. Toulouse Math. **(6)7** no. 1 (1998), 51–85.
12. J. McNeal, *Boundary behavior of the Bergman kernel function in* $\mathbb{C}^2$. — Duke Math. J. **58** (1989), 499–512.
13. A. Nagel, J. P. Rosay, E. M. Stein, S. Wainger, *Estimates for the Bergman and Szegö kernels in* $\mathbb{C}^2$. — Ann. Math. **129** (1989), 113–149.
14. N. Shirokov, E. Zeldina (Anissova), *Bergman kernels for* C^6 *and* H^5*-smooth almost spherical domains*. — Dept. of Math. Chalmers/Göteborg University preprint series, Preprint 2001:3.
15. A. D. Thomas, *Uniform extendability of the Bergman kernel*. — Illinois J. Math. **39** no. 4 (1995), 598–607.
16. Н. А. Широков, *Вариационная формула для ядер Бергмана*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **255** (1998), 221–243.

Zeldina E. G. Bergman kernels for almost spherical domains with H^σ-smooth boundaries.

This paper is devoted to the behavior of the Bergman kernels for almost spherical strictly pseudoconvex domains in $\mathbb{C}^n$. We find first several terms of the asymptotics for the Bergman kernel of strictly pseudoconvex domain with H^σ-smooth boundary, $4 < \sigma < 6$. New terms in comparison with the case of C^6-smooth boundary appear but the growth rate of the remainder remains the same.

С.-Петербургский государственный университет
email lizzka@mail.ru

Поступило 9 апреля 2001 г.