Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 261, 1999 г.

**В. В. Макеев, А. С. Мухин**

# О СУЩЕСТВОВАНИИ ОБЩЕГО СЕЧЕНИЯ ДЛЯ НЕСКОЛЬКИХ ВЫПУКЛЫХ КОМПАКТОВ, ИМЕЮЩЕГО ЗАДАННЫЕ СВОЙСТВА

Цель данной работы – описание конструкции, позволяющей получить серию сходных результатов в выпуклой геометрии. Некоторые из утверждений, которые будут приведены в этой работе, были доказаны ранее без явного применения конструкции.

Тремя авторами [1–3] была независимо установлена нижеследующая топологическая лемма и даны ее геометрические применения.

Обозначим через $G_{kn}$ многообразие Грассмана неориентированных $k$-плоскостей, проходящих через некоторую точку в $\mathbb{R}^n$. Обозначим $\gamma_{kn} : E_{kn} \to G_{kn}$ каноническое расслоение: слоем над точкой $e$ из $G_kn$ является она же, рассматриваемая как $k$-мерное векторное пространство.

**Лемма.** *Индекс пересечения по модулю два циклов $c_1, \ldots, c_{n-k+1}$ тотального пространства $E_{kn}$ канонического расслоения $\gamma_{kn}$ над многообразием Грассмана, гомологичных по модулю два нулевому сечению этого расслоения, равен* 1.

**Следствие.** *Индекс пересечения по модулю два циклов $c_1, c_2, \ldots, \ldots, c_{n-k+1} \in H_{k(n-k)}(E_{kn}, Z_2)$, пересекающихся трансверсально со слоем пространства $E_{kn}$ общего положения в нечетном числе точек равен* 1.

Теперь рассмотрим несколько видов отображений из множества всех выпуклых компактных фигур на плоскости в множество подмножеств плоскости.

**0.** Самый простой пример – отображение $A_0(K)$, которое сопоставляет выпуклому телу на плоскости $K$ непрерывно зависящую от него точку. В. Л. Дольников в работе [3] подробно изучает такие отображения.

Работа частично поддержана грантом научных школ, No. 96-15-96-075.

**1.** Обозначим через $A_1(K)$ множество точек плоскости, через которые проходит пара перпендикулярных прямых, делящих площадь компакта $K$ на четыре равные части. Легко заметить [6], что для типичного компакта $K \subset R^2$ с гладкой границей множество $A_1(K)$ состоит из нечетного числа точек. Здесь и ниже типичными мы называем компакты, составляющие открытое плотное множество в соответствующей топологии в пространстве выпуклых компактов.

**2.** Обозначим $A_2(K)$ множество центров квадратов, вписанных в выпуклый компакт $K \subset R^2$ (или описанных вокруг него). Шнирельман [4] доказал, что в типичную $C^2$-гладкую регулярную жорданову кривую на плоскости вписано нечетное число квадратов.

**3.** Пусть $A_3(K)$ обозначает множество шестидольных точек выпуклого компакта $K \subset R^2$, то есть точек, через которые проходят три прямые, делящие площадь $K$ на шесть равных частей. Хорошо известно, что $A_3(K) \neq \varnothing$ и легко заметить [6], что для типичного компакта $K$ с гладкой границей $A_3(K)$ состоит из нечетного числа точек.

**4.** Обозначим $A_4(K)$ множество центров аффинных образов заданного центрально-симметричного шестиугольника, вписанных в компакт $K$ (описанных вокруг $K$).

В [5] доказано, что для типичного выпуклого компакта $K$ с $C^1$-гладкой границей множество $A_4(K)$ состоит из нечетного числа точек.

**0.** Сопоставим выпуклому телу $K \subset R^3$ непрерывно зависящую от него точку $B_0(K)$ пространства $R^3$.

**1.** Сопоставим выпуклому компакту $K \subset R^3$ множество $B_1(K)$ центров вписанных в $K$ аффинных образов кубооктаэдра – выпуклой оболочки средних ребер куба. В [5] доказано, что для выпуклого компакта $K \subset R^3$ с гладкой границей $B_1(K) \neq \varnothing$ и для открытого плотного в $C^1$-топологии множества типичных компактов $K \subset R^3$ множество $B_1(K)$ состоит из нечетного числа точек.

**2.** Сопоставим выпуклому компакту $K \subset R^3$ множество $B_2(K)$ центров описанных вокруг $K$ аффинных образов ромбододекаэдра (многогранника, двойственного к кубооктаэдру). В [6, 8,

9] доказано, что для типичного выпуклого компакта $K \subset R^3$ с гладкой границей $B_2(K)$ состоит из нечетного числа точек.

**3.** Пусть для выпуклого компакта $K \subset R^3$ множество $B_3(K)$ состоит из точек $K$, через которые проходят три взаимно перпендикулярные аффинные диаметра $K$. Хорда компакта $K \subset R^3$ называется аффинным диаметром, если ее концы лежат в параллельных опорных плоскостях $K$. В [6] доказано, что для выпуклого компакта $K \subset R^3$ множество $B_3(K) \neq \varnothing$ и для типичного компакта $K \subset R^3$ с $C^2$-гладкой границей положительной гауссовой кривизны $B_3(K)$ состоит из нечетного числа точек.

**4.** Для выпуклого компакта $K \subset R^3$ обозначимн множество центров аффинно-правильных восьмиугольников, вписанных в $K$, плоскость которых проходит через фиксированную точку $O \in K$. В [5] доказано, что $B_4(K) \neq \varnothing$, и, что для типичного в $C^1$-топологии компакта $K$ с $C^1$-гладкой границей множества $B_4(K)$ состоит из нечетного числа точек.

**Основная теорема 1.** *Пусть даны $n-1$ выпуклых компакта $K_1, \ldots, K_{n-1}$ в $R^n$ с общей внутренней точкой $O$ и заданы произвольные отображения*

$$f : \{1, \ldots, n-1\} \to \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

*и*

$$g : \{1, \ldots, n-1\} \to \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

*Тогда существуют такие, соответственно, двумерная и трехмерная плоскости $H_1$ и $H_2$, проходящие через точку $O$, что*

$$\bigcap_{i=1}^{n-1} A_{f(i)}(H_1 \cap K_i) \neq \varnothing \quad \text{и} \quad \bigcap_{i=1}^{n-2} B_{g(i)}(H_2 \cap K_i) \neq \varnothing.$$

Доказательство этих утверждений совершенно аналогично и опирается на тот факт, что для типичных компактов $K$ и произвольного $i \leqslant n-1$ множества

$$X_i = \bigcup_{H_1 \in G_{2n}} A_{f(i)}(H_1 \cap K) \quad \text{и} \quad Y_i = \bigcup_{H_2 \in G_{3n}} B_{g(i)}(H_2 \cap K)$$

являются носителями не гомологичных нулю циклов из

$$H_{2(n-2)}(E_{2n}; \mathbb{Z}_2) \quad \text{и} \quad H_{3(n-3)}(E_{3n}; \mathbb{Z}_2)$$

соответственно. Далее по сформулированной выше лемме получаем, что индексы пересечения "циклов" $X_i$ и $Y_j$ соответственно равны 1. Значит $\bigcap\limits_{i=1}^{n-1} X_i \neq \varnothing$ и $\bigcap\limits_{j=1}^{n-2} Y_i \neq \varnothing$ для типичных компактов, а посредством предельного перехода переносим эти утверждения на произвольные выпуклые компакты.

То, что $X_i$ является носителем ненулевого цикла в $H_{2(n-2)}(E_{2n}; \mathbb{Z}_2)$ для типичного компакта $K$ проводятся в [6] для

$$\bigcup_{H_1 \in G_{2n}} A_1(H_1 \cap K) \quad \text{и} \quad \bigcup_{H_1 \in G_{2n}} A_3(H_1 \cap K).$$

В остальных случаях рассуждение проводится совершенно аналогично.

Рассмотрим применение доказанной теоремы к задаче одновременной аппроксимации сечений выпуклых тел.

В выпуклой геометрии на плоскости важную роль играют вписанные и описанные аффинно-правильные шестиугольники. В частности, эти шестиугольники хорошо аппроксимируют выпуклые компакты. Действительно, пусть $S_1$ – вписанный, а $S_2$ – описанный вокруг выпуклого компактного тела $K$ аффинно-правильные шестиугольники. Тогда

$$S(S_1) \leqslant S(K) \leqslant \frac{3}{2} S(S_1) \quad \text{и} \quad \frac{1}{2} S(S_2) \leqslant S(K) \leqslant S(S_2),$$

причем оценка сверху для вписанного и оценка снизу для описанного шестиугольника достигаются для треугольника. Эти оценки играют важную роль, например, в теории укладок на плоскости.

**Теорема 1.** *Пусть $K_1, K_2, \ldots, K_{n-2}$ – выпуклые компактные тела в $\mathbb{R}^n$ с общей внутренней точной $O$. Тогда существует такая проходящая через $O$ плоскость $H$ и такие аффинно-правильные шестиугольники $S_i$, где $1 \leqslant i \leqslant n-2$, с центром в точке $O$, вписанные в $H \cap K_i$, что $S(S_i) \leqslant S(K_i \cap H) \leqslant 3/2 S(S_i)$. Константа $3/2$, вообще говоря, не может быть уменьшена.*

**Доказательство.** Применим предыдущую теорему для отображений $A_3$ для тел $K_1, K_2, \ldots, K_{n-2}$ и $A_3$ для некоторого фиктивного тела. По теореме существует такая плоскость $H$, что

$$A_3(H \cap K_1) \cap A_3(H \cap K_2) \cap \ldots \cap O$$

– не пусто. Значит, эти аффинно-правильные шестиугольнки с общим центром в точке $O$ должным образом аппроксимируют сечения плоскостью $H$ выпуклых тел $K_1, K_2, \ldots, K_{n-2}$. Покажем, что оценку $3/2$ в общем случае уменьшить нельзя.

Возьмем в качестве $K_1$ симплекс $T$ с вершинами $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$. Пусть $O$ такая внутренняя точка симплекса $T$, которая делит хорду $A_1B$, проходящую через точку $O$, так что $2OA_1 < OB$.

Тело $K_i$ – это симплекс, образованный гранью симплекса $T$, лежащей против вершины $A_i$ и такой точкой $A_i$, лежащей внутри $T$, что хорда $A_iB_i$ симплекса $K_i$, проходящая через точку $O$, делится так, что $2OA_i < OB_i$ (рис. 1).

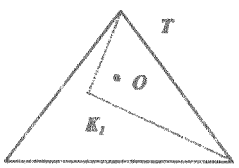


Рис. 1.

Хорошо известно, что хорда выпуклого компакта $K$, проходящая через центр $O$ вписанного в этот компакт аффинно-правильного шестиугольника делится в точке $O$ в отношении не более $2:1$. Поэтому плоскости $H$, для которых точка $O$ является центром аффинно-правильных шестиугольников, вписанных в $H \cap K_i$ для $i \leqslant n-2$ не может пересекать грани симплекса $T$, лежащие против вершин $A_1, A_2, \ldots, A_{n-2}$. Значит плоскость $H$ может пересекать лишь три грани симплекса $K_1 = T$ старшей размерности, следовательно $H \cap K_1$ есть треугольник, что и доказывает точность содержащегося в теореме 2 неравенства.

**Теорема 2.** *Пусть $K_1, \ldots, K_{n-3}$ выпуклые компакты в $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 4)$ с общей внутренней точкой $O$. Тогда найдутся такие, проходящие через точку $O$, двумерные плоскости $H_1, \ldots, H_{n-2}$, лежащие одновременно в некоторой трехмерной плоскости $L$, что $H_i \cap K_i$ для $1 \leqslant i \leqslant n-3$ вписан некоторый аффинный образ правильного восьмиугольника с центром в точке $O$.*

Доказательство непосредственно следует из основной теоремы 1, утверждающей, что для некоторой трехмерной плоскости $L$ множество

$$\bigcap_{i=1}^{n-3} B_4(L \cap K_i) \cap O = O.$$

**Замечания.** 1. Теоремы 2 и 3 легко переформулировать для аффинно-правильных шести и восьмиугольников, описанных вокруг соответствующих двумерных сечений компактов $K_i$.

2. Теоремы 2 и 3 обобщают теорему 1 [7] автора.

## Литература


1. E. Fadell, S. Husseini, *An ideal-valued cohomological index theory with applications to Borsuk–Ulam and Bourgin–Yang theorems.* — Ergodic Theory Dynamical Systems **8** (1998), 73–85.
2. R. T. Živalevič, S. T. Vrečica, *An extension of the ham sandwich theorem.* — Bull. London Math. Soc. **22** (1990), 183–186.
3. В. Л. Дольников, *Трансверсали семейств множеств в $\mathbb{R}^n$ и связь между теоремами Хелли и Борсука.* — Мат. сб. **184, No. 5** (1993), 111–131.
4. Л. Шнирельман, *О некоторых геометрических свойствах замкнутых кривых.* — Успехи мат. наук **10** (1944), 39–44.
5. В. В. Макеев, *Аффинно-вписанные и аффинно-описанные многоугольники и многогранники.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **232** (1996), 286–298.
6. В. В. Макеев, *Некоторые специальные конфигурации плоскостей, связанные с выпуклыми компактами.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **252** (1998), 165–174.
7. В. В. Макеев, *Об аппроксимации плоских сечений выпуклого тела.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **246** (1997), 184–190.
8. В. В. Макеев, *Об аффинных образах ромбододекаэдра, описанных вокруг трехмерного выпуклого тела.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **246** (1997), 191–195.
9. G. Kuperberg, *Circumscribed constant width bodies with polytopes.* — Math. Mag. (в печати).


Makeev V. V., Muhin A. S. On common sections with given properties for finite set of convex compacts.

The general theorem below is proved.

**Theorem.** *Let $O$ be the interior point for $n-2$ convex compacts $K_1, \dots, K_{n-2}$ in $\mathbb{R}^n$. There exists such two-dimensional plane $H$, passing through the point $O$, that for $i \leqslant n-2$ some affine image of the given centrally-summetric hexagon is inscribed in $K_i \cap H$ and has the center at point $O$. There exist such $n-3$ two-dimensional planes $H_1, \dots, H_{n-3}$, passing through the point $O$, and laying at the same time in three-dimensional plane, that for $i \leqslant n-3$ some affine image of regular octagon us inscribed in $H_i \cap K_i$ and has the center at point $O$.*

Санкт-Петербургский
государственный
университет

Поступило 28 июня 1999 г.