В. А. Солонников

ОБ ОЦЕНКЕ МАКСИМУМА МОДУЛЯ РЕШЕНИЯ СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА

Посвящается юбилею
Ольги Александровны Ладыженской

§1. Введение

В настоящей работе, являющейся продолжением статьи [1], доказывается оценка

$$\sup_{x\in\Omega} |\,\vec{v}(x)\,| \leqslant c\left(\sup_{x\in\partial\Omega} |\,\vec{a}(x)\,|\right) \tag{1}$$

для решения задачи

$$\begin{aligned} &-\nabla^2\vec{v} + R(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} + \nabla p = 0, \quad \nabla\cdot\vec{v} = 0 \quad (x\in\Omega) \\ &\vec{v}\big|_{\partial\Omega} = \vec{a} \end{aligned} \tag{2}$$

в ограниченной области $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ с гладкой границей. Из нее вытекает, что производные решения задачи (2) в любой точке $x\in\Omega$ могут быть оценены через $\sup\limits_{x\in\partial\Omega} |\,\vec{a}(x)\,|$ и через $\operatorname{dist}(x,\partial\Omega)$. В работе [1] была получена оценка $\mathcal{D}^j\vec{v}(x)$ через норму Гельдера $\vec{a}(x)$ с показателем $\alpha > 1/2$.

Ради простоты изложения мы считаем, что $\partial\Omega$ является связной поверхностью и $\vec{a}(x)$ удовлетворяет необходимому условию

$$\int\limits_{\partial\Omega} \vec{a}\cdot\vec{n}\,dS = 0, \tag{3}$$

хотя наши рассуждения применимы к случаю, когда $\partial\Omega$ распадается на конечное число связных компонент и условие (3) выполняется для каждой компоненты.

Приведем необходимые для дальнейшего вспомогательные предложения. Пусть $(\vec{w}, s)$ – решение линейной задачи

$$\begin{aligned} &-\nabla^2\vec{w} + \nabla s = 0, \quad \nabla\cdot\vec{w}(x) = 0 \quad (x\in\Omega), \\ &\vec{w}\big|_{\partial\Omega} = \vec{a}. \end{aligned} \tag{4}$$

Имеет место следующее предложение.

Предложение 1. *Для решения задачи* (4) *справедливы оценки*

$$\sup_{x\in\Omega} |\, \vec{w}(x)\,| \leqslant c \sup_{x\in\partial\Omega} |\, \vec{a}(x)\,|, \tag{5}$$

$$|\, \mathcal{D}\,\vec{w}\,(x)\,| + |\, s(x)\,| \leqslant c(\operatorname{dist}(x,\partial\Omega)^{-1} \sup_{x\in\partial\Omega} |\, \vec{a}(x)\,|\,. \tag{6}$$

Оценка (5) была впервые приведена без доказательства в работе [2]. Ее доказательство предельно просто: нужно воспользоваться представлением $\vec{w}\,(x)$ в виде потенциала двойного слоя (см. [2] и [3], гл. III)

$$\vec{w}\,(x) = \int_{\partial\Omega} \mathcal{P}(x,y)\,\vec{\mu}(y)\,dS_y, \tag{7}$$

где

$$\mathcal{P} = (P_{ik})_{i,k=1,2,3},$$

$$P_{ik}(x,y) = -\frac{3}{4\pi}\sum_{j=1}^{3} \frac{(x_i-y_i)(x_k-y_k)(x_j-y_j)}{|\, x-y\,|^5} n_j(y)$$

и свойством суммируемости $\mathcal{P}$ по y:

$$\int_{\partial\Omega} |\, \mathcal{P}(x,y)\,|_\xi\, dS_y \leqslant c$$

(для гармонического потенциала двойного слоя это свойство доказано в [4]). Следовательно,

$$\sup_{\Omega} |\, \vec{w}(x)\,| \leqslant c \sup_{\partial\Omega} |\, \vec{\mu}(\xi\, y)\,|\,. \tag{8}$$

Векторное поле $\vec{\mu}$ определяется из фредгольмовой системы интегральных уравнений на $\partial\Omega$

$$\vec{\mu}\,(x) + 2\int_{\partial\Omega} \mathcal{P}(x,y)\vec{\mu}\,(y)\,dS_y = 2\vec{a}\,(x)$$

со слабо полярным ядром $2\mathcal{P}(x,y)$, x, $y \in \partial\Omega$, и может быть выражено через резольвенту этого ядра:

$$\vec{\mu}\,(x) = 2\vec{a}\,(x) + \int_{\partial\Omega} \mathcal{R}(x,y)\,\vec{a}\,(y)\,dS.$$

Так как $\mid R_{ik}(x,y) \mid \leqslant c|x-y|^{-2+\delta}$, $\delta > 0$ (см. [2]), то

$$\sup_{\partial\Omega} \mid \vec{\mu}(x) \mid \leqslant c \sup_{\partial\Omega} \mid \vec{a}(x) \mid .$$

Из этой оценки и из (8) вытекает (5). Неравенство (6) для $\mathcal{D}\,\vec{w}$ следует из (7) и из оценки

$$\mid \mathcal{D}\,\vec{w}\,(x) \mid \leqslant \sup_{\partial\Omega} \mid \vec{\mu}\,(y) \mid \int_{\partial\Omega} \mid \mathcal{D}_x\,\mathcal{P}(x,y) \mid \, dy \leqslant$$

$$\leqslant c\,(\operatorname{dist}(x,\partial\Omega))^{-1} \sup_{\partial\Omega} \mid \vec{\mu}\,(y) \mid .$$

Такая же оценка справедлива и для

$$s(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^{3} n_j(y) \nabla \frac{x_j - y_j}{|x-y|^3} \cdot \vec{\mu}\,(y)\, dS_y .$$

Предложение 2. *Если $\partial\Omega$ – связная поверхность, то векторное поле $\vec{w}\,(x)$ представимо в виде*

$$\vec{w}\,(x) = rot\ \vec{b}\,(x),$$

где $\vec{b} \in W_6^1(\Omega$, причем

$$\| \vec{b} \|_{W_6^1(\Omega)} \leqslant c \sup_{\partial\Omega} \mid \vec{a}\,(x) \mid . \tag{9}$$

Доказательство. Пусть Ω' – область, ограниченная поверхностью $\partial\Omega$ и сферой $S_R = \{|x - x_0| = R\} \subset \mathbb{R}^3 \setminus \Omega$, $x_0 \in \Omega$ а $\vec{w}_1(x)$ – соленоидальное векторное поле, заданное в Ω', удовлетворяющее краевым условиям

$$\vec{w}_1\big|_{\partial\Omega} = \vec{a}, \quad \vec{w}_1\big|_{S_R} = 0 \tag{10}$$

и неравенству

$$\| \vec{w}_1 \|_{L_6(\Omega_1)} \leqslant c \sup_{\partial\Omega} \mid \vec{a}(x) \mid . \tag{11}$$

Поле $\vec{w}_1(x)$ можно определить формулой

$$\vec{w}_1(x) = \psi(x)\, \vec{w}_2(x) + \vec{w}_3(x), \tag{12}$$

где $\vec{w}_2$ – решение внешней задачи

$$-\nabla^2\, \vec{w}_2 + \nabla p_2 = 0, \quad \nabla \cdot \vec{w}_2(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega)$$

$$\vec{w}_2\big|_{\partial\Omega} = \vec{a}, \quad \vec{w}_2 \to 0 \quad (|x| \to \infty), \tag{13}$$

ψ – гладкая функция, равная единице в окрестности $\partial\Omega$, нулю в окрестности S_R и удовлетворяющая нераверству $0 \leqslant \psi \leqslant 1$, и $\vec{w}_3(x)$ – векторное поле, удовлетворяющее соотношениям

$$\nabla \cdot \vec{w}_3\,(x) = -\nabla \cdot (\psi\,\vec{w}_2\,) = -\vec{w}_2 \cdot \nabla\psi \quad (x \in \Omega'),$$
$$\vec{w}_3\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \vec{w}_3\big|_{S_R} = 0.$$

Его можно выбрать так (см. [5]), что

$$\|\vec{w}_3\,\|_{W_2^1(\Omega')} \leqslant c\|\,\vec{w}_2 \cdot \nabla\psi\,\|_{L_2(\Omega')}.$$

Векторное поле $\vec{w}_2$ подчиняется неравенству

$$\sup_{\Omega_1} |\ \vec{w}_2(x)\ | \leqslant c \sup_{\partial\Omega} |\ \vec{a}(x)\ |, \tag{14}$$

которое доказывается так же, как (5). Поэтому $\vec{w}_1$ удовлетворяет (11).

Положим

$$\vec{b}\,(x) = \frac{1}{4\pi}\mathrm{rot}\,\left(\int\limits_{\Omega} \frac{\vec{w}\,(y)\,dy}{|x-y|} + \int\limits_{\Omega'} \frac{\vec{w}_1\,(y)\,dy}{|x-y|}\right). \tag{15}$$

Ясно, что $\vec{b} \in W_6^1(\Omega)$; в силу теоремы Кальдерона–Зигмунда,

$$\|\,\vec{b}\,\|_{W_6^1(\Omega)} \leqslant c\,\left(\|\,\vec{w}\,\|_{L_6(\Omega)} + \|\,\vec{w}_1\,\|_{L_6(\Omega')}\right) \leqslant c \sup_{\partial\Omega} |\ \vec{a}(x)\ |\,. \tag{15'}$$

Наконец, так как

$$\nabla \cdot \left(\int\limits_{\Omega} |\ x-y\ |^{-1}\ \vec{w}\,(y)\,dy + \int\limits_{\Omega'} |\ x-y\ |^{-1}\ \vec{w}_1\,(y)\,dy\right) = 0,$$

мы имеем при $x \in \Omega$

$$\mathrm{rot}\ \vec{b}\,(x) = -\Delta\frac{1}{4\pi}\left(\int\limits_{\Omega} \frac{\vec{w}\,(y)\,dy}{|x-y|} + \int\limits_{\Omega'} \frac{\vec{w}_1\,(y)\,dy}{|x-y|}\right) = \vec{w}\,(x).$$

Предложение доказано.

§2. Доказательство оценки (1)

Воспользуемся представлением решения задачи (2) через матрицу Грина:

$$\vec{v}\,(x) = \vec{w}\,(x) + \int\limits_{\Omega} G(x,y)(\,\vec{v}\cdot\nabla)\,\vec{v}\,dy = \\ = \vec{w}\,(x) - \int\limits_{\Omega} \nabla_y G(x,y)\,(\,\vec{v}\,(y)\otimes\,\vec{v}\,(y))\;dy. \tag{16}$$

Матрица Грина $G(x,y) = (G_{ik}(x,y))_{i,k=1,2,3}$ построена в работе К. Одквиста [2], и для нее установлены оценки

$$|\,G_{ik}(x,y)\,| \leqslant \frac{c}{|x-y|},$$

$$|\,\nabla\,G_{ik}(x,y)\,| \leqslant \frac{c}{|x-y|^2}.$$

Поэтому, как показано в [1],

$$\sup_{\Omega}|\;\vec{v}\,(x)\;| \leqslant \sup_{\Omega}|\;\vec{w}\,(x)\;| + c\|\,\vec{v}\,\|^2_{L_p(\Omega)}, \quad q > 6$$

$$\|\,\vec{v}\,\|_{L_q(\Omega)} \leqslant \|\,\vec{w}\,\|_{L_q(\Omega)} + c\|\,\vec{v}\,\|^2_{L_q(\Omega)}, \quad p \geqslant \frac{6q}{q+3}.$$

В частности, последнее неравенство справедливо при $p = 6$, так что

$$\sup_{\Omega}|\;\vec{v}\,(x)\;| \leqslant c\left(\sup_{\Omega}|\;\vec{w}\,(x)\;| + \sup_{\Omega}|\;\vec{w}\,(x)\;|^2\right) + c\|\,\vec{v}\,\|^4_{L_6(\Omega)} \leqslant \\ \leqslant c\left(\sup_{\partial\Omega}|\;\vec{a}\,(x)\;| + \sup_{\Omega}|\;\vec{a}\,(x)\;|^2\right) + c\|\,\vec{v}\,\|^4_{L_6(\Omega)}. \tag{17}$$

Для оценки $\|\,\vec{v}\,\|_{L_6(\Omega)}$ представим решение задачи (2) в виде

$$\vec{v}\,(x) = \vec{v}\,'(x) + \vec{u}\,(x),$$

$$\vec{v}\,'(x) = \operatorname{rot}\zeta(x)\,\vec{b}\,(x) = \zeta(x)\,\vec{w}\,(x) + \nabla\zeta(x)\;\times\;\vec{b}\,(x), \tag{18}$$

где $\zeta(x)$ – "срезающая функция Хопфа" того же типа, что в [3], гл. V, §4. Она обладает следующими свойствами:

1. $\zeta(x) = 0$ при $\operatorname{dist}(x,\partial\Omega) \geqslant \rho$, $\zeta(x) = 1$ при $\operatorname{dist}(x,\partial\Omega) \leqslant \varepsilon\rho$, $0 \leqslant \zeta(x) \leqslant 1$ $(x \in \Omega, \varepsilon, \rho \ll 1)$

2. Имеет место оценка

$$| \nabla \zeta(x) | \leqslant \frac{\varkappa}{\operatorname{dist}(x, \partial\Omega)}, \quad \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \in (\varepsilon\rho, \rho), \tag{19}$$

где $\varkappa = \frac{c}{\ln \varepsilon^{-1}}$, c – постоянная, не зависящая от ε и ρ (таким образом, $\varkappa$ может быть сделана сколь угодно малой при достаточно малом ε).

3. $| \mathcal{D}^2 \zeta(x) | \leqslant c(\varepsilon, \varkappa)$.

Легко проверить (см. [6]), что в качестве $\zeta(x)$ можно взять функцию

$$\zeta(x) = \chi\left(\varkappa \ln \frac{c\rho}{d(x)}\right),$$

где $\chi(\xi)$ – гладкая функция, равная единице при $\xi \geqslant 1$, нулю при $\xi \leqslant 0$, а $d(x)$ – регуляризованное расстояние от x до $\partial\Omega$ [7].

Из (5) и (15′) следует, что

$$\sup_{\Omega} | \vec{v}\,'(x) | \leqslant \sup_{\Omega} | \vec{w}\,'(x) | + \sup_{\Omega} | \nabla\zeta \times \vec{b}\,(x) | \leqslant c(\varepsilon, \rho) \sup_{\partial\Omega} | \vec{a}\,'(x) |,$$

векторное же поле $\vec{u}\,(x)$ является решением задачи

$$\begin{aligned} &-\nabla^2 \vec{u} + R(\vec{v}\,' \cdot \nabla)\,\vec{u} + R(\vec{u} \cdot \nabla)\,\vec{v}\,' + R(\vec{u} \cdot \nabla)\,\vec{u} = \\ &-\nabla^2 \vec{v}\,' - R(\vec{v}\,' \cdot \nabla)\,\vec{v}, \\ &\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (x \in \Omega), \\ &\vec{u}\big|_{\partial\Omega} = 0, \end{aligned}$$

а значит оно удовлетворяет интегральному тождеству

$$\begin{aligned} Q[u, \vec{\eta}] \equiv \int_{\Omega} \nabla\vec{u} : \nabla\vec{\eta}\, dx + R \int_{\Omega} ((\vec{v}\,' + \vec{u}\,) \cdot \nabla)\ \vec{u} \cdot \vec{\eta}\, dx - \\ -R \int_{\Omega} \vec{u} \otimes \vec{v}\,' : \nabla\vec{\eta}\, dx = \int_{\Omega} \nabla\vec{v}\,' : \nabla\vec{\eta}\, dx + R \int_{\Omega} ((\vec{v}\,' \otimes \vec{v}\,') : \nabla\vec{\eta}\, dx \end{aligned} \tag{20}$$

при любом соленоидальном $\vec{\eta} \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Преобразуем первый интеграл правой части. В силу (18),

$$\int_{\Omega} \nabla\vec{v}\,' : \nabla\vec{\eta}\, dx = \int_{\Omega} (\nabla\vec{v}\,'' : \nabla\vec{\eta} + \vec{w} \cdot (\nabla\zeta \cdot \nabla)\,\vec{\eta})\ dx + \int_{\Omega} \zeta\nabla\ \vec{w}\ : \nabla\vec{\eta}\, dx,$$

где $\vec{v}'' = \nabla\zeta \times \vec{b}$. Далее, так как $\vec{w}$ является решением задачи (4), то

$$\int\limits_\Omega \zeta \nabla \vec{w} \,:\, \nabla\vec{\eta}\, dx = -\int\limits_\Omega \left((\nabla\zeta\cdot\nabla)\,\vec{w}\,\right)\cdot\vec{\eta}\, dx - \int\limits_\Omega \nabla s\cdot\zeta\vec{\eta}\, dx =$$

$$\int\limits_\Omega s(\nabla\zeta\cdot\vec{\eta})\, dx + \int\limits_\Omega \vec{w}\,\left[(\nabla\zeta\cdot\nabla)\,\vec{\eta} + \vec{\eta}\,\nabla^2\zeta\right]\, dx.$$

Таким образом, (20) может быть записано в виде

$$Q[\vec{u},\vec{\eta}] = L[\vec{\eta}],$$

где

$$L[\vec{\eta}] = \int\limits_\Omega s(\nabla\zeta\cdot\vec{\eta})\, dx + \int\limits_\Omega \vec{w}\,\cdot\left[2(\nabla\zeta\cdot\nabla)\,\vec{\eta} + \vec{\eta}\,\nabla^2\zeta\right]\, dx +$$

$$\int\limits_\Omega \nabla(\nabla\zeta\times\vec{b}) : \nabla\,\vec{\eta}\, dx + R\int(\vec{v}\,'\otimes\vec{v}\,') : \nabla\,\vec{\eta}\, dx.$$

Положим здесь $\vec{\eta} = \vec{u}$ Легко видеть, что

$$Q[\vec{u},\vec{u}] = \|\nabla\vec{u}\|^2_{L_2(\Omega)} - R\int\limits_\Omega \vec{u}\otimes\vec{v}\,' : \nabla\,\vec{u}\, dx.$$

Вследствие (5), (9), (18) и (19), имеет место неравенство

$$\left|\int\limits_\Omega \vec{u}\otimes\vec{v}\,' : \nabla\vec{u}\, dx\right| \leqslant \sup_\Omega |\,\vec{w}\,(x)\,| \int\limits_\Omega |\,\vec{u}\,|\,|\,\nabla\vec{u}\,|\,\zeta\, dx +$$

$$+\varkappa \sup_\Omega |\,\vec{b}\,(x)\,| \int \frac{|\,\vec{u}\,|\,|\,\nabla\vec{u}\,|\, dx}{\operatorname{dist}(x,\partial\Omega)} \leqslant$$

$$c\left(\rho\sup_\Omega |\,\vec{w}\,(x)\,| + \varkappa\sup_\Omega |\,\vec{b}\,(x)\,|\right)\|\nabla\,\vec{u}\,\|^2_{L_2(\Omega(} \leqslant$$

$$c_1(\rho+\varkappa)\sup_{\partial\Omega} |\,\vec{a}\,(x)\,|\;\|\nabla\vec{u}\,\|^2_{L_2(\Omega)}$$

с постоянной c_1, не зависящей от ρ и ε. Поэтому, если выбрать ρ и $\varkappa$ настолько малыми, что

$$c_1\, R(\rho+\varkappa)\sup_{\partial\Omega} |\,\vec{a}\,(x)\,| \leqslant 1/2,$$

то

$$Q[\vec{u},\vec{u}] \geqslant \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega)}. \tag{21}$$

Далее, для $L[\vec{u}]$ справедлива оценка

$$|\, L[\vec{u}]\,| \leqslant c(\varepsilon,\rho)\big[\|\,\vec{u}\|_{L_2(\Omega)}\big(\|s\|_{L_2(\omega)} + \sup_{\Omega}|\,\vec{w}\,(x)\,|\,\big) +$$

$$+\|\nabla\vec{u}\,\|_{L_2(\Omega)}\big(\|\,\vec{b}\,\|_{W_2^1(\omega)} + \sup_{\Omega}|\,\vec{w}\,(x)\,|\,\big)\big] + R\|\,\vec{v}\,'\|^2_{L_4(\Omega)}\,\|\nabla\vec{u}\,\|_{L_2(\Omega)},$$

где $\omega = \operatorname{supp}\nabla\zeta$. Так как $\operatorname{dist}(\omega,\partial\Omega) \geqslant \varepsilon\rho$, то вследствие (5), (6), (9)

$$|\, L[\vec{u}]\,| \leqslant c_2(\varepsilon,\rho)\left(\sup_{\partial\Omega}|\,\vec{a}\,(x)\,| + \sup_{\partial\Omega}|\,\vec{a}\,(x)\,|^2\right)\|\nabla\vec{u}\|_{L_2(\Omega)}.$$

Из этой оценки и из (21) следует

$$\|\nabla\vec{u}\,\|_{L_2(\Omega)} \leqslant 2c_2(\varepsilon,\rho)\left(\sup_{\partial\Omega}|\,\vec{a}\,(x)\,| + \sup_{\partial\Omega}|\,\vec{a}\,(x)\,|^2\right).$$

Очевидно, такое же неравенство справедливо и для $\|\,\vec{u}\|_{L_6(\Omega)}$. Таким образом,

$$\|\,\vec{v}\|_{L_6(\Omega)} \leqslant \|\,\vec{v}\,'\|_{L_6(\Omega)} + \|\,\vec{u}\,\|_{L_6(\Omega)} \leqslant c_3(\sup_{\partial\Omega}|\,\vec{a}\,(x)\,|),$$

что вместе с (17) влечет за собой (1).

Неравенство (1) справедливо и в случае, когда $\partial\Omega$ распадается на конечное число связных компонент: $\partial\Omega = \bigcup\limits_{j=1}^{m} S_j$ и

$$\int\limits_{S_j} \vec{a}\cdot\vec{n}\,ds = 0, \quad j = 1,\ldots,m. \tag{22}$$

Оценка (5) для таких областей доказана независимо П. Маремонти, а также П. Галди и В. Фарнхорном. Предложение 2 при условии (22) остается в силе. Обозначим через Ω_j ограниченную область с $\partial\Omega_j = S_j$ и предположим, что $\Omega_m \supset \Omega\cup\Omega_1\cup\ldots\cup\Omega_{m-1}$. Тогда задача (13) эквивалентна совокупности $m-1$ внутренних задач (для $\Omega_1,\ldots,\Omega_{m-1}$ и внешней задачи для $\mathbb{R}^3\setminus\Omega_m$; неравенство (14) остается в силе. Векторное поле $\vec{w}_1(x)$ следует определить формулой (12) в области $\Omega'_m \subset \mathbb{R}^3\setminus\Omega_m$, ограниченной S_m и сферой $|x-x_0| = R$, а в $\Omega_1,\ldots,\Omega_{m-1}$ положить $\vec{w}_1\,(x) = \vec{w}_2\,(x)$; при этом оценка (11) сохранится. Наконец, $\vec{b}\,(x)$ следует определить

формулой (15) с $\Omega' = \Omega_1 \cup \ldots \cup \Omega_{m-1} \cup \cup\Omega'_m$. Остальные рассуждения такие же, как выше; необходимые оценки тензора Грина следуют из общих результатов работы [8].

В заключение отметим, что представление (16) и неравенство (1) дают возможность оценить производные решения задачи (2) в любой точке $x \in \Omega$ через $\operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$ и $\max\limits_{\partial\Omega} |\, \vec{a}\,(x)\,|$. Кроме того, рассуждения, проведенные при доказательстве оценки (1), доказывают разрешимость задачи (2) при $\vec{a} \in C(\partial\Omega)$, удовлетворяющем условию (22).

Литература

1. R. Finn, V. Solonnikov, *Gradient estimates for solution of the Navier–Stokes equations.* Submitted to Topol. Meth. Nonlinear Anal..
2. F. K. G. Qdquist, *Über die Randwertaufgaben der Hydrodynamik zäher Flüssingkei ten.* — Math. Zeithschrift **32** (1930), 329–375.
3. О. А. Ладыженская, *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости.* Наука, М., 1970 288с.
4. Н. М. Гюнтер, *Теория потенциала и ее применения к основным задачам математической физики.* Гостехиздат 1953.
5. О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, *О некоторых задачах векторного анализа и об обобщенных постановках краевых задач для уравнений Навье–Стокса.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **59** (1976), 81–116.
6. В. А. Солонников, К. Пилецкас, *О некоторых пространствах соленоидальных векторов и о разрешимости краевой задачи для системы уравнений Навье–Стокса в областях с некомпактными границами.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **73** (1977), 136–151.
7. E. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions.* Princeton Univ. Press, New York 1970.
8. В. А. Солонников, *О матрицах Грина для эллиптических и параболических краевых задач.* I: Труды МИАН СССР, **110**, (1970) 107–145; II: Труды МИАН СССР, **116**, (1971) 181–216.

Solonnikov V. A. On the estimate of maximum modulus of solution of stationary problem for the Navier–Stokes equations.

It is shown that the solution of a nonlinear stationary problem for the Navier–Stokes equations in a bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ with the boundary conditions $\vec{v}|_{\partial\Omega} = \vec{a}(x)$ satisfies the inequality

$$\sup_{x\in\Omega} |\, \vec{v}\,(x)\,| \leqslant c \left(\sup_{x\in\partial\Omega} |\, \vec{a}(x)\,| \right)$$

for arbitrary Reynolds number.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 12 апреля 1997 г.