Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 270, 2000 г.

В. И. Васюнин

ОПИСАНИЕ ГИПЕРИНВАРИАНТНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ СЖАТИЙ В ТЕРМИНАХ ИХ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Хорошо известно (см., например, [1]), что существует взаимно однозначное соответствие между инвариантными подпространствами вполне неунитарного сжатия и регулярными факторизациями его характеристической функции. Целью настоящей заметки является описание тех регулярных факторизаций, для которых соответствующие инвариантные подпространства являются гиперинвариантными. Будет доказана следующая теорема:

Теорема. *Пусть T – вполне неунитарное сжатие, действующее в гильбертовом пространстве, $\Theta \in H^\infty(E \to E_*)$ – его характеристическая функция. Пусть $L \in \operatorname{Lat} T$, и $\Theta = \Theta'\Theta''$ – соответствующая регулярная факторизация, $\Theta' \in H^\infty(E \to F)$, $\Theta'' \in H^\infty(F \to E_*)$. Положим $\Delta'_* = (I - \Theta'\Theta'^*)^{1/2}$, $\Delta'' = (I - \Theta''^*\Theta'')^{1/2}$. Тогда $L \in \operatorname{HypLat} T$ в том и только в том случае, когда выполнены два следующих условия:*

1°) $\operatorname{supp}\Delta'_* \cap \operatorname{supp}\Delta''$ – *множество лебеговой меры ноль;*

2°) *для любой пары оператор-функций $A \in H^\infty(E \to E)$, $A_* \in H^\infty(E_* \to E_*)$, сплетаемых функцией Θ, т.е. такой что $\Theta A = A_*\Theta$, существует функция $A_F \in H^\infty(F \to F)$, сплетаемая множителем Θ' с A и множителем Θ'' с A_*, т.е. $\Theta' A = A_F\Theta'$, $\Theta'' A_F = A_*\Theta''$.*

1. Основные понятия и обозначения

Основные понятия, которые будут использоваться в данной статье, могут быть найдены в классической книге Сёкефальви-Надя–Фойаша [1]. Однако я буду использовать так называемую бескоординатную технику, опирающуюся на понятие функциональных вложений. Подробное описание бескоординатной моде-

Работа частично поддержана грантом РФФИ 98-01-00312, ФЦП "Интеграция" рег. No. 326.53 и грантом Шведской Королевской Академии Наук.

ли можно найти в [2] или [3]. А тут будет приведено лишь краткое описание возникающих объектов.

Пусть T – вполне неунитарное сжатие в гильбертовом пространстве H. Если $\mathcal{H}$ – пространство его минимальной унитарной дилатации $\mathcal{U}$, то $\mathcal{H}$ может быть разложено в ортогональную сумму

$$\mathcal{H} = G_* \oplus H \oplus G,$$

где $\mathcal{U}G \subset G$, $\mathcal{U}^*G_* \subset G_*$. Минимальность дилатации означает, что

$$\mathcal{H} = \operatorname{span}\{\,\mathcal{U}^n H : n \in \mathbb{Z}\,\},$$

откуда вытекает, что $\mathcal{U}|G$ и $\mathcal{U}^*|G_*$ – чистые изометрии, т.е. операторы сдвига. Следовательно, они унитарно эквивалентны операторам умножения на z в некоторых H^2-пространствах. А именно, можно взять два вспомогательных гильбертовых пространства E и E_*, размерности которых равны кратностям наших изометрий

$$\dim E = \dim(G \ominus \mathcal{U}G),$$
$$\dim E_* = \dim(G_* \ominus \mathcal{U}^*G_*),$$

и затем определить изометрические вложения π и π_* пространств $L^2(E)$ и $L^2(E_*)$ в $\mathcal{H}$, сплетающие умножение на z с оператором $\mathcal{U}$, и такие что

$$G = \pi H^2(E), \quad G_* = \pi H^2_-(E_*).$$

Тогда

$$H = \mathcal{H} \ominus \big(\pi H^2(E) \oplus \pi H^2_-(E_*)\big),$$

и ортогональный проектор на H задается формулой

$$P_H = I - \pi P_+ \pi_* - \pi^* P_- \pi_*^*,$$

где P_+ – проектор Рисса в L^2 на H^2, а $P_- = I - P_+$ – ортогональный проектор на $H^2_- = L^2 \ominus H^2$. Оператор $\Theta \stackrel{\text{def}}{=} \pi_*^*\pi$ является оператором умножения на некоторую сжимающую аналитическую функцию, называемую характеристической функцией оператора T.

Подпространства

$$\mathcal{R} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{H} \ominus \pi_* L^2(E_*) \quad \text{и} \quad \mathcal{R}_* \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{H} \ominus \pi L^2(E)$$

называются остаточным и $*$-остаточным подпространствами. Они также могут быть представлены как образы некоторых изометрий, действующих из L^2-пространств и сплетающих умножение на z с $\mathcal{U}$. А именно, положим

$$\Delta \stackrel{\text{def}}{=} (I - \Theta^*\Theta)^{1/2}, \qquad \Delta_* \stackrel{\text{def}}{=} (I - \Theta\Theta^*)^{1/2},$$

и

$$L^2(\Delta E) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{clos} \Delta L^2(E), \qquad L^2(\Delta_* E_*) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{clos} \Delta_* L^2(E_*).$$

Определим теперь операторы $\tau\colon L^2(\Delta E) \to \mathcal{H}$ и $\tau_*\colon L^2(\Delta_* E_*) \to \mathcal{H}$ формулами

$$\tau\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \pi - \pi_*\Theta, \qquad \tau_*\Delta_* \stackrel{\text{def}}{=} \pi_* - \pi\Theta^*.$$

Первоначально заданные на плотных подмножествах, эти операторы могут быть продолжены на все пространство по непрерывности. Операторы $\tau\tau^*$ и $\tau_*\tau_*^*$ являются ортогональными проекторами на $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}_*$, т.е.

$$\pi\pi^* + \tau_*\tau_*^* = I, \qquad \pi_*\pi_*^* + \tau\tau^* = I.$$

В дальнейшем будут постоянно использоваться соотношения между вложениями π и τ без специальных упоминаний. Поэтому приведем здесь некоторые полезные тождества, вытекающие непосредственно из определений:

$$\begin{aligned}
&\pi^*\pi = I, && \pi^*\pi_* = \Theta^*, && \pi^*\tau = \Delta, && \pi^*\tau_* = 0,\\
&\pi_*^*\pi = \Theta, && \pi_*^*\pi_* = I, && \pi_*^*\tau = 0, && \pi_*^*\tau_* = \Delta_*,\\
&\tau^*\pi = \Delta, && \tau^*\pi_* = 0, && \tau^*\tau = I, && \tau^*\tau_* = -\Theta^*,\\
&\tau_*^*\pi = 0, && \tau_*^*\pi_* = \Delta_*, && \tau_*^*\tau = -\Theta, && \tau_*^*\tau_* = I.
\end{aligned}$$

Чтобы получить функциональную модель в форме Сёкефальви-Надя–Фойаша, нужно выбрать $\mathcal{H} = L^2(E_*) \oplus L^2(\Delta E)$, или, записывая в форме столбцов,

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} L^2(E_*) \\ L^2(\Delta E) \end{pmatrix}, \qquad G = \begin{pmatrix} \Theta \\ \Delta \end{pmatrix} H^2(E), \qquad G_* = \begin{pmatrix} H^2_-(E_*) \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$\pi = \begin{pmatrix} \Theta \\ \Delta \end{pmatrix}, \qquad \pi_* = \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \tau = \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}, \qquad \tau_* = \begin{pmatrix} \Delta_* \\ -\Theta^* \end{pmatrix}.$$

Два классических результата (а имеено, теорема о подъеме и связь между инвариантными подпространствами и регулярными факторизациями характеристической функции) будут использоваться в бескоординатной форме, как они представлены в [4] (в [2] также можно найти это представление). Для удобства приведем здесь формулировки этих теорем.

Теорема о подъеме. *Если X – ограниченный оператор в H, коммутирующий с T, то существует оператор Y в $\mathcal{H}$ с той же самой нормой, коммутирующий с $\mathcal{U}$, и такой, что*

$$YG \subset G, \quad Y^*G_* \subset G_*, \quad \text{и} \quad X = P_H Y|H.$$

Более того, оператор Y имеет вид

$$Y = \pi_* A_* \pi_*^* + \tau \Delta A \pi^* + \tau B \tau_*^*, \tag{1}$$

или (что то же самое)

$$Y = \pi A \pi^* + \pi_* A_* \Delta_* \tau_*^* + \tau B \tau_*^*.$$

Здесь $A \in H^\infty(E \to E)$, $A_* \in H^\infty(E_* \to E_*)$, $B \in L^\infty(\Delta_* E_* \to \Delta E)$, и $A_*\Theta = \Theta A$, где Θ – характеристическая функция оператора T.

Теорема об инвариантных подпространствах. *Следующие утверждения равносильны:*

(i) *T имеет инвариантное подпространство;*
(ii) *Θ допускает регулярную факторизацию;*
(iii) *существует такое изометрическое вложение η пространства $L^2(F)$ в $\mathcal{H}$, что*
  (a) *$\eta^* G \subset H^2(F)$;*
  (b) *$\eta^* G_* \subset H^2_-(F)$;*
  (c) *$\pi_*^*(I - \eta\eta^*)\pi = 0$.*

В дальнейшем нам понадобится не только абстрактная эквивалентность инвариантных подпространств, регулярных факторизаций и соответствующих функциональных вложений η, но и явные формулы, связывающие эти объекты.

Прежде всего напомним определение регулярной факторизации. Факторизация

$$\Theta = \Theta''\Theta', \tag{2}$$

где $\Theta' \in H^\infty(E \to F)$, $\Theta'' \in H^\infty(F \to E_*)$, называется *регулярной* если оператор

$$Z\colon L^2(\Delta E) \to \begin{pmatrix} L^2(\Delta' E) \\ L^2(\Delta'' F) \end{pmatrix}, \qquad Z\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} Z' \\ Z'' \end{pmatrix} \Delta = \begin{pmatrix} \Delta' \\ \Delta''\Theta' \end{pmatrix},$$

является унитарным. Здесь Z', Z'' – проекции оператора Z на подпространства $L^2(\Delta' E)$ и, соответственно, $L^2(\Delta'' F)$, и $\Delta' \stackrel{\text{def}}{=} (I - \Theta'^*\Theta')^{1/2}$, $\Delta'' \stackrel{\text{def}}{=} (I - \Theta''^*\Theta'')^{1/2}$. Если η – изометрическое вложение, совместимое с π и π_*, т.е. для него выполнены условия (a)–(c) теоремы об инвариантных подпространствах, то полагая $\Theta' = \eta^*\pi$, $\Theta'' = \pi_*^*\eta$, мы получаем регулярную факторизацию (2). Наоборот, если задана регулярная факторизация (2), то дополнительное вложение η, обладающее свойствами (a)–(c), можно определить формулой

$$\eta = \pi_*\Theta'' + \tau Z''^*\Delta''. \tag{3}$$

Симметричным образом можно ввести оператор Z_*:

$$Z_*\colon L^2(\Delta_* E_*) \to \begin{pmatrix} L^2(\Delta_*'' E_*) \\ L^2(\Delta_*' F) \end{pmatrix}, \qquad Z_*\Delta_* \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} Z_*'' \\ Z_*' \end{pmatrix} \Delta_* = \begin{pmatrix} \Delta_*'' \\ \Delta_*'\Theta''^* \end{pmatrix},$$

где $\Delta_*' \stackrel{\text{def}}{=} (I - \Theta'\Theta'^*)^{1/2}$, $\Delta_*'' \stackrel{\text{def}}{=} (I - \Theta''\Theta''^*)^{1/2}$, а Z_*', Z_*'' – проекции оператора Z_* на подпространства $L^2(\Delta_*' F)$ и, соответственно, $L^2(\Delta_*'' E_*)$. Тогда можно написать следующую формулу для η (симметричную формуле (3)):

$$\eta = \pi\Theta'^* + \tau_* Z_*'^* \Delta_*'. \tag{4}$$

Следует отметить, что Z унитарен (т.е. факторизация $\Theta = \Theta_2\Theta_1$ регулярна) тогда и только тогда, когда Z_* унитарен.

Введем теперь еще четыре изометрических вложения:

$$\tau' \stackrel{\text{def}}{=} \tau Z'^*, \qquad \tau'' \stackrel{\text{def}}{=} \tau Z''^*, \qquad \tau_*' \stackrel{\text{def}}{=} \tau_* Z_*'^*, \qquad \tau_*'' \stackrel{\text{def}}{=} \tau_* Z_*''^*.$$

Каждый из этих операторов является произведением двух изометрий, поэтому все они – изометрические вложения соответствующих L^2-пространств в $\mathcal{H}$. Положим

$$\mathcal{R}' \stackrel{\text{def}}{=} \tau' L^2(\Delta' E), \qquad \mathcal{R}'' \stackrel{\text{def}}{=} \tau'' L^2(\Delta'' F),$$
$$\mathcal{R}_*' \stackrel{\text{def}}{=} \tau_*' L^2(\Delta_*' F), \qquad \mathcal{R}_*'' \stackrel{\text{def}}{=} \tau_*'' L^2(\Delta_*'' E_*).$$

Так как Z и Z_* унитарны, то

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}' \oplus \mathcal{R}'', \qquad \mathcal{R}_* = \mathcal{R}'_* \oplus \mathcal{R}''_*.$$

Нетривиальным фактом является то, что для регулярных факторизаций подпространства $\mathcal{R}'$ и $\mathcal{R}''_*$ ортогональны, а их сумма – это ортогональное дополнение в $\mathcal{H}$ подпространства $\eta L^2(F)$. Таким образом, справедливы три следующих ортогональных разложения пространства минимальной унитарной дилатации:

$$\mathcal{H} = \eta L^2(F) \oplus \mathcal{R}' \oplus \mathcal{R}''_* = \pi L^2(E) \oplus \mathcal{R}'_* \oplus \mathcal{R}''_* = \pi_* L^2(E_*) \oplus \mathcal{R}' \oplus \mathcal{R}'',$$

а T-инвариантным подпространством, соответствующим нашему вложению η, будет подпространство

$$L = \big(\eta H^2(F) \oplus \mathcal{R}'\big) \ominus G = \big(\eta H^2(F) \oplus \tau' L^2(\Delta' E)\big) \ominus \pi H^2(E).$$

Для ко-инвариантного подпространства $L^\perp \stackrel{\text{def}}{=} H \ominus L$ справедливо представление

$$L^\perp = \big(\eta H^2_-(F) \oplus \mathcal{R}''_*\big) \ominus G_* = \big(\eta H^2_-(F) \oplus \tau''_* L^2(\Delta''_* E_*)\big) \ominus \pi_* H^2_-(E_*).$$

2. Индивидуальная лемма

Прежде чем описывать подпространства, инвариантные относительно всех операторов из коммутанта, опишем те подпространства, которые инвариантны относительно какого-либо одного фиксированного оператора X, коммутирующего с T.

Лемма. *Пусть $X \in \{T\}'$, а Y – подъем оператора X с функциональными параметрами $\{A, A_*, B\}$, задающими Y по формуле (1). Определим два вспомогательных функциональных параметра подъема Y : $C \stackrel{\text{def}}{=} \tau^* Y \tau = \Delta A \Delta - B\Theta$ и $C_* \stackrel{\text{def}}{=} \tau_*^* Y \tau_* = \Delta_* A_* \Delta_* - \Theta B$. Пусть $L \in \operatorname{Lat} T$ и формула (2) дает соответствующую регулярную факторизацию характеристической функции. Тогда $L \in \operatorname{Lat} X$ в том и только в том случае, когда выполнены следующие три условия:*

1) $\Theta''^* A_* \Theta'' + \Delta''^2 \Theta' A \Theta'^* + \Delta'' Z'' B Z_*'^* \Delta'_* \in H^\infty(F \to F)$;
2) $Z'' C Z'^* = 0$;
3) $Z''_* C_* Z_*'^* = 0$.

Доказательство. Прежде всего перепишем соотношения 1)–3) в терминах функциональных вложений:

1′) $\eta^* Y \eta \in H^\infty(F \to F)$;

$2')$ $\tau''^* Y \tau' = 0$;
$3')$ $\tau''^*_* Y \tau'_* = 0$.

Равносильность утверждений $2) \leftrightarrow 2')$ и $3) \leftrightarrow 3')$ вытекает сразу из определения параметров C и вложений τ с соответствующими индексами. Нам нужно только проверить, что $\eta^* Y \eta = \Theta''^* A_* \Theta'' + \Delta''^2 \Theta' A \Theta'^* + \Delta'' Z'' B Z''^*_* \Delta'_*$Ж

$$\begin{aligned}\eta^* Y \eta &= \eta^* (\pi_* A_* \pi^*_* + \tau \Delta A \pi^* + \tau B \tau^*_*) \eta \\ &= \Theta''^* A_* \Theta'' + \Delta'' Z'' \Delta A \Theta'^* + \Delta'' Z'' B Z''^*_* \Delta'_* \\ &= \Theta''^* A_* \Theta'' + \Delta''^2 \Theta' A \Theta'^* + \Delta'' Z'' B Z''^*_* \Delta'_*.\end{aligned}$$

Здесь были использованы определения сомножителей Θ', Θ'' в терминах вложения η и соотношения $\eta^* \tau = \Delta'' Z''$, $\tau^*_* \eta = Z''^*_* \Delta'_*$, которые непосредственно следуют из тождеств (3) и (4).

Перепишем теперь в терминах функциональных вложений условие $L \in \operatorname{Lat} X$. Заметим, что это равносильно вложению

$$Y(L \oplus G) \subset L \oplus G. \tag{5}$$

Действительно, поскольку $YG \subset G$, условие (5) равносильно вложению $YL \subset L \oplus G$. Но последнее вложение равносильно тому, что $P_H YL \subset L$, потому что всегда имеет место вложение $Y(H \oplus G) \subset H \oplus G$. Напомним, что в модельных терминах

$$L \oplus G = \eta H^2(F) \oplus \tau' L^2(\Delta' E),$$

поэтому условие (5) равносильно паре вложений

$$Y \eta H^2(F) \subset \eta H^2(F) \oplus \tau' L^2(\Delta' E), \tag{6}$$

$$Y \tau' L^2(\Delta' E) \subset \eta H^2(F) \oplus \tau' L^2(\Delta' E). \tag{7}$$

А учитывая разложение

$$\mathcal{H} = \eta L^2(F) \oplus \tau' L^2(\Delta' E) \oplus \tau''_* L^2(\Delta''_* E_*),$$

мы видим, что (6) равносильно следующей паре условий

$$\eta^* Y \eta H^2(F) \subset H^2(F), \qquad \text{т.е.} \quad \eta^* Y \eta \in H^\infty(F \to F),$$
$$\tau''^*_* Y \eta H^2(F) = 0, \qquad \text{т.е.} \quad \tau''^*_* Y \eta = 0,$$

а (7) равносильно условиям

$$\eta^* Y \tau' L^2(\Delta' E) \subset H^2(F), \tag{8}$$
$$\tau''^*_* Y \tau' L^2(\Delta' E) = 0, \qquad \text{т.е.} \quad \tau''^*_* Y \tau' = 0.$$

Умножая обе части вложения (8) на z^n и переходя к пределу при $n \to \infty$, мы видим, что левая часть остается неизменной, а правая стремится к нулю, следовательно, (8) равносильно утверждению

$$\eta^* Y \tau' L^2(\Delta' E) = 0, \qquad \text{т.е.} \qquad \eta^* Y \tau' = 0.$$

Подытоживая сказанное, заключаем, что вложение $XL \subset L$ имеет место в том и только в том случае, когда выполняются следующие четыре условия:

i) $\eta^* Y \eta \in H^\infty(F \to F)$;
ii) $\tau_*''^* Y \eta = 0$;
iii) $\eta^* Y \tau' = 0$;
iv) $\tau_*''^* Y \tau' = 0$.

Условие i) совпадает с условием $1'$), таким образом нам надо проверить, что условия ii)–iv) выполняются тогда и только тогда, когда выполнены условия $2') - 3')$. Эта равносильность немедленно вытекает из следуюущих соотношений:

$$\tau_*''^* Y \eta = \tau_*''^* Y \tau_*' \Delta_*'; \tag{9}$$

$$\eta^* Y \tau' = \Delta'' \tau''^* Y \tau'; \tag{10}$$

$$\tau_*''^* Y \tau' = -\tau_*''^* Y \tau_*' \Theta' = -\Theta'' \tau''^* Y \tau'. \tag{11}$$

Действительно, тождество (9) показывает, что $3') \Longrightarrow$ ii), а (10) показывает, что $2') \Longrightarrow$ iii), а тождество iv) вытекает как из $2')$, так и из $3')$ в силу соотношений (11). Обратно, поскольку из (9) и (11) вытекает равенство

$$\tau_*''^* Y \tau_*' = \tau_*''^* Y \eta \Delta_*' - \tau_*''^* Y \tau' \Theta'^*,$$

мы получаем импликацию ii) & iv) $\Longrightarrow$ $3')$, а так как из (10) и (11) следует тождество

$$\tau''^* Y \tau' = \Delta'' \eta^* Y \tau' - \Theta''^* \tau_*''^* Y \tau',$$

мы получаем импликацию iii)&iv) $\Longrightarrow$ $2')$. Таким образом, чтобы завершить доказательство, нужно проверить справедливость тождеств (9)–(11).

Прежде всего заметим, что $\pi_*^* Y \tau = 0$ и $\tau_*^* Y \pi = 0$. И докажем тождество (9), подставляя выражение (4) для η, а тождество (10), подставляя выражение (3). Соотношения (11) доказываются чуть более сложно, тут нам понадобятся следующие тождества

$$\Theta'^* Z_*' = Z' \Theta^* \qquad \text{и} \qquad Z_*'' \Theta = \Theta'' Z'',$$

которые могут быть проверены, исходя прямо из определения функций Z и Z_*. Используя первое из этих тождеств, мы получаем первое соотношение из (11):

$$\begin{aligned}\tau_*''^* Y \tau' &= \tau_*''^* Y(\pi\pi^* + \tau_*\tau_*^*)\tau Z'^* \\ &= \tau_*''^* Y \tau_*(-\Theta)Z'^* = -\tau_*''^* Y \tau_* Z_*'^* \Theta' = -\tau_*''^* Y \tau_*' \Theta'.\end{aligned}$$

Используя второе, аналогичным способом получаем:

$$\begin{aligned}\tau_*''^* Y \tau' &= Z_*'' \tau_*^* (\pi_*\pi_*^* + \tau\tau^*) Y \tau' \\ &= Z_*''(-\Theta)\tau^* Y \tau' = -\Theta'' Z'' \tau^* Y \tau' = -\Theta'' \tau''^* Y \tau'.\end{aligned}$$

Таким образом, мы проверили равносильность условий $1') - 3')$ и i)–iv), что завершает доказательство леммы. •

3. Доказательство теоремы

Предоложим, что условия 1°) и 2°) теоремы выполнены и X – произвольный оператор, коммутирующий с T, а Y – его подъем с параметрами $\{A, A_*, B\}$. Тогда $Z'' B Z_*'^* = 0$, поскольку $\operatorname{supp} Z'' B Z_*'^* \subset \operatorname{supp}\Delta'' \cap \operatorname{supp}\Delta_*'$. Следовательно, условия 1)–3) леммы принимают вид

$1'')$ $\Theta''^* A_* \Theta'' + \Delta''^2 \Theta' A \Theta'^* \in H^\infty(F \to F)$;
$2'')$ $\Delta'' \Theta' A \Delta' = 0$;
$3'')$ $\Delta_*'' A_* \Theta'' \Delta_*' = 0$.

Однако из условия 1°) вытекают равенства

$$\begin{aligned}\Delta'' \Theta' A \Delta' = \Delta'' A_F \Theta' \Delta' = (\Delta'' A_F \Delta_*')\Theta' = 0, \\ \Delta_*'' A_* \Theta'' \Delta_*' = \Delta_*'' \Theta'' A_F \Delta_*' = \Theta''(\Delta'' A_F \Delta_*') = 0,\end{aligned}$$

поскольку $\operatorname{supp}(\Delta'' A_F \Delta_*') \subset \operatorname{supp}\Delta'' \cap \operatorname{supp}\Delta_*'$, и, следовательно, функция в скобках почти всюду равна нулю.

Итак условия $2'') - 3'')$ выполнены, и нам остается проверить справедливость условия $1'')$. Используя сплетающее соотношение из 2°) и еще раз тот факт, что $\Delta'' A_F \Delta_*' = 0$, мы приходим к выводу, что

$$\begin{aligned}\Theta''^* A_* \Theta'' + \Delta''^2 \Theta' A \Theta'^* &= \Theta''^* \Theta'' A_F + \Delta''^2 A_F \Theta' \Theta'^* \\ &= A_F - \Delta''^2 A_F \Delta_*'^2 = A_F \in H^\infty(F \to F).\end{aligned}$$

Обратно, пусть теперь выполнены условия 1)–3) леммы для всех $B \in L^\infty(\Delta_* E_* \to \Delta E)$ и для любой пары A, A_*. Прежде всего

выберем $A = 0$, $A_* = 0$ и $B = Z''^* B_0 Z'_*$, где B_0 – произвольная функция из $L^\infty(\Delta'_* F \to \Delta'' F)$. Тогда 1) можно переписать в виде $\Delta'' B_0 \Delta'_* \in H^\infty(F \to F)$, т.е. $\Delta'' L^\infty(\Delta'_* F \to \Delta'' F)\Delta'_* \subset H^\infty(F \to F)$, откуда

$$\Delta'' L^\infty(\Delta'_* F \to \Delta'' F)\Delta'_* H^2(F) \subset H^2(F).$$

Поскольку левая часть этого включения инвариантна относительно умножения на $\bar{z}$, это – нулевое подпространство в $L^2(F)$. Та же самая инвариантность дает нам

$$\{0\} = \Delta'' L^\infty(\Delta'_* F \to \Delta'' F)\Delta'_* H^2(F) = \Delta'' L^\infty(\Delta'_* F \to \Delta'' F)\Delta'_* \bar{z}^n H^2(F),$$

и, следовательно, $\Delta'' L^\infty(\Delta'_* F \to \Delta'' F)\Delta'_* L^2(F) = \{0\}$, т.е. $L^\infty(\Delta'_* F \to \Delta'' F) = \{0\}$, что и означает равенство нулю лебеговой меры множества $\operatorname{supp} \Delta'_* \cap \operatorname{supp} \Delta''$. Таким образом, условие 1°) теоремы выполнено.

Как мы уже знаем, при выполнении 1°) условия 1)–3) леммы превращаются в $1'') - 3'')$. Теперь требуемую условием 2°) функцию A_F мы возьмем из $1'')$ и проверим, что эта функция A_F удовлетворяет сплетающим соотношениям.

$$\begin{aligned}
A_F \Theta' &= (\Theta''^* A_* \Theta'' + \Delta''^2 \Theta' A \Theta'^*)\Theta' \\
&= \Theta''^* A_* \Theta + \Delta''^2 \Theta' A (I - \Delta'^2) \qquad \text{используем } 2'') \\
&= (\Theta''^* \Theta'' + \Delta''^2)\Theta' A = \Theta' A; \\
\Theta'' A_F &= \Theta''(\Theta''^* A_* \Theta'' + \Delta''^2 \Theta' A \Theta'^*) \\
&= \Theta'' \Theta'^* A_* \Theta'' + \Delta''^2_* \Theta A \Theta'^* \\
&= A_* \Theta'' - \Delta''^2_* A_* \Theta'' + \Delta''^2_* A_* \Theta \Theta'^* \\
&= A_* \Theta'' - \Delta''^2_* A_* \Theta'' \Delta'^2_* = A_* \Theta'' \qquad \text{в силу } 3'').
\end{aligned}$$

Таким образом, условие 2°) выполнено, и теорема доказана. •

4. Заключительные замечания

Отметим, что условие 1°) теоремы влечет дополнительную ортогональность среди частей остаточных подпространств, а именно,

$$\mathcal{R}'' \perp \mathcal{R}'_*.$$

Это вытекает из соотношения $\tau''^*_* \tau'' = \Delta'_* \Delta''$.

Второе замечание относится к сжатиям со скалярной характеристической функцией. Для таких сжатий регулярная факторизация (2) соответствует гиперинвариантному подпространству в том и только в том случае, когда вспомогательное подпространство F не более, чем одномерно.

Случай $\dim F = 0$ с очевидностью дает гиперинвариантное подпространство, поскольку в этом случае $\Delta'' = \Delta'_* = 0$, как операторы в нулевом пространстве, и $A_F = 0$ удовлетворяет обоим сплетающим соотношениям, так как оба сомножителя характеристической функции Θ равны нулю.

Если $\dim F = 1$ и $\Theta = 0$, то факторизация $0 = \Theta''\Theta'$ является регулярной, если или $\Theta' = 0$, а Θ'' – внутренняя, или $\Theta'' = 0$, а Θ' – внутренняя. В первом случае $\Delta'' = 0$, во втором – $\Delta'_* = 0$, следовательно условие 1°) выполнено. Чтобы удовлетворить условию 2°), положим $A_F = A_*$, если $\Theta' = 0$, и $A_F = A$, если $\Theta'' = 0$.

Теперь пусть Θ – ненулевая скалярная функция. Тогда из равенства $\Theta A = A_*\Theta$ вытекает, что $A = A_*$, и, следовательно, мы удовлетворим условию 2°), положив $A_F = A$. Условие 1°) всегда выполнено, поскольку для скалярных факторизаций скалярной характеристической функции существует измеримое подмножество ω единичной окружности $\mathbb{T}$, такое что

$$\Delta' = \Delta'_* = \chi_\omega \Delta \qquad \text{и} \qquad \Delta'' = \Delta''_* = \chi_{\mathbb{T}\setminus\omega}\Delta,$$

где χ_ω – индикатор множества ω.

Наконец, нам надо проверить, что в случае $\dim F = 2$ нет гиперинвариантных подпространств. В этом случае и Δ'', и Δ'_* являются проекторно-значными функциями, их значения суть проекторы ранга один почти всюду, т.е. не выполнено условие 1°).

Литература

1. Б. Сёкефальви-Надь и Ч. Фояш, *Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве*. М., Мир, 1971.
2. N. Nikolski and V. Vasyunin, *Elements of spectral theory in terms of the free function model. I. Basic constructions*. Holomorphic spaces (Axler, McCarthy, Sarason, ed.), Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 33, Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1998, pp. 211–302.
3. N. Nikolski and V. Vasyunin, *A unified approach to function models, and the transcription problem*. Operator Theory Adv. Appl, vol. 41. Basel-Boston, Birkhäuser, 1989, pp. 405–434.

4. В. Васюнин, *Две классические теорему о модели в бескоординатном изложении.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **178** (1989), 5–22.

Vasyunin V. I. Description of hyperinvariant subspaces of a contraction in terms of its characteristic function.

If T is a completely nonunitary contraction on a Hilbert space and L is its invariant subspace corresponding to a regular factorizations of its characteristic function $\Theta = \Theta'\Theta''$, then L is hyperinvariant if and only if the following two conditions are fulfilled:

1°) $\operatorname{supp}\Delta'_* \cap \operatorname{supp}\Delta''$ is of Lebesgue measure zero;

2°) for every pair $A \in H^\infty(E \to E)$, $A_* \in H^\infty(E_* \to E_*)$ intertwinned by Θ, i.e., such that $\Theta A = A_*\Theta$, there exists a function $A_F \in H^\infty(F \to F)$ intertwinned by Θ' with A and by Θ'' with A_*, i.e., $\Theta' A = A_F\Theta'$, $\Theta'' A_F = A_*\Theta''$.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 20 марта 2000