В. И. Мысовских

ТЕСТИРОВАНИЕ ПОДГРУПП КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ НА СВОЙСТВАХ ВЛОЖЕНИЯ ТИПА ПРОНОРМАЛЬНОСТИ

§1. Введение

В теории расположения промежуточных подгрупп, развитой З. И. Боревичем в работах [1–3], имеется несколько важных нерешенных проблем. До сих пор неизвестно, будет ли всякая полинормальная подгруппа конечной группы также и паранормальной. Не удалось ни доказать, ни опровергнуть гипотезу об эквивалентности этих свойств в классе разрешимых групп (см. [1]). Поэтому представляется естественным исследование подобных вопросов на фактическом материале. С этой целью в настоящей заметке описываются некоторые алгоритмы для тестирования подгрупп конечной группы на следующие свойства вложения: абнормальность, пронормальность и их слабые аналоги, поли- и паранормальность, слабая нормальность (в смысле К. Г. Мюллера, [6]).

Предлагаемый здесь метод позволяет избежать нахождения решетки $L(G)$ всех подгрупп рассматриваемой группы G и максимально сократить число испытываемых элементов группы. Разработанные алгоритмы реализованы в виде программ в рамках системы компьютерной алгебры GAP [7] и могут быть получены при помощи соответствующих ftp-серверов (Aachen и St. Andrews) или от автора. Эти программы универсальны, т.е. применимы ко всем типам групп, реализованных в GAP (группы подстановок, матричные группы, fp-группы, AG-группы). Однако наибо-

Часть работы выполнена во время пребывания автора на кафедре Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen. Автор крайне признателен Deutsche Forschungsgemeinschaft за финансовую поддержку визита (грант “Algorithmische Zahlentheorie und Algebra”) и сердечно благодарит профессора J. Neubüser'a и его коллег с LDFM за гостеприимство и прекрасные условия для работы.

лее эффективно их использование в случае неразрешимой группы G, поскольку в разрешимой ситуации возможна дополнительная редукция при помощи факторизации по нормальным делителям. Учитывая высокую вычислительную сложность исходной задачи a priori, реальные вычисления могут быть выполнены для групп, порядок которых не превышает нескольких сотен тысяч.

§2. Свойства вложения подгруппы в группу

Напомним обозначения и основные определения. Пусть G – группа. Рассмотрим подгруппу $D \leqslant G$. Для элемента $x \in G$ через $D^x = x^{-1}Dx$ обозначаем подгруппу, сопряженную с D при помощи x. В качестве знака порождения мы используем угловые скобки, а для подмножества $M \subset G$, содержащего единицу группы, обозначаем $D^M = \langle D^m : m \in M \rangle$. В частности, для промежуточной подгруппы $H : D \leqslant H \leqslant G$ определено нормальное замыкание D^H, т.е. наименьший нормальный делитель в H, содержащий D. Нормализатор подгруппы D в G обозначаем $N = N_G(D)$.

Определение 1. *Промежуточная подгруппа $H : D \leqslant H \leqslant G$ называется D-полной, если $D^H = H$, т.е. в H нет собственных нормальных делителей, содержащих D.*

Определение 2. *Подгруппа D называется паранормальной в G, если для всякого $x \in G$ подгруппа $\langle D, D^x \rangle$ является D-полной.*

Определение 3. *Подгруппа D называется пронормальной в G, если для любого $x \in G$ подгруппы D и D^x сопряжены уже́ в своем порождении $\langle D, D^x \rangle$.*

Определение 4. *Подгруппа D называется абнормальной в G, если для всякого $x \in G$ выполнено включение $x \in \langle D, D^x \rangle$.*

Определение 5. *Подгруппа D называется слабо нормальной в G, если для $\forall\, x \in G$ из $D^x \leqslant N_G(D)$ следует равенство $D^x = D$, т.е. D – единственная из сопряженных, лежащих в нормализаторе.*

Заменяя в определениях 2–4 подгруппу $\langle D, D^x \rangle$ на бóльшую $D^{\langle x \rangle}$, получим определения полинормальности, слабой пронормальности и слабой абнормальности соответственно. Имеются эквивалентные определения указанных свойств в терминах решетки промежуточных подгрупп $L(D, G)$, но они нас не устраивают с вычислительной точки зрения.

§3. Первоначальная версия алгоритмов

Прежде всего отметим связь понятий абнормальности и пронормальности, содержащуюся в следующем хорошо известном утверждении.

Предложение 1. *Подгруппа D абнормальна в G тогда и только тогда, когда она пронормальна в G и самонормализуема, т.е. $N_G(D) = D$.*

Этот факт позволяет ограничиться рассмотрением пронормальности. Проверка последнего свойства на компьютере упрощается при следующей переформулировке.

Предложение 2. *Подгруппа D пронормальна в G тогда и только тогда, когда для всякого $x \in G$ выполнено $\langle D, D^x \rangle \cap Nx \neq \varnothing$, (здесь $N = N_G(D)$, Nx – правый смежный класс).*

Для дальнейшей редукции рассмотрим правую трансверсаль T группы G по нормализатору N, т.е. множество, содержащее ровно по одному представителю каждого правого смежного класса. Легко видеть, что для разных представителей x, y из одного класса Nx имеем равенство $D^x = D^y$. Отсюда вытекает справедливость следующих утверждений.

Предложение 3. *Подгруппа D пронормальна в G тогда и только тогда, когда для $\forall\, t \in T : \langle D, D^t \rangle \cap Nt \neq \varnothing$.*

Предложение 4. *Подгруппа D паранормальна в G, если и только если для $\forall\, t \in T$ подгруппа $\langle D, D^t \rangle$ является D-полной.*

Использование этих предложений уменьшает перебор в $|N|$ раз. Осталось отметить, что в системе GAP имеются эффективные функции Normalizer для вычисления нормализатора, сопряженных подгрупп (ConjugateSubgroup), нормального замыкания (NormalClosure) и правой трансверсали RightTransversal (G, N). Все это и послужило основой для первоначальной версии программ для тестирования подгрупп на пронормальность, паранормальность и абнормальность. Слабые свойства (полинормальность и слабая пронормальность) не допускают указанной выше редукции, имеется пример подгруппы D в конечной группе G, что для $y \in Nx$ соответствующие подгруппы $D^{\langle x \rangle}$ и $D^{\langle y \rangle}$ не совпадают. Поэтому для них мы используем гомоморфизм G в группу подстановок на множестве Ω всех сопряженных с D в G

подгрупп. Затем для каждой орбиты выполняются надлежащие вычисления. Эти программы работают значительно медленнее рассмотренных выше.

§4. Двойные смежные классы и дальнейшая редукция

Весной этого года удалось обнаружить простую, но никем ранее не замеченную связь между подгруппами вида $\langle D, D^x \rangle$ и разложением группы G на двойные смежные классы относительно подгрупп N и D. Именно, подгруппы такого вида постоянны на этих двойных смежных классах.

Предложение 5. *Если $y \in NxD$, то совпадают подгруппы $\langle D, D^x \rangle = \langle D, D^y \rangle$.*

Доказательство. Поскольку $y \in NxD$, то имеет место равенство $y = nxd$, где $n \in N$, $d \in D$. В следующей оценке используем свойства нормализатора и системы образующих:

$$\langle D, D^y \rangle = \langle D, D^{nxd} \rangle = \langle D, D^{xd} \rangle \leqslant \langle D, D^x, d \rangle = \langle D, D^x \rangle.$$

Из равенства $x = n^{-1} y d^{-1}$ получается обратное включение. Итак, $\langle D, D^x \rangle = \langle D, D^y \rangle$ и предложение 5 доказано.

Обозначим через W систему представителей двойных смежных классов группы G относительно N и D (называем ее трансверсалью G по N и D). Из предыдущего предложения и §3 вытекают утверждения, обеспечивающие дальнейшее сокращение перебора примерно в $|D|$ раз.

Теорема 1. *Подгруппа D пронормальна в G тогда и только тогда, когда для $\forall\ w \in W$ имеем $\langle D, D^w \rangle \cap Nw \neq \varnothing$.*

Теорема 2. *Подгруппа D паранормальна в G, если и только если для $\forall\ w \in W$ подгруппа $\langle D, D^w \rangle$ является D-полной.*

Эти результаты вместе с эффективным алгоритмом для нахождения какой-либо трансверсали W группы G по N и D, который реализован в системе GAP, образуют основу модифицированных алгоритмов для тестирования подгрупп на упомянутые свойства вложения. Тесты IsPolynormal и IsWeaklyPronormal таким путем улучшены быть не могут.

В заключение отметим, что наиболее простым для компьютерной проверки свойством является слабая нормальность: достаточно вычислить нормализатор, правую трансверсаль по нему

и для каждой из сопряженных подгрупп использовать стандартную GAP-функцию IsSubgroup. С другой стороны, известно [4], что для p-подгруппы D в G слабая нормальность эквивалентна пронормальности. Это обстоятельство существенно упрощает тестирование p-подгрупп на свойства вложения.

Литература

1. М. С. Ба, З. И. Боревич, *О расположении промежуточных подгрупп.* — Кольца и линейные группы. Сб. научн. трудов. Краснодар (1988), 14–41.
2. З. И. Боревич, *О расположении подгрупп.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **94** (1979), 5–12.
3. З. И. Боревич, О. Н. Мацедонская, *О решетке подгрупп.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **103** (1980), 13–19.
4. П. В. Гаврон, Л. Ю. Колотилина, *О подгруппах в T-группах.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **103** (1980), 62–65.
5. B. Huppert, *Endliche Gruppen I.* Springer-Verlag (1967).
6. K. H. Müller, *Schwachnormale Untergruppen: eine gemeinsame Verallgemeinerung der normalen und normalisatorgleichen Untergruppen.* — Rend. Semin. Mat. Univ. Padova **36** (1966), 129–157.
7. M. Schönert et al, *GAP-Groups, Algorithms and Programming.* Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH, Aachen, Germany, fitfh edition (1995).

Mysovskikh V. I. Testing subgroups of a finite group on some embedding properties like pronormality.

We describe here algorithms for testing subgroups of a finite group on the following embedding properties: pronormality, abnormality, paranormality and their weak analogies. The method is based on a decomposition of the main group on some double cosets. These algorithms are realized in computer algebra system GAP.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 11 ноября 1997 г.