Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 275, 2001 г.

Н. Я. Кирпичникова, Л. А. Свиркина, В. Б. Филиппов

РАССЕЯНИЕ ПЛОСКИХ УПРУГИХ ВОЛН ОТ МАЛОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ, ПОМЕЩЕННОЙ В УПРУГИЙ СЛОЙ

В работе [1] была рассмотрена задача дифракции плоской волны от неоднородного включения, имеющего вид кругового цилиндра, радиус которого равен $a \ll \lambda$, где λ – длина падающей волны. Исследована задача рассеяния волн вертикальной и горизонтальной поляризаций от поверхности этого упругого включения. Рассеянное неоднородностью горизонтально поляризованное поле при $kr \gg 1$ ведет себя как точечный источник. Интенсивность этого рассеяния пропорциональна площади поперечного сечения неоднородности, скачку плотностей ρ_1, ρ_2 и скачку параметров Ляме μ_1, μ_2 среды и включения.

В случае вертикально поляризованного падающего поля неоднородность будет излучать как цилиндрическая волна, рассеивающаяся от цилиндра с продольной и поперечной скоростями. Интенсивность этого точечного источника пропорциональна скачку параметров Ляме λ, μ, скачку плотностей среды и неоднородности, и площади неоднородности. Аналогия с электромагнитным рассеянием на неоднородности [2, 3] просматривается полностью в случае горизонтальной поляризации (SH-волна) с некоторыми нюансами. Картина рассеяния вертикально поляризованной плоской падающей волны сложнее, так как задача векторная и компоненты вектора смещений представлены посредством скалярного и векторного потенциалов.

В настоящей работе предполагается, что неоднородное включение в виде кругового цилиндра малого радиуса a, помещено в слой.

Рассматривается задача дифракции упругой плоской сдвиговой волны горизонтальной поляризации от упругого цилиндра Ω_2 с параметрами λ_2, μ_2, ρ_2. Этот цилиндр расположен внутри

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 98-01-00316).

упругого слоя Ω_1. Волна падает из упругого полупространства Ω_0 с параметрами λ_0, μ_0, ρ_0 на упругий слой с параметрами λ_1, μ_1, ρ_1.

Плоскость падения заданной волны перпендикулярна оси цилиндра. В этом случае общая задача переходит в частную плоскую задачу дифракции от малой неоднородности Ω_2, помещенной в слой Ω_1. Малой неоднородностью Ω_2 является круговой цилиндр радиуса a, $a \ll \lambda$, где λ – длина падающей волны. Толщина слоя имеет порядок длины волны.

Наша *задача состоит в исследовании рассеяния плоской упругой волны горизонтальной поляризации от упругого включения, помещенного в слой, лежащий на свободной от напряжения границе. Падающая плоская волна поляризована параллельно оси цилиндра.*

§1. Постановка задачи дифракции от малой неоднородности в слое

Пусть на поверхность раздела Γ_{01} между упругим полупространством Ω_0 и слоем Ω_1 толщины $h + h_1$, падает из верхней среды Ω_0 упругая плоская волна (рис. 1). Внутри упругого слоя Ω_1 помещена малая неоднородность Ω_2: круговой цилиндр радиуса a. Слой лежит на свободном от напряжений упругом полупространстве.

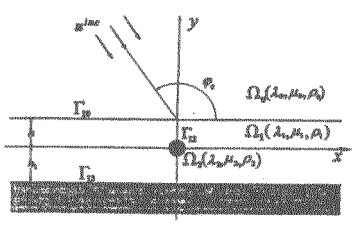

Рис. 1.

Выберем прямоугольную систему координат таким образом, чтобы плоскость xz совпадала с границей раздела сред, а плоскость xy с плоскостью падения волны. Иначе, в качестве верхней поверхности слоя Γ_{01} выберем плоскость $y = h > 0$. Нижняя граница Γ_{13}, $y = -h_1$ находится на глубине $h + h_1$ от верхней Γ_{01}.

Начало координат находится внутри слоя. С центром в начале координат поместим в слой круговой цилиндр Ω_2, образующая которого параллельна оси z. Поверхность этого включения обозначим через Γ_{12}. Радиус цилиндра a мал по сравнению с длиной волны, т.е. $ka \ll 1$. Толщина слоя имеет порядок длины волны: $k(h+h_1) \sim O(1)$.

Динамические уравнения теории упругости однородной изотропной среды для вектора смещений $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ с гармонической зависимостью от времени переходят в следующие:

$$L\mathbf{u} = -\rho\omega^2\mathbf{u}. \tag{1.1}$$

Для вектора смещений $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, удовлетворяющего уравнению (1.1), ставится следующая задача.

Пусть из упругого полупространства $\Omega_0 : y > h$ на упругий слой $\Omega_1 : -h_1 \leqslant y \leqslant h$ падает плоская волна. Плоская упругая волна вполне определена вектором смещения частиц $\mathbf{u}$, все компоненты которого должны быть непрерывны при переходе границы раздела сред. Кроме того, на границе должны быть непрерывны компоненты тензора напряжений. Таких границ две $\Gamma_{01} : y = h$ и $\Gamma_{12} : r = a$. Нижняя граница $\Gamma_{13} : y = -h_1$ должна быть свободна от напряжений. Отраженная от слоя волна должна удовлетворять условиям излучения. Сформулируем эти условия:

$$[\mathbf{u}]|_{y=h} = 0, \quad [\sigma_{yx}]\Big|_{y=h} = 0, \quad [\sigma_{yy}]\Big|_{y=h} = 0, \quad [\sigma_{yz}]\Big|_{y=h} = 0, \tag{1.2}$$

$$[\mathbf{u}]|_{r=a} = 0, \quad [\sigma_{rr}]\Big|_{r=a} = 0, \quad [\sigma_{r\varphi}]\Big|_{r=a} = 0, \quad [\sigma_{rz}]\Big|_{r=a} = 0, \tag{1.3}$$

$$\sigma_{yx}\Big|_{y=-h_1} = 0, \quad \sigma_{yy}\Big|_{y=-h_1} = 0, \quad \sigma_{rz}\Big|_{y=-h_1} = 0. \tag{1.4}$$

В общем случае смещение $\mathbf{u}$ может быть выражено через скалярный Φ и векторный $\mathbf{\Psi}$ потенциалы формулой

$$\mathbf{u} = \operatorname{grad}\Phi + \operatorname{rot}\mathbf{\Psi}. \tag{1.5}$$

В декартовой системе координат для составляющих каждого из потенциалов вектора (1.5) мы получаем разделение на уравнения Гельмгольца:

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{a^2}\right)\Phi = 0, \quad \left(\Delta + \frac{\omega^2}{b^2}\right)\mathbf{\Psi} = 0, \tag{1.6}$$

здесь $a = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$, $b = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ – продольная и поперечная скорости распространения.

Плоская упругая волна вполне определена вектором смещения частиц $\mathbf{u}(x,y) = (u(x,y), v(x,y), w(x,y))$. Известно, что волну с произвольным направлением можно представить как суперпозицию *сдвиговой волны горизонтальной поляризации* (SH-волна по сейсмической терминологии), у которой $u = v = 0$, $w \neq 0$, и волны *вертикальной поляризации*, у которой $u \neq 0$, $v \neq w = 0$.

В данной статье исследуем задачу рассеяния от неоднородности в слое для падающей волны горизонтальной поляризации.

Мы рассматриваем гармонические волны с зависимостью всех величин от времени t и координаты x в виде $\exp i(\xi x - \omega t)$, где ξ есть горизонтальная компонента волнового числа, определяющаяся углом падения волны φ и сохраняющаяся при переходе через плоские границы раздела сред. В дальнейшем множитель $\exp(-i\omega t)$ будем опускать, а $\partial/\partial x$ всюду заменим на $i\xi$. При решении задачи для горизонтальной поляризации разделять вектор смещений $\mathbf{u} = (0,0,w)$ на скалярный и векторный потенциалы не нужно, так как составляющие $u = v = 0$, $w \neq 0$, а вектор смещений не зависит от z. Уравнение (1.1) превращается в уравнение Гельмгольца.

§2. Волна горизонтальной поляризации (SH-волна)

Для волны горизонтальной поляризации (вектора смещений $\mathbf{u} = \mathbf{e}_z w$) из (1.1) имеем волновое уравнение Гельмгольца в трех областях Ω_0, Ω_1, Ω_2

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{b_j^2}\right) w_j = \frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_j}{\partial y^2} + k_j^2 w_j = 0,$$

$$k_j^2 = \frac{\omega^2 \rho_j}{\mu_j}, \quad j = 0,1,2. \tag{2.1}$$

Условия жесткого контакта на границах $\Gamma_{01} : y = h$, $\Gamma_{12} : r = a$ и условия свободного напряжения на нижней границе слоя $\Gamma_{13} : y = -h_1$ приведут к следующим равенствам для составляющей w:

$$[w]\Big|_{y=h} = 0, \quad \left[\mu \frac{\partial w}{\partial y}\right]\Big|_{y=h} = 0, \tag{2.2}$$

$$[w]\Big|_{r=a} = 0, \quad \left[\mu\frac{\partial w}{\partial r}\right]\Big|_{r=a} = 0, \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}\Big|_{y=-h_1} = 0. \tag{2.4}$$

Предположим, что падающее поле имеет вид плоской волны горизонтальной поляризации:

$$\mathbf{u}^{inc} = \mathbf{e}_z w^{inc}, \quad w^{inc} = e^{-ik_0(x\cos\varphi_0 + y\sin\varphi_0)}. \tag{2.5}$$

Параметр k_0 равен $k_0 = \omega/b_0$, $b_0 = \sqrt{\mu_0/\rho_0}$, следовательно падающее поле имеет поперечный характер, а φ_0 есть угол скольжения падающей волны, т.е. угол между осью x и направлением вектора падения.

В безграничной среде Ω_0 составляющие вектора смещений $\mathbf{u}$ удовлетворяют условиям излучения Зоммерфельда:

$$\lim_{r\to\infty}\sqrt{r}\left(\frac{\partial u(v,w)}{\partial r} - iku(v,w)\right) = 0, \quad \operatorname{Im} k > 0, \tag{2.6}$$

Этот случай полностью идентичен поведению электрического поля в изотропной однородной электромагнитной среде [2, 3], см. также [4].

Поставленную задачу рассеяния плоской волны от слоя с малым включением будем решать в несколько этапов [5]. Во-первых, по падающей плоской волне найдем поле, отраженное от слоя без включения. Во-вторых, построим функцию Грина для задачи без неоднородности. В-третьих, выведем интегральное уравнение (оно будет с малым ядром), определяющее решение данной задачи с неоднородностью в слое. Наконец, методом последовательных приближений найдем первую итерацию решения. Все это исследуем для точки наблюдения $kr \gg 1$ и для радиуса a включения $ka \ll 1$.

§3. Решение задачи отражения сдвиговой волны от слоя (без включения)

Решение задачи (2.1)–(2.6), если включение Ω_2 отсутствует, известно. Приведем здесь это решение, так как в дальнейшем оно будет необходимо нам:

$$w_0^0 = \left[w^{inc} + Vw^{ref}\right]\exp\{i\xi x\}, \tag{3.1}$$

$$w_1^1 = \left[T(w^{-tr} + w^{+tr})\right] \exp\{i\xi x\}, \tag{3.2}$$

где

$$w^{inc} = \exp\{-i\sqrt{k_0^2 - \xi^2}y)\},$$
$$w^{ref} = \exp\{i\sqrt{k_0^2 - \xi^2}(y - 2h))\},$$
$$w^{-tr} = \exp\{-i\sqrt{k_1^2 - \xi^2}(y - h))\},$$
$$w^{+tr} = \exp\{i\sqrt{k_1^2 - \xi^2}(y + 2h_1 + h))\}.$$

Здесь $\xi = -k_0 \cos\varphi_0$, φ_0 угол скольжения плоской волны, т.е. угол между осью x-ов и направлением падения, φ_1 есть угол преломления в слое Ω_1, который находится из закона Снеллиуса:

$$-\xi = k_0 \cos\varphi_0 = k_1 \cos\varphi_1. \tag{3.3}$$

Коэффициенты отражения V и преломления T находятся из условий непрерывности касательных составляющих поля и условий Неймана на границах раздела:

$$V = \frac{\Delta'}{\Delta}, \quad T = \frac{2e^{-i\sqrt{k_0^2-\xi^2}h}}{\Delta}, \tag{3.4}$$

где

$$\Delta = [1 + E_1^2] + \mathcal{E}[1 - E_1^2], \quad \Delta' = [1 + E_1^2] - \mathcal{E}[1 - E_1^2], \tag{3.5}$$

$$\mathcal{E} = \frac{\mu_1\sqrt{k_1^2 - \xi^2}}{\mu_0\sqrt{k_0^2 - \xi^2}}, \quad E_1^2 = e^{2i\sqrt{k_1^2-\xi^2}(h+h_1)}. \tag{3.6}$$

Окончательное решение задачи отражения плоской волны от слоя глубины $h + h_1$ имеет вид:

$$w_0^0(x, y) = e^{-ik_0\cos\varphi_0 x}[e^{-ik_0\sin\varphi_0 y} + Ve^{ik_0\sin\varphi_0(y-2h)}], \tag{3.7}$$

$$w_1^0(x, y) = Te^{-ik_1\cos\varphi_1 x}[e^{-ik_1\sin\varphi_1(y-h)} - e^{ik_1\sin\varphi_1(y+2h_1+h)}]. \tag{3.8}$$

Коэффициенты отражения V и преломления T перепишем в виде согласованном с построенной в §4 функцией Грина задачи отражения от слоя без включения.

$$V = \frac{\sqrt{1 - \frac{k_1^2}{k_0^2}\cos^2\varphi_1}[1 + E_1^2] - \frac{\mu_1 k_1}{\mu_0 k_0}\sin\varphi_1[1 - E_1^2]}{\sqrt{1 - \frac{k_1^2}{k_0^2}\cos^2\varphi_1}[1 + E_1^2] + \frac{\mu_1 k_1}{\mu_0 k_0}\sin\varphi_1[1 - E_1^2]}, \tag{3.9}$$

$$T = \frac{2e^{-ik_0\sqrt{1-\frac{k_1^2}{k_0^2}\cos^2\varphi_1 h}}\sqrt{1-\frac{k_1^2}{k_0^2}\cos^2\varphi_1}}{\sqrt{1-\frac{k_1^2}{k_0^2}\cos^2\varphi_1}[1+E_1^2]+\frac{\mu_1 k_1}{\mu_0 k_0}\sin\varphi_1[1-E_1^2]}. \qquad (3.10)$$

§4. Функция Грина для слоя без неоднородности

Для дальнейших построений нам потребуется функция Грина точечного источника, помещенного в слое Ω_1.

Приведем функцию Грина $\mathcal{G}(M, M')$ задачи отражения от слоя, когда источник расположен в верхнем полупространстве $M' \in \Omega_0$, а точка наблюдения находится в слое $M \in \Omega_1$

$$\mathcal{G}_1(M, M') = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-x')\xi} G_1(y, y', \xi)d\xi,\ -h_1 \leqslant y \leqslant h. \qquad (4.1)$$

Для источника находящегося в области Ω_0 функция $G_1(y, y', \xi)$ принимает вид

$$G_1(y, y', \xi) = \frac{e^{i\sqrt{k_0^2-\xi^2}(y'-h)}}{i\sqrt{k_0^2-\xi^2}\Delta}\left[e^{-i\sqrt{k_1^2-\xi^2}(y-h)} + E_1^2 e^{i\sqrt{k_1^2-\xi^2}(y-h)}\right], \qquad (4.2)$$

здесь Δ определена выражениями (3.5),(3.6) параграфа §3, величина E_1^2 равна

$$E_1^2 = e^{2ik_1(h+h_1)\sqrt{1-\frac{k_0^2}{k_1^2}\cos^2\varphi_0}}.$$

Мы изучаем задачу рассеяния ($kr \gg 1$) от малой неоднородности, помещенной в слой толщины $(h + h_1) \sim O(\lambda)$. Для этого исследуем функцию Грина $\mathcal{G}_1$, определенную формулами (4.1), (4.2), при $kr \gg 1$.

Асимптотику функции Грина $\mathcal{G}_1$ получим, используя стандартные приемы метода стационарной фазы (см. [2, 3]). Обычно в слое Ω_1 скорость волн меньше, чем в верхнем полупространстве Ω_0, т.е. $k_1 > k_0$. Разрезы на плоскости комплексного переменного ξ в формулах (4.1), (4.2) располагаются, как и в работе [5]. Асимптотика функции Грина $\mathcal{G}_1$ при $kr \gg 1$ запишется в следующем виде:

$$\mathcal{G}_1(r, \varphi; r', \varphi') = \frac{e^{i(k_0 r - 3\pi/4)}}{\sqrt{2\pi k_0 r}} \times$$

$$\times\frac{\sin\varphi e^{-ik_0h\sin\varphi}e^{ik_1h\sqrt{1-\frac{k_0^2}{k_1^2}\cos^2\varphi}}\left[1+e^{2ik_1h_1\sqrt{1-\frac{k_0^2}{k_1^2}\cos^2\varphi}}\right]}{\sin\varphi[1+E^2]+\frac{\mu_1k_1}{\mu_0k_0}\sqrt{1-\frac{k_0^2}{k_1^2}\cos^2\varphi}[1-E^2]}, \qquad (4.3)$$

где

$$E^2=e^{2ik_1(h+h_1)\sqrt{1-\frac{k_0^2}{k_1^2}\cos^2\varphi}}. \qquad (4.4)$$

Обозначим знаменатели формул (4.3), (3.9) и (3.10) через $\Delta(\varphi)$, $\Delta(\varphi_0)$ соответственно:

$$\Delta(\varphi)=\sin\varphi[1+E^2]+\frac{\mu_1k_1}{\mu_0k_0}\sqrt{1-\frac{k_1^2}{k_0^2}\cos^2\varphi}[1-E^2], \qquad (4.5)$$

$$\Delta(\varphi_0)=\sin\varphi_0[1+E_1^2]+\frac{\mu_1k_1}{\mu_0k_0}\sqrt{1-\frac{k_0^2}{k_1^2}\cos^2\varphi_0}[1-E_1^2], \qquad (4.6)$$

Тогда функция Грина $\mathcal{G}_1$ (4.3) перепишется в виде

$$\mathcal{G}_1(r,\varphi;r',\varphi')=\frac{e^{i(k_0r-3\pi/4)}}{\sqrt{2\pi k_0r}}\times$$

$$\frac{\sin\varphi e^{ik_0h\sin\varphi}e^{ik_1h\sqrt{1-\frac{k_0^2}{k_1^2}\cos^2\varphi}}\left(1+e^{2ik_1h_1\sqrt{1-\frac{k_0^2}{k_1^2}\cos^2\varphi}}\right)}{\Delta(\varphi)}. \qquad (4.7)$$

Мы рассматриваем малую неоднородность, для которой $kr'\ll 1$. Как мы увидим в дальнейшем нам понадобится лишь решение в слое w_1^0 из §3. Формула (3.2) для поля в слое упростится и даст значение решения в круге $|r'|\leqslant a$, которое не будет зависеть от переменных r' и φ', так как ширина слоя порядка длины волны, а неоднородность $|r'|\leqslant a$ мала:

$$w_1^0(r',\varphi')=\frac{2e^{-ik_0h\sin\varphi_0}e^{ik_1h\sqrt{1-\frac{k_0^2}{k_1^2}\cos^2\varphi_0}}\sin\varphi_0}{\Delta(\varphi_0)}\times$$

$$\times\left[1+e^{2ik_1h_1\sqrt{1-\frac{k_0^2}{k_1^2}\cos^2\varphi_0}}\right]. \qquad (4.8)$$

§5. Интегральное уравнение для решения задачи и метод последовательного приближения

Используя функцию Грина $\mathcal{G}_1$, построенную в §4, сведем решение сформулированной задачи к решению интегральных уравнений. Затем, учитывая малость ядер этих уравнений, найдем решение интегральных уравнений методом последовательных приближений.

Построение интегральных уравнений базируется (см. [2, 3]) на применении формулы Грина в областях Ω_0, Ω_1 и Ω_2. Обозначим оператор Гельмгольца через $L \equiv (\Delta + k^2)$ и применим формулу Грина к решению w нашей задачи (2.1)–(2.6) и к функции Грина $\mathcal{G}$ в каждой из областей Ω_j, $j = 0, 1, 2$, (см. [5]).

Используя условия согласования (2.2)–(2.5) и свойства функций Грина, мы получаем три интегральных уравнения, которые переходят в одно:

$$w_0(M) = \left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_0}\right) \int_0^{2\pi} \frac{\partial w_2}{\partial r'} \mathcal{G}_1(M; r' = a, \varphi') r' d\varphi' +$$

$$+ \frac{\mu_1}{\mu_0}(k_1^2 - k_2^2) \iint\limits_{|r'| \leqslant a} \mathcal{G}_1(r, \varphi; r', \varphi') w_2(r, \varphi; r', \varphi') r' dr' d\varphi'. \qquad (5.1)$$

Здесь функции w_j, $j = 0, 1, 2$ описывают поле нашей задачи в каждой из областей, $M \in \Omega_0$, а интегрирование происходит по поверхности цилиндра $r' = a$, z и по самому цилиндру $|r'| \leqslant a$, z.

Решать уравнение (5.1) будем следующим образом. Представим функции $w_j(M)$, $j = 0, 1, 2$ в виде суммы неизвестных слагаемых $W_j(M)$ и известных функций w_j^0, которые равны отраженной w_0^0 волне в области Ω_0 (см. (3.7)) и преломленной волне w_1^0 в области Ω_1 (см. (3.8)) при падении на слой плоской волны:

$$w_j = W_j + w_j^0, \quad j = 0, 1, \quad w_2 = W_2 + w_1^0. \qquad (5.2)$$

Для неизвестных функций $W_j(M)$ получаем следующие задачи:

$$(\Delta + k_j^2) W_j = 0, \quad j = 0, 1, \quad (\Delta + k_2^2) W_2 = (k_1^2 - k_2^2) w_1^0, \qquad (5.3)$$

$$\begin{cases} W_0 = W_1 & \text{при} \quad y = h, \\ \mu_0 \frac{\partial W_0}{\partial y} = \mu_1 \frac{\partial W_1}{\partial y} & \text{при} \quad y = h, \end{cases} \qquad (5.4)$$

$$\frac{\partial W_1}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = -h_1, \tag{5.5}$$

$$\begin{cases} W_1 = W_2 & \text{при} \quad r = a, \\ \dfrac{\partial W_1}{\partial r} = \dfrac{\mu_2}{\mu_1}\dfrac{\partial W_2}{\partial r} + \dfrac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1}\dfrac{\partial w_1^0}{\partial r} & \text{при} \quad r = a, \end{cases} \tag{5.6}$$

Сюда следует добавить условия излучения Зоммерфельда.

Решать эти задачи (5.3)–(5.6) будем точно также, как и задачу для функции w в предыдущем параграфе. Применим формулу Грина к неизвестному решению W и к функции Грина $\mathcal{G}$. После некоторых преобразований получим следующее интегральное уравнение относительно неизвестного решения W:

$$W_0(M) = \left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_0}\right) \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial W_2}{\partial r'} + \frac{\partial w_1^0}{\partial r'}\right] \mathcal{G}_1(M; r' = a, \varphi') r' d\varphi' +$$

$$+ \frac{\mu_1}{\mu_0}(k_1^2 - k_2^2) \iint\limits_{|r'| \leqslant a} \mathcal{G}_1(r, \varphi; r', \varphi')(W_2 + w_1^0)(r, \varphi; r', \varphi') r' dr' d\varphi'. \tag{5.7}$$

Интегральное уравнение (5.7) можно решать методом последовательных приближений, если в качестве нулевой итерации для функции W выбрать значение $W^0 = 0$. Это возможно, так как из физических соображений и по условию задачи W конечно, а область интегрирования мала ($kr' \ll 1$).

Следовательно, первая итерация к решению W^1 равна:

$$W^1(M) = \frac{(\mu_2 - \mu_1)}{\mu_0} a \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial w_1^0}{\partial r'} \mathcal{G}_1(M; r' = a, \varphi')\right] d\varphi' +$$

$$+ \frac{\mu_1}{\mu_0}(k_1^2 - k_2^2) \iint\limits_{|r'| \leqslant a} \mathcal{G}_1(r, \varphi; r', \varphi') w_1^0 r' dr' d\varphi'. \tag{5.8}$$

§6. Дифракционная добавка от неоднородности, помещенной в слой

Подставляя (4.7)–(4.8) в формулу (5.8) для первой итерации функции W, мы получим добавочное слагаемое от неоднородности к решению задачи отражения плоской волны от слоя глубины $h + h_1$. Эта добавка представляет собой цилиндрическую волну,

рассеивающуюся от неоднородности с некоторой диаграммой направленности.

Введем обозначения, согласованные с работой [5]. Пусть через $T_{01}(\varphi_0)$, $T_{10}(\varphi)$ будут обозначены коэффициенты прохождения из верхней среды в слой и обратно:

$$T_{01}(\varphi_0) = \frac{e^{-ik_0 h \sin\varphi_0} e^{ik_1 h\sqrt{1-\frac{k_0^2}{k_1^2}\cos^2\varphi_0}}\sin\varphi_0}{\Delta(\varphi_0)}\times$$

$$\times\left[1+e^{2ik_1h_1\sqrt{1-\frac{k_0^2}{k_1^2}\cos^2\varphi_0}}\right]. \tag{6.1}$$

$$T_{10}(\varphi) = \frac{e^{-ik_0 h \sin\varphi} e^{ik_1 h\sqrt{1-\frac{k_0^2}{k_1^2}\cos^2\varphi}}\sin\varphi}{\Delta(\varphi)}\times$$

$$\times\left[1+e^{2ik_1h_1\sqrt{1-\frac{k_0^2}{k_1^2}\cos^2\varphi}}\right]. \tag{6.2}$$

Приведем формулы дифракционной добавки к решению задачи отражения от неоднородности Ω_2 сдвиговой плоской волны горизонтальной поляризации.

Рассеяние от неоднородности в слое упругой плоской волны поляризованной горизонтально дается формулой

$$W^1(r,\varphi) = \frac{\mu_2\rho_1-\mu_1\rho_2}{\mu_0\rho_2}\pi(k_2a)^2\frac{2e^{i(k_0r-3\pi/4)}}{\sqrt{2\pi k_0 r}}F(\varphi_0,\varphi), \tag{6.3}$$

где диаграмма направленности $F(\varphi_0,\varphi)$ равна

$$F(\varphi_0,\varphi) = T_{01}(\varphi_0)T_{10}(\varphi). \tag{6.4}$$

В формулах (6.3), (6.4) прослеживается симметрия относительно углов φ_1 и φ, так как

$$k_0\cos\varphi_0 = k_1\cos\varphi_1,$$

$$\sin\varphi_1 = \sqrt{1-\frac{k_0^2}{k_1^2}\cos^2\varphi_0}, \sin\varphi_0 = \sqrt{1-\frac{k_1^2}{k_0^2}\cos^2\varphi_1}.$$

Дифракционная добавка (6.3) мала ввиду того, что она содержит два малых множителя $(k_2a)^2$, $k_2a \ll 1$ и $(k_0r)^{-1/2}$, $k_0r \gg 1$.

Рассеянное в безграничном полупространстве неоднородностью $r = a$, $k_2 a \ll 1$ горизонтально поляризованное поле при $k_0 r \gg 1$ имеет следующую формулу для поперечной (SH) волны:

$$w^{ref} \sim \frac{\pi k_2^2 a^2 e^{i(k_0 r - 3\pi/4)}}{\sqrt{2\pi k_0 r}} \left[\frac{\rho_0 - \rho_2}{\rho_0} + \frac{\mu_0 - \mu_2}{\mu_2 + \mu_0} \cos(\varphi - \varphi_0) \right] \times$$
$$\times [1 + O((k_2 a)^2)]. \qquad (6.5)$$

Если *сравнивать рассеяние* плоской упругой волны горизонтальной поляризации *от неоднородности в неограниченном пространстве* (6.5) с рассеянием этой волны *от неоднородности в слое* (6.3), то *качественная картина сохранится.*

Неоднородность будет излучать как точечный источник, интенсивность которого *пропорциональна площади сечения* этой неоднородности и *скачкам (см.* (6.3)*) квадратов поперечных скоростей в слое и в неоднородности* на границах разделов.

Изменились количественные характеристики рассеиваемого поля. Так скачки плотностей и параметров Ламе (см. (6.5)) $\rho_0 - \rho_2$, $(\mu_0 - \mu_2)$ в задаче дифракции на неоднородности в отсутствии слоя заменятся на скачок квадрата поперечных скоростей в слое и в неоднородности $b_2^2 - b_1^2$. Присутствие слоя скажется и в диаграмме направленности.

Относительно волн вертикальной поляризации, уравнения упругости для которых разделяются на уравнения Гельмгольца для скалярного и векторного потенциалов, укажем следующее. Предложенным методом можно найти рассеянное от неоднородности в слое поле, но выкладки слишком громоздки и мы их проведем позже в другой статье.

Литература

1. Н. Я. Кирпичникова, В. Б. Филиппов, Л. А. Свиркина, *Рассеяние от малой неоднородности в упругой среде.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **264** (2000), 122–139.
2. В. А. Фок, *Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн.* "Советское радио", М. (1970).
3. Ф. Франк, Р. Мизес, *Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики.* ОНТИ ГРОТЛ, Л.-М. (1937).
4. Л. М. Бреховских, *Волны в слоистых средах.* Наука, М. (1973).
5. Н. Я. Кирпичникова, В. Б. Филиппов, *Дифракция плоских электромагнитных волн от малой неоднородности, помещенной в слой.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **275** (2001), ??–??.

Kirpichnikova N.Ya., Svirkina L.A., Philippov V.B. Scattering of plane elastic waves on a small inhomogeneity lying inside an elastic layer.

The problem of diffraction of the elastic plane wave of the horizontal polarization (SH-wave) on a small inhomogeneity lying in a layer is investigated. The layer is situated on the stress-free boundary of the half-space. The inhomogeneity is supposed to be a circular cylinder, radius of which is small in comparision with the length of the falling wave. The insident wave is polarized in parallel to the axis of the cylinder.

It is proved that the small inhomogeneity radiates as a point source, the intensity of which is proportional to area of the cross-section inhomogeneity and the jumps of the squared velocities in the layer and in the inhomogeneity.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 25 ноября 2000 г.