Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 261, 1999 г.

**В. В. Макеев**

# ОБ ОДНОЙ АФФИННО-ИНВАРИАНТНОЙ МЕТРИКЕ НА МНОЖЕСТВЕ ПЛОСКИХ ВЫПУКЛЫХ КОМПАКТОВ

Следуя [1], обозначим

$$\delta(K_1, K_2) = \inf\left\{ \frac{S(T(K_2))}{(S(K_1)} \mid K_1 \subset T(K_2) \right\},$$

где $K_1$, $K_2 \subset \mathbb{R}^2$ выпуклые компакты, $T$ – аффинное преобразование плоскости, а $S(K)$ означает площадь множества $K \subset \mathbb{R}^2$. Тогда $d(K_1, K_2) = \ln \delta(K_1, K_2) + \ln \delta(K_2, K_1)$ – аффинно-инвариантная метрика на множестве плоских выпуклых компактов. В [1] доказано, что $d(K_1, K_2) \leqslant \ln 9$ для любых выпуклых компактов $K_1$, $K_2 \subset \mathbb{R}^2$. Ниже доказана

**Теорема.** *$d(K_1, K_2) < \ln \frac{111}{16}$ для любых выпуклых компактов $K_1$, $K_2 \subset \mathbb{R}^2$.*

Для доказательства мы, как и в [1], будем использовать теорему Безиковича о том, что во всякий плоский выпуклый компакт можно вписать аффинный образ правильного шестиугольника. Далее мы считаем, что на границе выпуклых компактов $K_1$ и $K_2$ лежат вершины некоторого фиксированного правильного шестиугольника $K$. Тогда $K_1$ и $K_2$ содержатся в фигуре, ограниченной продолжениями сторон $K$ (Рис. 1), которая получается

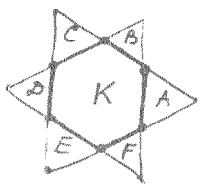


Рис. 1.

из $K$ добавлением шести равных правильных треугольников. Они обозначены буквами $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$.

Проведем в треугольниках $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ средние линии, параллельные сторонам шестиугольника $K$, которые отсекают от них меньшие треугольники $T_A$, $T_B$, $T_C$, $T_D$, $T_E$ и $T_F$ соответственно. Опорная прямая к фигуре $K_i$ $(i = 1, 2)$, проведенная через вершину шестиугольника $K$, может иметь общие внутренние точки не более чем с одним треугольником из $T_A, T_B, \ldots, T_F$. Поэтому после надлежащего переобозначения можно считать, что каждая из фигур $K_i$ может иметь общие внутренние точки лишь с треугольниками $T_A$, $T_C$, $T_E$ или с треугольниками $T_A$, $T_D$.

**Лемма 1.** *Если выпуклый компакт $K_1$ имеет общие внутренние точки разве лишь с треугольниками $T_A$ или $T_D$, то* $d(K_1, K_2) \leqslant \ln \frac{37}{16}$.

На Рис. 2 буквами $A', B', \ldots, F'$ обозначены не принадлежащие $K$ вершины треугольников $A, B, \ldots, F$ соответственно. Пусть $\beta$ – такое наименьшее неотрицательное число, что $K_1$ имеет общие точки с гомотетичными $T_A$ и $T_D$ треугольниками $\beta T_A$ и $\beta T_D$ с коэффициентом $\beta$ и центрами гомотетии в точках $A'$ и $D'$ соответственно. В таком случае $K_1$ не имеет общих внутренних точек с одним из треугольников $\beta T_A$ и $\beta T_D$ с коэффициентом $\beta$ и центрами гомотетии в точках $A'$ или $D'$. Пусть это треугольник $\beta T_D$.

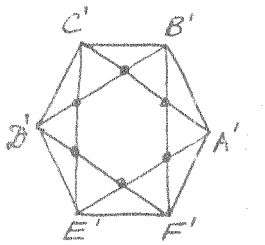


Рис. 2.

Предположим, что $\beta \geqslant 1$. Так как $K_1$ не имеет точек внутри треугольников $T_B$, $T_C$, $T_E$ и $T_F$, то $K_1$ содержится в шестиугольнике, полученном из $A'B'C'D'E'F'$ сжатием с коэффициентом $5/6$ к оси $AD$ Рис. 3. Так как $K$ не внутренность треугольника пересекает $T_D$, то вышеописанный сжатый шестиуголник можно сжать с

коэффициентом $33/40$, в направлении оси $A'D'$, оставив вершину $A'$ неподвижной и он по-прежнему содержит $K_1$ Рис. 4. Площади построенного шестиугольника $5/6 \cdot 37/40.S(K) = 37/16S(K)$.

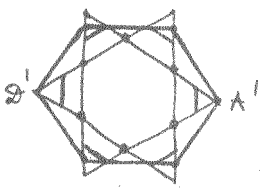


Рис. 3

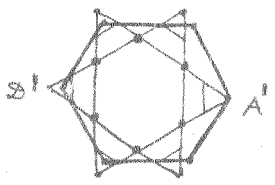


Рис. 4.

Пусть $\beta \leqslant 1$. Тогда $K_1$ не имеет общих внутренних точек с треугольниками $(2-\beta)T_B$, $(2-\beta)T_C$, $(2-\beta)T_E$ и $(2-\beta)T_F$ с вершинами с точках $B'$, $C'$, $E'$, $F'$ соответственно. Как показывают простые вычисления, в этом случае $K_1$ содержится в шестиугольнике $A''B''C''D''E''F''$, получаемом из $A'B'C'D'E'F'$ сжатием с коэффициентом $\frac{4+\beta}{6}$ к оси $A'D'$. Так как $K_1$ не пересекает внутренность треугольника $\beta T_D$, то последний шестиугольник можно еще сжать с коэффициентом $\frac{32+6\beta-\beta^2}{8(4+\beta)}$ в направлении оси $A'D'$, оставив на месте вершину $A'$, и он по-прежнему содержит $K_1$. Площадь полученного посредством двух сжатий шестиугольника достигает минимума при $\beta = 1$, который равен $37/16$ площади $K$. Лемма 1 доказана.

**Лемма 2.** *Если описанные вокруг шестиугольника $K$ выпуклые компакты $K_1$ и $K_2$ не имеют общих внутренних точек с треугольниками $T_B$, $T_D$ и $T_F$, то $d(K_1, K_2) \leqslant \ln 27/4$.*

По условию $K_1$ и $K_2$ имеют общие внутренние точки разве лишь с треугольниками $T_A$, $T_C$, $T_E$. Пусть $M$ и $N$ – подмножества этого набора треугольников, с внутренностями которых пересекаются соответственно $K_1$ и $K_2$. Можно считать, что $M \subset N$ (проводя необходимые переобозначения). Докажем, что в этом случае $K_1 \subset 3/2K_2$, при условии, что центр гомотетии находится в центре шестиугольника $K$.

Если $K_2$ пересекается с $T_A$, то очевидно $K_2$ содержит центр треугольника $A$, который при указанной гомотетии переходит в

вершину $A'$. Поэтому $3/2K_2$ покрывает треуголник $A$. Ясно также, что $3/2K_2$ покрывает части треугольников $A, B, C, \ldots, F$, не попадающие в $T_A, T_B, \ldots, T_F$ соответственно. Значит $K_1 \subset 3/2K_2$.

Рассмотрим аффинный образ $T(K_2)$ выпуклой фигуры $K_2$, вписанный в шестиугольник $K$. Как хорошо известно:

$$\frac{2}{3}S(K_2) \leqslant S(K) \leqslant 2S(T(K_2)),$$

откуда

$$S(K_2) \leqslant 3S(T(K_2)).$$

Имеем:

$$T(K_2) \subset K_1 \subset \frac{3}{2}K_2,$$

и

$$S\left(\frac{3}{2}K_2)\right) \leqslant \frac{27}{4}S(T(K_2)).$$

Лемма 2 доказана.

Если одна из фигур $K_1$ и $K_2$, например, $K_1$ пересекает разве лишь внутренности $T_A$ и $T_D$, то $d(K_1, K_2) \leqslant d(K_1, K) + d(K, K_2)$. По лемме 1 $d(K_1, K_2) \leqslant \ln 37/16$, а $d(K, K_2) \leqslant \ln 3$ [1], откуда $d(K_1, K_2) \leqslant \ln 6\frac{15}{15}$.

Если же обе фигуры $K_1$ и $K_2$ пересекают внутренности разве лишь треугольников $T_A$, $T_C$, $T_E$, то по лемме 2 $d(K_1, K_2) < \ln \frac{27}{4}$.

## Литература

1. Б. Грюнбаум, *Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел*. Наука, М. (1971).

Makeev V. V. On one affine-invariant metric on the class of convex plane compacts.

**Theorem.** *For every plane convex compacts $K_1$, $K_2 \subset \mathbb{R}^2$ there exist an affine transformations $T_1$, $T_2$ such that $T_1(K_1) \subset K_2 \subset T_2(K_1)$ and $S(T_2(K_1)) < 111/16S(T_1(K_1))$, where $S(K)$ means the square of a plane set $K \subset \mathbb{R}^2$.*

Санкт-Петербургский
государственный
университет

Поступило 24 апреля 1999 г.