Reprints in Theory and Applications of Categories, No. 19, 2010, pp. 1–38.

2-CATÉGORIES RÉDUCTIBLES

DOMINIQUE BOURN ET JACQUES PENON

Originally published as: 2-Catégories Réductibles, January 1978
Received by the editors 2010-04-22.
Transmitted by S. Lack, R. Street and R.J. Wood. Reprint published on 2010-11-05.
2000 Mathematics Subject Classification: 18A32,18B25,18C15,18D05,18D35.
Key words and phrases: internal category, 2-category, effective profunctorial monad, 2-topos.

Foreword

You will find here a typeset version of a preprint published by the Mathematics Department of the University of Amiens. It was not published elsewhere because it was too long and written in French, and for this reason it may have remained relatively unknown. There is no precise date on the cover, however it is cited in [4] as being published in January 1978. The authors think that one of them gave a talk on this matter during the summer category meeting in 1977 or 1978. On seeing the talk [3] of John Bourke at the CT09 meeting in Cape-Town which was based on a similar starting point, they thought that this old preprint could once again be of interest. The authors are very grateful to the editors of Theory and Applications of Categories for the possibility of publishing this reprint and so allow these somewhat inaccessible old results to circulate once again.

English summary

It is well known that, in the category **Set** of sets, pulling back a mapping $f : X \to Y$ along itself :

$$\begin{tikzcd} X \times_Y X \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

produces an equivalence relation on the set X which determines a bijection between the equivalence relations on X and the surjections with domain X.

The starting point of this work was the observation that a similar phenomenon does exist in the 2-category **Cat** of categories if we replace the pullback by the "comma" construction of the functor f with itself :

$$\begin{tikzcd} X/_Y X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\swarrow"] & X \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

This induces a bijection between the profunctorial monads on the category X and the "bijective on objects" functors with domain X, see also [15] in the bibliography.

Our first point (Section I.1) is to investigate those 2-categories in which this bijection still holds. For that consider a finitely complete 2-category $\mathbb{K}$, i.e. having enriched finite limits in **Cat** and, for any object X, a 2-cell classifier $X^{\underline{2}}$, i.e. a context in which it is possible define an internal profunctor (*distributeur* in French) $X \nrightarrow Y$ as a discrete bifibration $X \leftarrow Z \to Y$. In such a 2-category, an object Z is called *discrete* when the factorization $Z \to Z^{\underline{2}}$ is an isomorphism and *coarse (= grossier)* when this is the case for the factorization $Z^{\underline{2}} \to Z \times Z$. We denote respectively by $Di(\mathbb{K})$ and $Gr(\mathbb{K})$ the subcategories of discrete and coarse objects in $\mathbb{K}$. A map $h : U \to V$ in $\mathbb{K}$ is called *coarsely* *invertible* when, for any coarse object Z, the functor $\mathbb{K}(h, Z) : \mathbb{K}(V, Z) \to \mathbb{K}(U, Z)$ is isomorphic.

We define a *catéade* in $\mathbb{K}$ as an internal category :

$$\begin{tikzcd} C_1 \arrow[r, shift left=2, "d_1"] \arrow[r, shift right=2, "d_0"'] & C_0 \arrow[l, "s_0" description] \end{tikzcd}$$

such that the pair (d_0, d_1) is underlying an internal profunctor, and denote by $\mathbf{Kat}(\mathbb{K})$ the full sub-2-category of $\mathbf{Cat}(\mathbb{K})$ whose objects are the catéades. Any map $f : X \to Y$ in $\mathbb{K}$ produces a catéade by the previous comma construction. In particular the map $1_X : X \to X$ produces the canonical catéade :

$$\begin{tikzcd} X^{\underline{2}} \arrow[r, shift left=2, "\mathsf{dom}"] \arrow[r, shift right=2, "\mathsf{cod}"'] & X \arrow[l] \end{tikzcd}$$

and a 2-functor $\Delta : \mathbb{K} \to \mathbf{Kat}(\mathbb{K})$. We then call :

Axiom R-1 : *The* 2*-functor* Δ *has a left exact* 2*-left adjoint functor* Q.

Then Proposition I.1.9 asserts (inter alia) that axiom R-1 implies that any catéade is effective and universal, and that any map $f : X \to Y$ in $\mathbb{K}$ can be canonically decomposed into a fully faithful map and a coarsely invertible map.

In Section I.2, we define an *anéade* in $\mathbb{K}$ as an internal category :

$$\begin{tikzcd} C_1 \arrow[r, shift left=2, "d_1"] \arrow[r, shift right=2, "d_0"'] & C_0 \arrow[l, "s_0" description] \end{tikzcd}$$

endowed with a 2-cell $\theta : d_0 \Rightarrow d_1$ satisfying some natural coherence axioms and such that the factorization map $C_1 \to C_0^{\underline{2}}$ induced by the 2-cell θ is fully faithful.

The following diagram :

$$\begin{tikzcd} X^{\underline{2}} \arrow[r, shift left=2, "\mathsf{dom}"] \arrow[r, shift right=2, "\mathsf{cod}"'] & X \arrow[l] \end{tikzcd}$$

is underlying a canonical anéade in $\mathbb{K}$. A morphism of anéades is an internal functor which commutes with the 2-cells θ, and a 2-morphism is a coherent internal natural transformation. We denote by $An(\mathbb{K})$ the 2-category of anéades in $\mathbb{K}$, and still by $\Delta : \mathbb{K} \to An(\mathbb{K})$ the 2-functor induced by the example above. We then introduce :

Axiom R-2 : *This* 2*-functor* Δ *has a* 2*-right adjoint functor* N.

Then Propositions I.2.7 and I.2.8 emphasize some important internal consequences of axiom R-2.

Section I.3 culminates with the characterization of those finitely complete 2-categories $\mathbb{K}$ which satisfy R-1 and R-2 (Theorem I.3.2) :

A finitely complete 2*-category* $\mathbb{K}$ *satisfies axioms* R-1 *and* R-2 *if and only if it is left-exactly (i.e. with a left exact* 2*-endofunctor) comonadic above a* 2*-category of the form* $\mathbf{Cat}(\mathbb{E})$*, where the category* $\mathbb{E}$ *is a finitely complete category.*

Whence the terminology of *reducible* 2*-category* for such a kind of 2-category $\mathbb{K}$. Starting with a reducible 2-category $\mathbb{K}$, the category $\mathbb{E}$ in question in the previous theorem is nothing but the category $Gr(\mathbb{K})$ of coarse objects in $\mathbb{K}$.

Section II.1 is devoted to the characterization and to the properties of those reducible 2-categories $\mathbb{K}$ whose category $\mathbb{E}$ in the above theorem is a topos ; accordingly, such a 2-category is called a 2*-topos*. In such a setting profunctors become composable (Proposition II.1.7). In Section II.2 the left exact idempotent monads on a 2-topos are characterized (Theorem II.2.5), essentially in terms of closure operator on fully faithful subobjects.

An appendix shows how the categories $\mathbf{Kat}(\mathbb{K})$ and $\mathbf{An}(\mathbb{K})$ of catéades and anéades of $\mathbb{K}$ can be obtained from two (dual and symmetrical) universal constructions on the monad on 2-$\mathbf{Cat}$ (or more precisely on the subcategory $Comp_f$ of finitely complete 2-categories and left exact 2-functors) whose endofunctor associates $\mathbf{Cat}(\mathbb{D})$ with the 2-category $\mathbb{D}$.

INTRODUCTION

L'étude récente des 2-catégories, de catégories enrichies, de catégories internes, de catégories fibrées, de champs ou même de topos, nous fait de plus en plus sentir la nécessité de se pencher sur les 2-catégories (ou même peut-être les bicatégories) d'une façon générale. Guidés par les travaux antérieurs de W. Lawvere [12], tout d'abord puis de J. Gray [9] R. Street [14] et D. Bourn [5], nous avons cherché à mettre en évidence de nouvelles propriétés de **Cat**. Deux, surtout, ont retenu notre attention.

1ère propriété : Laissons-nous conduire, pour cela, par la propriété, bien connue de la catégorie **Ens** :
A toute flèche $A \to B$ de celle-ci on peut, en effet, associer la relation d'équivalence sur A :

$$A \times_B A \rightrightarrows A$$

qui est obtenue par la composition de $A \to B$ avec la relation inverse $B - - > A$; et il existe une correspondance bijective :

$$\begin{array}{c|c} \text{relation d'equivalence} & \text{surjection de} \\ \text{sur A} & \text{source A} \end{array}$$

D'une façon analogue, dans **Cat**, on peut associer, à toute flèche $A \to B$, une monade sur A dans les distributeurs [2] qui est obtenue par la composition de $A \to B$ avec le distributeur adjoint à droite $A - - > B$. Or, il est utile de regarder les monades dans **Dist** (que nous appellons catéades) comme des catégories internes C dans **Cat** pour lesquelles : $C_0 \overset{\mathsf{dom}}{\leftarrow} C_1 \overset{\mathsf{cod}}{\to} C_0$ soit un distributeur. Dans la situation précédente la catégorie interne déterminée par $A \to B$ est :

$$A/_B A \rightrightarrows A$$

On constate alors l'existence d'une correspondance bijective [15] :

$$\begin{array}{c|c} \text{Monade sur A} & \text{Foncteur bijectif sur les objets} \\ \text{dans les distributeurs} & \text{de source A} \end{array}$$

Cependant cette propriété peut s'exprimer plus avantageusement en disant que le 2-foncteur canonique :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Cat} & \longrightarrow & \mathbf{Catéades} \\ A & \longmapsto & (A^3 \longrightarrow A^2 \rightrightarrows A) \end{array}$$

admet un adjoint à gauche exact à gauche. En effet, l'exactitude à gauche permet d'exprimer, entre autre, de façon plus synthétique, le fait que, comme les relations d'équivalences dans **Ens**, les catéades sont effectives et que leur effectivité est universelle.

2ème propriété : Comme nous le savons, dans **Cat**, l'existence de limites projectives et de $(\ )^{\mathbf{2}}$ permet de construire, pour toute catégorie $\mathbb{C}$ ayant suffisamment de limites, la catégorie $\mathsf{Alg}(\mathbb{T},\mathbb{C})$ pour une théorie algébrique $\mathbb{T}$. Par contre elle ne permet pas la construction des catégories suivantes :

$$\begin{array}{lll} |\mathrm{C}| & = & \text{catégorie discrète des objets de C,} \\ \mathsf{Iso}(\mathrm{C}) & = & \text{sous-catégorie de } C \text{ ayant pour flèches} \\ & & \text{les isomorphismes de C,} \\ \mathsf{Mono}(\mathrm{C}) & = & \text{sous-catégorie de } C \text{ ayant pour flèches} \\ & & \text{les monomorphismes de C,} \end{array}$$

etc.

Aussi, afin de résoudre ce problème, sommes-nous amenés à considérer le nouveau concept d'anéade ("dual", dans un certain sens, de celui de catéade). Une anéade $\mathbb{A}$ est une catégorie interne $\mathbb{A}$ dans **Cat** (ou plus généralement dans une 2-catégorie quelconque) munie d'une 2-flèche $A_1 \underset{\mathsf{cod}}{\overset{\mathsf{dom}}{\overset{\Downarrow}{\rightrightarrows}}} A_0$ astreinte à des conditions de cohérence avec la structure de catégorie interne de A et pour laquelle la flèche $A_1 \to A_0^{\mathbf{2}}$ est pleinement fidèle. La deuxième propriété s'exprime alors en disant que le 2-foncteur

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Cat} \arrow[rr] & & \textbf{Anéades} & \\
A \arrow[r, mapsto] & (A^{\mathbf{3}} \arrow[r] & A^{\mathbf{2}} \arrow[r, shift left=2] \arrow[r, shift right=2] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & A)
\end{tikzcd}$$

admet un adjoint à droite.

Pour une 2-catégorie finiment complète le cumul des deux propriétés décrites précédemment équivaut à dire que ces 2-catégories sont exactement cotriplables sur une 2-catégorie de catégories internes, ce qui est très fort. Ainsi remarque-t-on, d'une certaine façon, que leur étude se "réduit" à celles des 2-catégories de catégories internes. Les 2-catégories $\mathbf{Cat}^{\mathbb{D}}$ de 2-préfaisceaux sur $\mathbb{D}$ pour une 2-catégorie $\mathbb{D}$ quelconque, et plus généralement $\mathsf{Fais}_J(\mathbb{D})$ des J-faisceaux sur $\mathbb{D}$ pour une topologie de Grothendieck J sur la catégorie sous-jacente à $\mathbb{D}$ en sont des exemples. Peut-être nous reprochera-t-on d'avoir envisagé la question d'une façon trop "stricte". La 2-catégorie des catégories fibrées non nécessairement scindées (au-dessus d'une catégorie donnée) n'a pas, par exemple, de produits fibrés, à strictement parler, mais seulement des "pseudo-produits fibrés". Aussi dans un deuxième temps faudra-t-il "assouplir" ce que nous avons décrit ici afin d'élargir sensiblement le nombre des exemples.

PRELIMINAIRE

(P - 1) - Si $\mathbb{D}$ est une 2-catégorie, on notera $\underline{\mathbb{D}}$ sa catégorie sous-jacente. D'autre part $\mathbb{E}$ étant une catégorie à limites projectives finies, on notera $\mathbf{Cat}(\mathbb{E})$ la 2-catégorie des catégories internes dans $\mathbb{E}$.

(P - 2) - Fixons-nous, à partir de maintenant, une 2-catégorie $\mathbb{K}$ qui est *finiment complète* (i.e. qui possède des limites projectives finies enrichies dans **Cat** et, pour tout objet A de $\mathbb{K}$, un objet noté $A^{\mathbf{2}}$ et un isomorphisme naturel (en X) :

$$\mathbb{K}(X, A^{\mathbf{2}}) \simeq \mathbb{K}(X, A)^{\mathbf{2}}$$

$\mathbb{L}$ étant une autre 2-catégorie finiment complète, un 2-foncteur $F : \mathbb{K} \to \mathbb{L}$ est dit *exact* (à gauche) si

1) il préserve les limites projectives finies,

2) pour tout objet A de $\mathbb{K}$, la flèche canonique $F(A^{\mathbf{2}}) \to (FA)^{\mathbf{2}}$ est une isomorphisme.

Ainsi on dira qu'une monade ou qu'une comonade est exacte si son endofoncteur est exact. Une 2-catégorie exactement cotriplable est (donc) une 2-catégorie cotriplable telle que la comonade qu'elle définit est exacte.

(P - 3) - Un objet A de $\mathbb{K}$ est dit :

1. *discret*, si la flèche canonique $A \rightarrowtail A^{\mathbf{2}}$ est inversible ;
2. *grossier*, si la flèche $[\mathsf{dom}, \mathsf{cod}] : A^{\mathbf{2}} \to A \times A$ est inversible.

Notons $\mathsf{Di}(\mathbb{K})$ et $\mathsf{Gr}(\mathbb{K})$ les sous-2-catégories pleines de $\mathbb{K}$ ayant pour objets respectivement les objets discrets et les objets grossiers de $\mathbb{K}$.

Une flèche $A \to B$ de $\mathbb{K}$ est *fidèle* (resp. *pleinement fidèle*) si pour tout objet X de $\mathbb{K}$ le foncteur

$$\mathbb{K}(X, A) \to \mathbb{K}(X, B)$$

est fidèle (resp. pleinement fidèle).

(P - 4) - A et B étant deux objets de $\mathbb{K}$, considérons sur la 2-catégorie $\mathsf{Span}(A, B)$ des "spans" de A dans B la monade T dont l'endofoncteur associe à tout span $A \leftarrow S \to B$ le span composé

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & A^{\mathbf{2}} \arrow[dl] \arrow[dr] & & S \arrow[dl] \arrow[dr] & & B^{\mathbf{2}} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ A & & A & & B & & B. \end{tikzcd}$$

Les algèbres de cette monade sont les *bifibrations scindées* (ou bimodules) de A dans B (voir [14]). Notons $\mathsf{Bifib}(A, B)$ la 2-catégorie $\mathsf{Alg}_T(\mathsf{Span}(A, B))$. On note aussi $\mathsf{Fib}_A(\mathbb{K}) = \mathsf{Bifib}(A, 1)$ et $\mathsf{Cofib}_B(\mathbb{K}) = \mathsf{Bifib}(1, B)$.

Un *distributeur* de A dans B est un objet discret de $\mathsf{Bifib}(A, B)$. On notera alors $\mathsf{Dist}(A, B)$ la sous-2-catégorie pleine de $\mathsf{Bifib}(A, B)$ ayant pour objets les distributeurs. Notons enfin :

$\mathsf{Fibdi}_A(\mathbb{K}) = \mathsf{Di}[\mathsf{Fib}_A(\mathbb{K})] = \mathsf{Dist}(A,1)$ (fibration discrète au dessus de A)
$\mathsf{Cofibdi}_B(\mathbb{K}) = \mathsf{Di}[\mathsf{Cofib}_B(\mathbb{K})] = \mathsf{Dist}(1,B)$ (cofibration discrète au dessus de B).

(P - 5) *Remarque* :
1) Notons T_g la monade sur $\mathsf{Span}(A,B)$ dont l'endofoncteur associe à tout span $A \leftarrow S \rightarrow B$ le span composé :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & A^{\mathbf{2}} \arrow[dl] \arrow[dr] & & S \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ A & & A & & B \end{tikzcd}$$

et dont la catégorie des algèbres est $\mathsf{Fib}_A(\mathbb{K})/(A \times B \rightarrow A)$, et notons T_d la monade dont l'endofoncteur associe à tout span $A \leftarrow S \rightarrow B$ le span composé :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & S \arrow[dl] \arrow[dr] & & B^{\mathbf{2}} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ A & & B & & B \end{tikzcd}$$

et dont la catégorie des algèbres est $\mathsf{Cofib}_B(\mathbb{K})/(A \times B \rightarrow B)$.

Il est clair que l'on a une loi distributive [1] inversible de T_g vers T_d. En appliquant les résultats de [1] on sait que T_g se relève en une monade sur

$$\mathsf{Alg}_{T_d}(\mathsf{Span}(A,B)) = \mathsf{Cofib}_B(\mathbb{K})/(A \times B \rightarrow B)$$

On vérifie en explicitant cette monade, que c'est celle des fibrations scindées au dessus de $(A \times B \rightarrow B)$. D'autre part, il est clair que la monade composée $T_g.T_d$ (c.f. [1]) est T. D'où l'isomorphisme :

$$\mathsf{Bifib}(A,B) \simeq \mathsf{Fib}_{A\times B\rightarrow B}[\mathsf{Cofib}_B(\mathbb{K})]$$

La loi distributive étant inversible, on a naturellement aussi l'isomorphisme :

$$\mathsf{Bifib}(A,B) \simeq \mathsf{Cofib}_{A\times B\rightarrow A}[\mathsf{Fib}_A(\mathbb{K})]$$

et par conséquent :

$$\mathsf{Dist}(A,B) \simeq \mathsf{Di}(\mathsf{Fib}_{A\times B\rightarrow B}[\mathsf{Cofib}_B(\mathbb{K})]) = \mathsf{Fibdi}_{A\times B\rightarrow B}[\mathsf{Cofib}_B(\mathbb{K})]$$

$$\mathsf{Dist}(A,B) \simeq \mathsf{Di}(\mathsf{Cofib}_{A\times B\rightarrow A}[\mathsf{Fib}_A(\mathbb{K})]) = \mathsf{Cofibdi}_{A\times B\rightarrow A}[\mathsf{Fib}_A(\mathbb{K})]$$

2) La monade T_d (resp. T_g) possède en outre une structure de λ-monade [10] (resp. co-λ-monade) et, par conséquent [10], pour toutes algèbres (A,a) et (B,b) et toute flèche $A \rightarrow B$, il existe une 2-flèche :

$$\begin{tikzcd} T_dA \arrow[r] \arrow[d, "a"'] & T_dB \arrow[d, "b"] \arrow[dl, phantom, "\Swarrow"] \\ A \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

ce qui implique en particulier que si l'objet B est discret, il ne peut y avoir que la seule structure d'algèbre b et que dans ce cas tout morphisme de but B et de source une algèbre (A,a) est un morphisme d'algèbre.

En utilisant la loi distributive inversible du 1) et la remarque précédente on peut en conclure aussi qu'un distributeur est parfaitement défini par la donnée de son span sous-jacent et que tout morphisme d'une bifibration scindée vers un distributeur est automatiquement un morphisme de bifibration scindée.

I - 2-Catégories réductibles

§.1. Catéades et axiome (R 1) : **(1-1)** *Définition* : Une flèche $A \to B$ sera dite *grossièrement inversible* dans $\mathbb{K}$ si, pour tout objet grossier G, le foncteur ci-dessous est un isomorphisme :

$$\mathbb{K}(B, G) \to \mathbb{K}(A, G)$$

(1-2) *Exemple* : Pour $\mathbb{K} = \mathbf{Cat}(\mathbb{E})$ (où $\mathbb{E}$ est une catégorie à limites projectives finies) une flèche $A \to B$ est grossièrement inversible si et seulement si la flèche $A_0 \to B_0$ est inversible dans $\mathbb{E}$ (où A_0 désigne l'objet des objets de A). Ainsi T étant une monade sur une catégorie $\mathbb{C}$ le foncteur de Kleisli : $\mathbb{C} \to Kl_T(\mathbb{C})$ est grossièrement inversible dans **Cat**.

(1-3) *Définition* : Une catéade dans $\mathbb{K}$ est une catégorie interne C dans $\mathbb{K}$ pour laquelle le span $C_0 \overset{\mathsf{dom}}{\leftarrow} C_1 \overset{\mathsf{cod}}{\to} C_0$ est un distributeur.

(1-4) *Exemples* :
1) Toute catégorie interne dans $\mathsf{Di}(\mathbb{K})$ est une catéade de $\mathbb{K}$.
2) Toute flèche $A \to B$ de $\mathbb{K}$ "engendre" une catéade C en prenant l'objet comma suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & C_1 \arrow[dl, "\mathsf{dom}"'] \arrow[dr, "\mathsf{cod}"] & \\
C_0 \arrow[d, equal] & & C_0 \arrow[d, equal] \\
A \arrow[dr] \arrow[rr, phantom, "\Longrightarrow"] & & A \arrow[dl] \\
 & B &
\end{tikzcd}$$

3) dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbf{Cat}$ les catéades de $\mathbb{K}$ sont les monades dans la bicatégorie **Dist** (celle qui a pour flèches les distributeurs).

Preuve du (3) : A étant un objet de **Cat** le foncteur :

$$\mathbf{Dist}(A, A) \longrightarrow \mathbf{Span}(A, A)$$

est pleinement fidèle (voir préliminaire) ; de plus dans **Cat** (et même dans un 2-topos, comme nous le verrons au chapitre II en (1 - 7)), il admet un adjoint à gauche D. Notons :
$I = (A \overset{\mathsf{id}}{\leftarrow} A \overset{\mathsf{id}}{\to} A)$ l'unité dans la catégorie monoidale **Span** (A, A)
$J = (A \overset{\mathsf{dom}}{\leftarrow} A^{\mathbf{2}} \overset{\mathsf{cod}}{\to} A)$ l'unité dans la catégorie monoidale **Dist** (A, A).

De plus, B et B' étant deux distributeurs composables, notons aussi :
$B' \circ_D B$ le composé de B et B' en tant que distributeur
$B' \circ_S B$ le composé de B et B' en tant que span.

On a alors les isomorphismes :

$$\begin{aligned}
J &\simeq D(I) \\
B' \circ_D B &\simeq D(B' \circ_S B) \\
D(B" \circ_S D(B' \circ_S B)) &\simeq D(B" \circ_S B' \circ_S B) \quad \simeq D(D(B" \circ_S B') \circ_S B)
\end{aligned}$$

De ces formules on déduit que D crée une correspondance bijective entre les monades de **Span** (A,A) dont l'endomorphisme est un distributeur (ce sont exactement les catéades sur A) et les monades de **Dist** (A,A).

(1 - 5) Notons **Kat** ($\mathbb{K}$) la sous-2-catégorie pleine de **Cat** ($\mathbb{K}$) ayant pour objets les catéades de $\mathbb{K}$. Notons aussi $\Delta : \mathbb{K} \to \mathbf{Kat}(\mathbb{K})$ le 2-foncteur qui associe à chaque objet A de $\mathbb{K}$ la catéade :

$$A^{\mathbf{3}} \xrightarrow{\mathsf{comp}} A^{\mathbf{2}} \underset{\mathsf{cod}}{\overset{\mathsf{dom}}{\rightrightarrows}} A$$

(1 - 6) *Proposition* :
1) **Kat** ($\mathbb{K}$) est stable dans **Cat** ($\mathbb{K}$) pour les limites projectives finies et la représentation $()^{\mathbf{2}}$.
2) Le foncteur sous-jacent $\underline{\Delta} : \underline{\mathbb{K}} \to \underline{\mathbf{Kat}}(\mathbb{K})$ admet pour adjoint à droite le foncteur d'oubli canonique.

Preuve :
1) C'est un corollaire de (A - 7) et (A - 8).
2) Résulte du fait que $J \simeq D(I)$ (en utilisant les notations du (1 - 4) (3)).

(1 - 7) *Axiome (R 1)* : Le 2-foncteur $\Delta : \mathbb{K} \to \mathbf{Kat}(\mathbb{K})$ admet un adjoint à gauche exact à gauche (on le note Q).

(1 - 8) *Exemples* : les 2-catégories :
1) **Cat** ($\mathbb{E}$), pour toute catégorie $\mathbb{E}$ à limites projectives finies,
2) $\mathbf{Kat}(\mathbb{D})$, pour toute 2-catégorie $\mathbb{D}$ finiment complète,
3) $\mathbf{Cat}^{\mathbb{D}}$ des 2-foncteurs de $\mathbb{D}$ dans **Cat**, pour toute 2-catégorie $\mathbb{D}$,
4) $\underleftarrow{L}(\mathbb{D})$, sous-2-catégorie pleine de $\mathbf{Cat}^{\mathbb{D}}$, ayant pour objets les 2-foncteurs préservant les limites projectives finies,
5) $\mathsf{Fais}_J(\mathbb{D})$, pour toute topologie de Grothendieck J sur $\underline{\mathbb{D}}$, où $\mathbb{D}$ est une petite 2-catégorie (voir Chapitre II, (2 - 3) et remarque I, (3 - 8)).

Preuve :
1) C étant une catéade dans **Cat** ($\mathbb{E}$)) on a :

$$QC = (|C_2| \longrightarrow |C_1| \underset{\mathsf{cod}}{\overset{\mathsf{dom}}{\rightrightarrows}} |C_0|)$$

(pour plus de précision voir (A - 8) et (A - 9))
2) voir (A -10)
3) Q se construit point par point. Mais nous verrons plus loin que ce résultat se déduit du Théorème (3 - 2)
4) En fait $\underleftarrow{L}(\mathbb{D})$ est stable pour l'axiome (R 1) dans $\mathbf{Cat}^{\mathbb{D}}$
5) Voir (II, (2 - 6)).

(1 - 9) *Proposition* : Si $\mathbb{K}$ vérifie (R 1) :
1) les catéades sont effectives (i.e. toute catéade C est engendrée (au sens de (1 - 4) (2))

par la flèche canonique $C_0 \to Q(C)$).
2) l'effectivité des catéades est universelle - i.e. pour toute catéade C et toute flèche $X \to Q(C)$, on a l'isomorphisme suivant :

$$\begin{tikzcd} & C' \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \Delta X \arrow[rr, "\simeq"'] & & \Delta Q(C') \end{tikzcd}$$

où $C' \to \Delta X$ est obtenu par le produit fibré suivant dans **Kat** $(\mathbb{K})$:

$$\begin{tikzcd} C' \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[d] \\ \Delta X \arrow[r] & \Delta Q(C) \end{tikzcd}$$

3) toute flèche $A \to B$ de $\mathbb{K}$ se décompose de façon unique (à isomorphisme près) en : $A \to C \to B$, où $C \to B$ est pleinement fidèle et $A \to C$ est grossièrement inversible.
4) l'inclusion $\mathsf{Gr}(\mathbb{K}) \hookrightarrow \mathbb{K}$ admet un adjoint à gauche G qui préserve les limites projectives finies,
5) une flèche $A \to B$ de $\mathbb{K}$, est pleinement fidèle si et seulement si le carré suivant est un produit fibré :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ GA \arrow[r] & GB \end{tikzcd}$$

6) soit une flèche $A \to B$ de $\mathbb{K}$, alors les conditions suivantes sont équivalentes :
(i) $A \to B$ est grossièrement inversible,
(ii) pour toute flèche pleinement fidèle $X \to Y$ le carré suivant est un produit fibré :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}(B,X) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{K}(A,X) \arrow[d] \\ \mathbb{K}(B,Y) \arrow[r] & \mathbb{K}(A,Y) \end{tikzcd}$$

(iii) $GA \to GB$ est inversible,
(iv) il existe un isomorphisme

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ B \arrow[rr, "\simeq"'] & & Q(C_A) \end{tikzcd}$$

(où C_A désigne la catéade engendrée par $A \to B$)
7) soit le 2-foncteur U composé suivant :

$$\mathbb{K} \overset{\Delta}{\to} \mathbf{Cat}(\mathbb{K}) \overset{\mathbf{Cat}(G)}{\to} \mathbf{Cat}(\mathsf{Gr}\mathbb{K})$$

alors U est exact à gauche et il réfléchit les isomorphismes,
8) $\mathbb{L}$ étant une 2-catégorie finiment complète et $p : \mathbb{L} \to \mathbb{K}$ un 2-foncteur admettant un adjoint à gauche q exact à gauche, alors q commute avec Q.
9) soit T une monade interne à $\mathbb{K}$, alors il existe l'objet de Kleisli Kl_T associé à T.

Preuve :
1) Dire qu'une catéade C est effective équivaut à dire que la flèche canonique $C \to \Delta Q(C)$ dans **Kat** $(\mathbb{K})$ est pleinement fidèle. C'est-à-dire que le carré ci-dessous est un produit fibré :

$$\begin{tikzcd} C_1 \arrow[r] \arrow[d] & (QC)^{\mathbf{2}} \arrow[d] \\ C_0 \times C_0 \arrow[r] & QC \times QC \end{tikzcd}$$

Mais ce carré est l'image par le 2-foncteur exact Q du carré suivant :

$$\begin{tikzcd} \Delta C_1 \arrow[r] \arrow[d] & C^{\mathbf{2}} \arrow[d] \\ \Delta C_0 \times \Delta C_0 \arrow[r] & C \times C \end{tikzcd}$$

qui est un produit fibré dans **Kat** $(\mathbb{K})$.
2) On prend l'image du carré suivant par le 2-foncteur exact Q :

$$\begin{tikzcd} C' \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[d] \\ \Delta X \arrow[r] & \Delta QC \end{tikzcd}$$

3) Constatons, tout d'abord, que cette décomposition existe dans **Cat** $(\mathbb{K})$ (on utilise (1 - 2)), puis que **Kat** $(\mathbb{K})$ est stable pour cette décomposition. Enfin remarquons que Q : $\mathbf{Kat}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ étant un adjoint à gauche exact à gauche, il préserve cette décomposition. Il reste donc à décomposer la flèche $\Delta A \to \Delta B$ dans **Kat** $(\mathbb{K})$, puis à en prendre l'image par Q.
4) Pour tout objet A de $\mathbb{K}$, GA apparait dans la décomposition :

$$A \to GA \to 1$$

Le foncteur G peut être vu aussi comme le composé suivant :

$$\mathbb{K} \xrightarrow{P} \mathbf{Kat}(\mathbb{K}) \xrightarrow{Q} \mathbb{K}$$

où $\quad P(A) = (A \times A \times A \to A \times A \rightrightarrows A)$.
Or P et Q préservant les limites projectives finies, il en va de même pour G.
5) On le vérifie tout d'abord dans **Kat** $(\mathbb{K})$ en remarquant que pour tout objet C de Kat$(\mathbb{K})$:

$$GC = (C_0 \times C_0 \times C_0 \to C_0 \times C_0 \rightrightarrows C_0)$$

Par suite le carré :

$$\begin{tikzcd} \Delta A \arrow[r] \arrow[d] & \Delta B \arrow[d] \\ G\Delta A \arrow[r] & G\Delta B \end{tikzcd}$$

ainsi que son image par Q (c'est le carré cherché) sont des produits fibrés. La réciproque est immédiate.
6) $(i) \Rightarrow (ii)$: On a l'égalité des deux rectangles suivants :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}(B,X) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{K}(A,X) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{K}(A,GX) \arrow[d] \\ \mathbb{K}(B,Y) \arrow[r] & \mathbb{K}(A,Y) \arrow[r] & \mathbb{K}(A,GY) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{K}(B,X) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{K}(B,GX) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{K}(A,GX) \arrow[d] \\ \mathbb{K}(B,Y) \arrow[r] & \mathbb{K}(B,GY) \arrow[r] & \mathbb{K}(A,GY) \end{tikzcd}$$

Celui de droite est constitué de deux produits fibrés. Celui de gauche est tel que son carré de droite est un produit fibré. Par conséquent son carré de gauche est aussi un produit fibré.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Il suffit d'appliquer pour tout objet grossier G la condition (ii) à la flèche pleinement fidèle $G \to 1$.

$(i) \Leftrightarrow (iii)$: Pour tout objet grossier X de $\mathbb{K}$, on a le carré commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Gr}(\mathbb{K})(GB,X) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathsf{Gr}(\mathbb{K})(GA,X) \arrow[d, "\simeq"] \\ \mathbb{K}(B,X) \arrow[r] & \mathbb{K}(A,X) \end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont des isomorphismes. Par suite une des deux flèches horizontales est un inversible si et seulement si l'autre l'est. D'où l'équivalence cherchée.

$(i) \Leftrightarrow (iv)$: Comme $\Delta A \to C_A \to \Delta B$ est une décomposition, dans la 2-catégorie **Kat** ($\mathbb{K}$), de $\Delta A \to \Delta B$, alors son image par $Q : A \to Q(C_A) \to B$ en est une dans $\mathbb{K}$. Si $A \to B$ est grossièrement inversible, alors $A \to B \xrightarrow{=} B$ est une autre décomposition de $A \to B$, mais, d'après le (3), ceci implique que $B \simeq Q(C_A)$. La réciproque est immédiate.
7) U est exact, car Δ et $\mathbf{Cat}(G)$ le sont(d'après le (4)). Il reste donc à montrer qu'il réfléchit les isomorphismes. Soit donc $A \to B$ une flèche de $\mathbb{K}$. Alors $UA \to UB$ est inversible dans **Cat** ($\mathsf{Gr}\mathbb{K}$) si et seulement si $GA \to GB$ et $G(A^{\mathbf{2}}) \to G(B^{\mathbf{2}})$ le sont dans $\mathsf{Gr}\mathbb{K}$ (on dira d'une telle flèche qu'elle vérifie la propriété (I)). Soit maintenant la flèche canonique $A^{\mathbf{2}} \to P$ où P provient du produit fibré suivant :

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r] \arrow[d] & B^{\mathbf{2}} \arrow[d] \\ A \times A \arrow[r] & B \times B \end{tikzcd}$$

On constate les deux résultats suivants :
a) $A \to B$ est fidèle si et seulement si $A^{\mathbf{2}} \to P$ est pleinement fidèle.
b) Si $A \to$ B vérifie (I), il en va de même de$A^{\mathbf{2}} \to B^{\mathbf{2}}$ et donc de $A^{\mathbf{2}} \to P$.
- Supposons dans un premier temps que $A \to B$ soit fidèle et verifie (I). Alors, d'après les (a) et (b), la flèche $A^{\mathbf{2}} \to P$ est pleinement fidèle et vérifie (I). Elle est donc inversible (d'après (5)). Par suite $A \to B$ est pleinement fidèle. Comme elle vérifie aussi (I), elle est donc inversible.
- Supposons maintenant que $A \to B$ vérifie seulement (I), alors il en va de même de $A^{\mathbf{2}} \to P$. Mais cette dernière flèche est toujours fidèle. Elle est donc inversible d'après le raisonnement précédent, et de ce fait $A \to B$ l'est aussi.
8) Les foncteurs p et q étant exacts, on a pour toute catéade C de $\mathbb{K}$ et tout objet X de $\mathbb{L}$ les isomorphismes naturels :

$$\mathbf{Kat}(\mathbb{L})(qC, \Delta X) \simeq \mathbf{Kat}(\mathbb{K})(C, p\Delta X) \simeq \mathbf{Kat}(\mathbb{K})(C, \Delta pX)$$

$$\simeq \mathbb{K}(QC, pX) \simeq \mathbb{L}(qQC, X)$$

9) T étant une monade interne à $\mathbb{K}$ sur l'objet A, l'objet $\mathsf{Kl}_T(A)$ apparait dans la décomposition :

$$A \to \mathsf{Kl}_T(A) \to \mathsf{Alg}_T(A)$$

de la flèche canonique $A \to \mathsf{Alg}_T(A)$ où $\mathsf{Alg}_T(A)$ est la lax-limite de T, voir [5]-α.

§.2. Anéades et axiome (R 2) : Comme nous le verrons dans l'Appendice la notion de catéade a pour "duale" celle d'anéade. C'est elle que nous allons étudier maintenant.

(2 - 1) *Définition* : Une anéade A est la donnée :
1) d'une catégorie interne dans $\mathbb{K}$ (notée aussi A),
2) d'une 2-flèche : $A_1 \underset{\mathsf{cod}}{\overset{\mathsf{dom}}{\underset{\theta\Downarrow}{\rightrightarrows}}} A_0$ vérifiant les propriétés suivantes :
a) on a les égalités :

$$\begin{tikzcd} A_0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r, bend left, "\mathsf{dom}"] \arrow[r, bend right, "\mathsf{cod}"'] \arrow[r, phantom, "\theta\Downarrow"] & A_0 \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} A_0 \arrow[r, bend left, "\mathsf{id}"] \arrow[r, bend right, "\mathsf{id}"'] \arrow[r, phantom, "||"] & A_0 \end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd} & A_1 \arrow[dr, "\mathsf{dom}"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow"] \arrow[dr, "\mathsf{cod}"', shift right=3] & \\ A_2 \arrow[ur, "proj_1"] \arrow[dr, "proj_2"'] \arrow[rr, phantom, "||"] & & A_0 \\ & A_1 \arrow[ur, "\mathsf{dom}", shift left=3] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow"] \arrow[ur, "\mathsf{cod}"'] & \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} A_2 \arrow[r, "\mathsf{comp}"] & A_1 \arrow[r, bend left, "\mathsf{dom}"] \arrow[r, bend right, "\mathsf{cod}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & A_0 \end{tikzcd}$$

b) la flèche canonique $A_1 \to A_0^{\mathbf{2}}$ associée à θ est pleinement fidèle.

(2 - 2) *Exemples* :
1) Toute catégorie interne dans $\mathsf{Gr}(\mathbb{K})$ peut être munie canoniquement d'une structure d'anéade.
2) Supposons que $\mathbb{K}$ vérifie (R 1), alors à toute flèche $B \to C$, on associe une anéade A, où les objets A_0, A_1 etA_2 apparaissent dans les décompositions suivantes en flèches grossièrement inversibles et pleinement fidèles :

$$\begin{tikzcd}
B^{\mathbf{3}} \arrow[r] \arrow[d] & A_2 \arrow[r] \arrow[d] & C^{\mathbf{3}} \arrow[d] \\
B^{\mathbf{2}} \arrow[r] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & A_1 \arrow[r] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & C^{\mathbf{2}} \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\
B \arrow[r] & A_0 \arrow[r] & C
\end{tikzcd}$$

La construction de la 2-flèche : $\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, shift left=2, "\mathsf{dom}"] \arrow[r, shift right=2, "\mathsf{cod}"'] \arrow[r, phantom, "\theta\Downarrow"] & A_0 \end{tikzcd}$ résulte du fait que $A_0 \to C$ est pleinement fidèle.

(2 - 3) Notons **An** $(\mathbb{K})$ la 2-catégorie ayant :
- pour objets, les anéades de $\mathbb{K}$,
- pour flèches $f : A \to A'$, les foncteurs internes $f : A \to A'$ tels que $\theta'.f_1 = f_0.\theta$,
- pour 2-flèches $t : f \Rightarrow f'$ les transformations naturelles internes entre les foncteurs f et f'.

Notons encore $\Delta : \mathbb{K} \to \mathbf{An}(\mathbb{K})$ le 2-foncteur qui associe à chaque objet A de $\mathbb{K}$ l'anéade : $\begin{tikzcd} A^{\mathbf{3}} \arrow[r, "\mathsf{comp}"] & A^{\mathbf{2}} \arrow[r, shift left=2, "\mathsf{dom}"] \arrow[r, shift right=2, "\mathsf{cod}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & A \end{tikzcd}$

(2 - 4) *Proposition* :
1) **An** $(\mathbb{K})$ est une 2-catégorie finiment complète et le 2-foncteur d'oubli $\mathbf{An}(\mathbb{K}) \to \mathbf{Cat}(\mathbb{K})$ est exact.
2) Le 2-foncteur $\Delta : \mathbb{K} \to \mathbf{An}(\mathbb{K})$ admet pour adjoint à gauche le foncteur d'oubli canonique.

Preuve :
1) c'est un corollaire de (A - 7) et (A - 8).
2) Se vérifie aisément.

(2 - 5) *Axiome (R 2)* : Le 2-foncteur $\Delta : \mathbb{K} \to \mathbf{An}(\mathbb{K})$ admet un adjoint à droite noté N.

(2 - 6) *Exemples* : Les 2-catégories :
1) **Cat** $(\mathbb{E})$, pour toute catégorie $\mathbb{E}$ à limites projectives finies,
2) **An** $(\mathbb{D})$, pour toute 2-catégorie $\mathbb{D}$ finiment complète,

3) $\mathbf{Cat}^{\mathbb{D}}$, pour toute 2-catégorie $\mathbb{D}$ petite,
4) $\mathsf{Fais}_J(\mathbb{D})$, pour toute topologie de Grothendieck J sur $\underline{\mathbb{D}}$ où $\mathbb{D}$ est petite (voir Chapitre II, (2 - 3) et Remarque I, (3 - 8)),
5) $\mathsf{Ord}(\mathbb{E})$ des ordres internes dans $\mathbb{E}$, pour toute catégorie $\mathbb{E}$ à limites projectives finies.

Preuve :
1) Comme pour le (1 - 8), A étant une anéade de $\mathbf{Cat}(\mathbb{E})$, on pose :

$$NA = (|A_2| \longrightarrow |A_1| \underset{\mathsf{cod}}{\overset{\mathsf{dom}}{\rightrightarrows}} |A_0|)$$

(pour plus de détails voir (A - 9)).
2) voir (A - 10).
3) A étant une anéade de $\hat{\mathbb{D}} = \mathbf{Cat}^{\mathbb{D}}$, on pose pour tout objet X de $\mathbb{D}$:

$$NA(X) = \mathbf{An}(\hat{\mathbb{D}})(\Delta Y(X), A)$$

où $Y : \mathbb{D}^{\mathrm{op}} \to \hat{\mathbb{D}}$ est le plongement canonique. Comme nous le verrons, ce résultat peut apparaitre aussi comme un corollaire du Théorème (3 - 2).
4) voir (II, (2 - 6)).
5) On constate que $\mathsf{Ord}(\mathbb{E})$ est stable pour N dans $\mathbf{Cat}$ $(\mathbb{E})$.

(2 - 7) *Proposition* : Si $\mathbb{K}$ vérifie (R 2) :
1) Le foncteur d'inclusion $\underline{\mathsf{Di}}(\mathbb{K}) \hookrightarrow \underline{\mathbb{K}}$ admet un adjoint à droite :

$$\mathsf{Ob} : \underline{\mathbb{K}} \to \underline{\mathsf{Di}}(\mathbb{K})$$

2) $\mathsf{Grou}(\mathbb{K})$ désignant la sous-2-catégorie de $\mathbb{K}$ ayant pour objets les objets-groupoïdes de $\mathbb{K}$ (i.e. les objets G de $\mathbb{K}$ tels que pour tout objet X de $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}(X, G)$ soit un groupoide), alors le foncteur inclusion $\underline{\mathsf{Grou}}(\mathbb{K}) \hookrightarrow \underline{\mathbb{K}}$ admet un adjoint à droite $\mathsf{Iso} : \underline{\mathbb{K}} \to \underline{\mathsf{Grou}}(\mathbb{K})$.
3) Les 2-foncteurs admettant un adjoint à gauche exact à gauche commutent avec N.

Preuve :
1) Pour tout objet A de $\mathbb{K}$ on pose :

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Ob}(A) = N(A \arrow[r, "\mathrm{id}"] & A \arrow[r, shift left=3, "\mathrm{id}"] \arrow[r, shift right=3, "\mathrm{id}"'] \arrow[r, phantom, "\Vert"] & A) \end{tikzcd}$$

2) Pour tout objet A de $\mathbb{K}$ on pose :

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Iso}(A) = N(A^I \times_A A^I \arrow[r] & A^I \arrow[r, shift left=3] \arrow[r, shift right=3] \arrow[r, phantom, "\Updownarrow"] & A) \end{tikzcd}$$

où I est le groupoïde :

$$0 \leftrightarrows 1$$

3) Soient $q \dashv p : \mathbb{K} \to \mathbb{L}$ l'adjonction considérée et A une anéade de $\mathbb{K}$. Alors, pour tout objet X de $\mathbb{L}$ on a les isomorphismes naturels :

$$\mathbf{An}(\mathbb{L})(\Delta X, pA) \simeq \mathbf{An}(\mathbb{K})(q\Delta X, A) \simeq \mathbf{An}(\mathbb{K})(\Delta qX, A)$$

$$\simeq \mathbb{K}(qX, NA) \simeq \mathbb{L}(X, pNA).$$

(2 - 8) Un objet A de $\mathbb{D}$ est dit *à produits fibrés finis internes* si la diagonale $\delta : A^{\mathbf{2}} \to A^{\mathbf{2}} \times_A A^{\mathbf{2}}$ de l'objet $\mathsf{cod} : A^{\mathbf{2}} \to A$ de $\mathbb{D}/A$ admet un adjoint à droite $\pi : A^{\mathbf{2}} \times_A A^{\mathbf{2}} \to A^{\mathbf{2}}$ dans la 2-catégorie $\mathbb{D}/A$. Dans de cas il existe une 2-flèche $A^{\mathbf{2}} \begin{smallmatrix} \xrightarrow{\mathsf{id}} \\ \Downarrow \\ \xrightarrow[\pi.\delta]{} \end{smallmatrix} A^{\mathbf{2}}$ au dessus de A.

Notons $A^M \rightarrowtail A^{\mathbf{2}}$ l'inverseur de cette 2-flèche, alors $A^M \begin{smallmatrix} \longrightarrow \\ \Downarrow \\ \longrightarrow \end{smallmatrix} A$ détermine une anéade :

$$\mathrm{Mon}A = (A^M \times_A A^M \longrightarrow A^M \begin{smallmatrix} \longrightarrow \\ \Downarrow \\ \longrightarrow \end{smallmatrix} A)$$

Soit $\mathrm{Pf}(\mathbb{K})$ la sous 2-catégorie de $\mathbb{K}$ des objets à produits fibrés internes, des flèches compatibles et des 2-flèches quelconques. Un objet A de $\mathrm{Pf}(\mathbb{K})$ sera dit regulier lorsque $A^M \rightarrowtail A^{\mathbf{2}}$ est un isomorphisme. Notons $\mathrm{Reg}(\mathbb{K})$ la sous 2-catégorie pleine de $\mathrm{Pf}(\mathbb{K})$ dont les objets sont réguliers. L'anéade $\mathrm{Mon}A$ est par exemple un objet régulier de $\mathbf{An}$ $(\mathbb{K})$.

Proposition :
Le foncteur inclusion $\mathrm{Reg}(\mathbb{K}) \hookrightarrow \mathrm{Pf}(\mathbb{K})$ admet un adjoint à droite Mon.

Preuve :
Pour tout objet A de $\mathrm{Pf}(\mathbb{K})$, on pose :

$$\mathrm{Mon}(A) = N(\mathrm{Mon}A) = N(A^M \times_A A^M \longrightarrow A^M \begin{smallmatrix} \longrightarrow \\ \Downarrow \\ \longrightarrow \end{smallmatrix} A)$$

0.1 *§.3. 2-catégories réductibles* : **(3 - 1)** *Proposition* :
Si la 2-catégorie $\mathbb{K}$ vérifie les propriétés (R 1) et (R 2) alors :
1) le 2-foncteur $U : \mathbb{K} \to \mathbf{Cat}(\underline{\mathsf{Gr}}(\mathbb{K}))$ (cf. I (1 - 9)(7)) admet un adjoint à droite.
2) le 2-foncteur $V : \mathbb{K} \to \mathbf{Cat}(\underline{\mathsf{Di}}(\mathbb{K}))$ composé suivant :

$$\mathbb{K} \overset{\Delta}{\to} \mathbf{Cat}(\mathbb{K}) \overset{\mathbf{Cat}(\mathsf{Ob})}{\longrightarrow} \mathbf{Cat}(\underline{\mathsf{Di}}(\mathbb{K}))$$

admet un adjoint à gauche.

Preuve :
1) Comme $\mathbf{Cat}(\underline{\mathsf{Gr}}(\mathbb{K}))$ se plonge dans $\mathbf{An}$ $(\mathbb{K})$, l'adjoint à droite de U cherché est le composé :

$$\mathbf{Cat}(\underline{\mathsf{Gr}}(\mathbb{K})) \rightarrowtail \mathbf{An}(\mathbb{K}) \overset{N}{\to} \mathbb{K}$$

2) De même $\mathbf{Cat}(\underline{\mathsf{Di}}(\mathbb{K}))$ se plonge dans $\mathbf{Kat}$ $(\mathbb{K})$. L'adjoint à gauche de V est donc le composé :

$$\mathbf{Cat}(\underline{\mathsf{Di}}(\mathbb{K})) \rightarrowtail \mathbf{Kat}(\mathbb{K}) \overset{Q}{\to} \mathbb{K}$$

Nous pouvons énoncer maintenant le :

(3 - 2) *Théorème* :
Soit $\mathbb{K}$ une 2-catégorie finiment complète, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) ll existe une catégorie finiment complète $\mathbb{E}$ et un cotriple exact C sur la 2-catégorie **Cat** ($\mathbb{E}$) pour laquelle on a une équivalence de 2-catégorie :

$$\mathbb{K} \cong \mathsf{Coalg}_C(\mathbf{Cat}(\mathbb{E}))$$

(ii) $\mathbb{K}$ vérifie les propriétés (R 1) et (R 2)
(iii) $\mathbb{K}$ vérifie les propriétés (4) et (5) de la Proposition (1 - 9) et la propriété (1) de la Proposition (3 - 1).
Preuve :
$((iii) \Rightarrow (i))$: Le 2-foncteur $U : \mathbb{K} \to \mathbf{Cat}(\underline{\mathsf{Gr}}(\mathbb{K}))$:
- admettant un adjoint à droite (hypothèse)
- étant exact à gauche (même preuve que Prop. (1 - 9) (7))
- réfléchissant les inversibles (même preuve que Prop. (1 - 9) (7))
est exactement cotriplable sur $\mathbf{Cat}(\underline{\mathsf{Gr}}(\mathbb{K}))$, et $\underline{\mathsf{Gr}}(\mathbb{K})$ est une catégorie à limites projectives finies.
$((ii) \Rightarrow (iii))$: déjà démontré.
$((i) \Rightarrow (ii))$: Comme nous l'avons déjà dit, nous verrons dans l'Appendice, au (A - 9), que si $\mathbb{E}$ est une catégorie à limites projectives finies la 2-catégorie **Cat** ($\mathbb{E}$) vérifie les propriétés (R 1) et (R 2). Il nous reste donc à montrer le :

Lemme l : Si une 2-catégorie $\mathbb{K}$ vérifie (R 1) et (R 2), alors il en est de même de la 2-catégorie $\mathsf{Coalg}_C(\mathbb{K})$ des C-coalgébres, où C est un cotriple exact sur $\mathbb{K}$.

Ce dernier lemme est lui-même conséquence des deux autres lemmes suivants :
Lemme 2 : Soit, dans 2-**Cat**, le carré commutatif (à un isomorphisme près) suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}' \arrow[r, "d'"] \arrow[d, "q'"'] & \mathbb{C} \arrow[d, "q"] \\ \mathbb{D}' \arrow[r, "d"'] & \mathbb{D} \end{tikzcd}$$

où q et q' sont comonadiques. On suppose de plus que la 2-flèche canonique ci-dessous est un isomorphisme :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{D}' \arrow[r, "d"] \arrow[d, "p'"'] & \mathbb{D} \arrow[d, "p"] \\ \mathbb{C}' \arrow[r, "d'"'] \arrow[ur, phantom, "\nearrow"] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

où p et p' sont respectivement les adjoints à droite de q et q'. Alors si d admet un adjoint à gauche, il en est de même de d'.

Lemme 3 : Soit le triangle commutatif (à un isomorphisme près) suivant dans 2-**Cat** :

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{C}' \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "q'"'] & & \mathbb{C} \arrow[dl, "q"] \\
& \mathbb{D} &
\end{tikzcd}
$$

où $\mathbb{C}'$ est à égalisateurs, q est comonadique et q' admet un adjoint à droite. Alors g admet un adjoint à droite.

Preuve du lemme 2 : Notons g l'adjoint à gauche de d, ainsi que $C = q.p$ et $C' = q'.p'$ les cotriples correspondant sur $\mathbb{D}$ et $\mathbb{D}$'. L'adjoint à gauche g' de d' est alors défini sur une C-coalgèbre (X, x) par :

$$g'(X, x) = (gX, x')$$

où $x' : gX \to C'gX$ est la flèche correspondant au composé

$$X \overset{x}{\to} CX \to CdgX \overset{\simeq}{\to} dC'gX$$

par l'isomorphisme canonique :

$$\mathbb{D}(X, dC'gX) \simeq \mathbb{D}'(gX, C'gX)$$

Preuve du lemme 3 : Notons p et p' respectivement les adjoints à droite de q et q'. Comme, pour tout objet X de $\mathbb{C}$, on a :

$$X = \mathrm{Egal}(pqX \rightrightarrows (pq)^2X)$$

il est naturel de poser :

$$dX = \mathrm{Egal}(p'qX \rightrightarrows p'qpqX)$$

On vérifie que d est bien l'adjoint à droite de g.

Preuve du lemme 1 : Comp_f désignant la 2-catégorie qui a pour objets les 2-catégories finiment complètes, pour flèches les 2-foncteurs exacts et pour 2-flèches les 2-transformations naturelles quelconques, les applications :

$$\mathbb{D} \mapsto \mathbf{Kat}\mathbb{D} \;\; ; \;\; \mathbb{D} \mapsto \mathbf{An}\mathbb{D}$$

se prolongent en des 2-foncteurs $\mathrm{Comp}_f \to \mathrm{Comp}_f$ et les 2-foncteurs : $\Delta : \mathbb{D} \to \mathbf{Kat}(\mathbb{D})$, $\Delta : \mathbb{D} \to \mathbf{An}(\mathbb{D})$ définissent des pseudo-transformations naturelles $\mathrm{Id} \Rightarrow \mathbf{Kat}()$, $\mathrm{Id} \Rightarrow \mathbf{An}()$. Remarquons aussi que $\mathbf{Kat}()$ et $\mathbf{An}()$ préservent les 2-foncteurs réfléchissant les inversibles. Ainsi $\mathbf{Kat}()$ et $\mathbf{An}()$ préservent-ils les 2-foncteurs exacts comonadiques et les diagrammes ci-dessous vérifient respectivement les conditions des lemmes

2 et 3, si $\mathbb{K}$ vérifie (R 1) et (R 2) :

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Coalg}_C\mathbb{K} \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d] & \mathbf{Kat}(\mathsf{Coalg}_C\mathbb{K}) \arrow[d] \\
\mathbb{K} \arrow[r, "\Delta"'] & \mathbf{Kat}(\mathbb{K})
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathsf{Coalg}_C\mathbb{K} \arrow[rr, "\Delta"] \arrow[dr] & & \mathbf{An}(\mathsf{Coalg}_C\mathbb{K}) \arrow[ddl] \\
& \mathbb{K} \arrow[d, "\Delta"'] & \\
& \mathbf{An}(\mathbb{K}) &
\end{tikzcd}$$

Par suite $\mathsf{Coalg}_C\mathbb{K}$ vérifie, lui aussi, (R 1) et (R 2).

(3 - 3) *Remarque* : On peut se demander si, d'une façon analogue, la 2-catégorie $\mathbb{K}$ est triplable sur $\mathbf{Cat}(\underline{\mathsf{Di}}(\mathbb{K}))$. Il n'en est rien (c.f. (3 - 8)).

(3 - 4) *Définition* : Une 2-catégorie $\mathbb{K}$ sera dite *réductible* si elle vérifie l'une des propriétés équivalentes du Théorème (3 - 2).

(3 - 5) *Exemples* :
1) $\mathbf{Cat}$ ($\mathbb{E}$), où $\mathbb{E}$ est une catégorie finiment complète,
2) $\mathbf{Cat}^{\mathbb{D}}$, pour toute 2–catégorie $\mathbb{D}$ petite,
3) $\mathsf{Fais}_J(\mathbb{D})$, où $\mathbb{D}$ est petite et J est une topologie de Grothendieck sur la catégorie $\underline{\mathbb{D}}$ sous-jacente (voir le chapitre II, (2 - 3)).

Preuve :
l) Evident
2) Le 2-foncteur d'oubli $\mathbf{Cat}^{\mathbb{D}} \to \mathbf{Cat}^{\underline{\mathbb{D}}}$:
- est exact à gauche,
- réfléchit les isomorphismes,
- admet un adjoint à droite,
Par suite, comme $\mathbf{Cat}^{\mathbb{D}}$ est finiment compléte, $\mathbf{Cat}^{\mathbb{D}}$ est comonadique sur $\mathbf{Cat}^{\underline{\mathbb{D}}} \simeq \mathbf{Cat}(\mathbf{Ens}^{\underline{\mathbb{D}}})$ et le cotriple en question est exact à gauche.
3) Voir (II (2 - 6)).

Etudions maintenant quelques propriétés des 2-catégories réductibles.

(3 - 6) *Proposition* : Soit $\mathbb{K}$ une 2-catégorie réductible, alors il en est de même de la 2-catégorie :
1) $\mathbb{K}_{\mathrm{op}}$ obtenue en changeant le sens des 2-flèches de $\mathbb{K}$.
2) $\mathsf{Coalg}_C\mathbb{K}$ des C-coalgèbres, où C désigne une comonade exacte à gauche.
3) $\mathsf{Alg}_T\mathbb{K}$ des T-algébres, où T désigne une monade idempotente exacte à gauche sur $\mathbb{K}$,
4) $\mathsf{Fib}_X\mathbb{K}$ et $\mathsf{Cofib}_X\mathbb{K}$ respectivement, des fibrations scindées et des cofibrations scindées au dessus d'un objet X de $\mathbb{K}$,
5) $\mathsf{Bifib}(A, B)$.

Preuve :
1) En effet :

$$(\mathsf{Coalg}_C\mathbf{Cat}\mathbb{E})_{\mathrm{op}} \simeq \mathsf{Coalg}_C(\mathbf{Cat}\mathbb{E})_{\mathrm{op}} \simeq \mathsf{Coalg}_{C'}\mathbf{Cat}\mathbb{E}$$

où C' est le cotriple dont l'endofoncteur est le composé :

$$\mathbf{Cat}\mathbb{E} \overset{\mathrm{op}}{\simeq} (\mathbf{Cat}\mathbb{E})_{\mathrm{op}} \overset{C_{\mathrm{op}}}{\simeq} (\mathbf{Cat}\mathbb{E})_{\mathrm{op}} \overset{\mathrm{op}}{\simeq} \mathbf{Cat}\mathbb{E}$$

2) Résulte du Lemme 1 du Théorème (3 - 2).
3) On montre que $\mathsf{Alg}_T\mathbb{K}$ vérifie (R 1) et (R 2). Notons Q' et N' les deux adjoints cherchés alors :
- si B est une catéade dans $\mathsf{Alg}_T\mathbb{K}$, on a $Q'(B) = TQ(B)$
- si A est une anéade dans $\mathsf{Alg}_T\mathbb{K}$, on a $N'(A) = N(A)$ (car $N(A) \to TN(A)$ admet un inverse).
4) On démontre d'abord le lemme suivant :
Lemme :
1) Si C est une comonade exacte sur une 2-catégorie finiment complète $\mathbb{K}$ et (X, x) une C-coalgèbre, alors il existe une comonade exacte C_x sur $\mathbb{K}/X$ telle que :

$$\mathsf{Coalg}_C(\mathbb{K})/(X, x) \simeq \mathsf{Coalg}_{C_x}(\mathbb{K}/X)$$

2) La comonade C_x se relève sur $\mathsf{Fib}_X(\mathbb{K})$ en une comonade exacte et on a :

$$\mathsf{Fib}_{(X,x)}\mathsf{Coalg}_C(\mathbb{K}) \simeq \mathsf{Coalg}_{C_x}\mathsf{Fib}_X(\mathbb{K})$$

Preuve du lemme :
l) Il suffit de vérifier que la preuve donnée dans [13] (chapitre I, prop. 1.6) peut-être enrichie aux 2-catégories.
2) Ce lemme découle du résultat suivant, démontré dans [5] (α, prop 3, exemple 2.b) :
- une monade T sur un objet C dans la 2-catégorie des comonades est aussi une comonade (notée également) C sur un objet (notée également) T dans la 2-catégorie des monades. La monade T se relève en une monade sur Coalg_C, et la comonade C se relève en une comonade sur Alg_T de telle sorte que :

$$\mathsf{Alg}_T(\mathsf{Coalg}_C) \simeq \mathsf{Coalg}_C(\mathsf{Alg}_T)$$

En effet, on a aussi sur $\mathbb{K}/X = \mathbf{Span}(X, 1)$ la monade T des bifibrations (cf. (P - 4)), on constate de plus que l'on a une transformation naturelle

$$d : T.C_x \Rightarrow C_x.T$$

qui vérifie toutes les cohérences souhaitées pour que cela devienne une monade dans les comonades (loi distributive mixte dans la terminologie de [6]). On trouve donc ici :

$$\mathsf{Coalg}_{C_x}\mathsf{Fib}_X(\mathbb{K}) \simeq \mathsf{Coalg}_{C_x}\mathsf{Alg}_T(\mathbb{K}/X) \simeq \mathsf{Alg}_T\mathsf{Coalg}_{C_x}(\mathbb{K}/X)$$

$$\simeq \mathsf{Alg}_T(\mathsf{Coalg}_C(\mathbb{K})/(X, x)) \simeq \mathsf{Fib}_{(X,x)}\mathsf{Coalg}_C(\mathbb{K})$$

Fin de la preuve de 4). Comme $\mathbb{K} \simeq \mathsf{Coalg}_C\mathbf{Cat}(\mathbb{E})$, alors :

$$\mathsf{Fib}_{(X,x)}\mathsf{Coalg}_C\mathbf{Cat}(\mathbb{E}) \simeq \mathsf{Coalg}_{C_x}\mathsf{Fib}_X\mathbf{Cat}(\mathbb{E}) \simeq \mathsf{Coalg}_{C_x}\mathbf{Cat}(\mathbb{E}^X)$$

où $\mathbb{E}^X$ désigne la catégorie des préfaisceaux sur X internes à $\mathbb{E}$. Le résultat sur $\mathsf{Cofib}_X\mathbb{K}$ s'obtient en utilisant 1).
5) On utilise l'isomorphisme de (P - 5) et on applique 4).

(3 - 7) *Proposition* : Soit $\mathbb{K}$ une 2-catégorie réductible, alors la catégorie $\underline{\mathsf{Di}}(\mathbb{K})$ est exactement cotriplable sur la catégorie $\underline{\mathsf{Gr}}(\mathbb{K})$.

Preuve :
Le foncteur composé : $\underline{\mathsf{Di}}(\mathbb{K}) \rightarrowtail \underline{\mathbb{K}} \overset{G}{\to} \underline{\mathsf{Gr}}(\mathbb{K})$
1) admet un adjoint à droite ; c'est le composé :

$$\underline{\mathsf{Gr}}(\mathbb{K}) \rightarrowtail \underline{\mathbb{K}} \overset{\mathsf{Ob}}{\to} \underline{\mathsf{Di}}(\mathbb{K})$$

2) il est exact à gauche, car G l'est.
3) il réfléchit les inversibles, car $A \to B$ étant une flèche de $\underline{\mathsf{Di}}(\mathbb{K})$, la flèche $GA \to GB$ est inversible si et seulement si $UA \to UB$ l'est ; par suite $\underline{\mathsf{Di}}(\mathbb{K})$ est exactement cotriplable sur $\mathit{Gr}(\mathbb{K})$.

(3 - 8) *Remarque* : On vérifie que :

$$\begin{array}{lcccc} 1) & \underline{\mathsf{Gr}}(\mathbf{Cat}^{\mathbb{D}}) & \simeq & \underline{(\mathsf{Gr}\mathbf{Cat})^{\mathbb{D}}} & \simeq & \mathbf{Ens}^{\mathbb{D}} \\ 2) & \underline{\mathsf{Di}}(\mathbf{Cat}^{\mathbb{D}}) & \simeq & \underline{(\mathsf{Di}\mathbf{Cat})^{\mathbb{D}}} & \simeq & \mathbf{Ens}^{\pi_1(\mathbb{D})} \end{array}$$

où $\pi_1(\mathbb{D})$ est la catégorie qui a les mêmes objets que $\mathbb{D}$ et a pour morphismes les classes de flèches de $\mathbb{D}$ modulo les 2-flèches.

Ainsi les catégories $\underline{\mathsf{Gr}}(\mathbb{K})$ et $\underline{\mathsf{Di}}(\mathbb{K})$ ne sont pas en général equivalentes. Si on prend $\mathbb{D}$ la 2-catégorie simpliciale qui a pour seul objet 0, pour flèches les entiers naturels, pour 2-flèches les applications croissantes entre entiers, alors pour $\mathbb{K} = \mathbf{Cat}^{\mathbb{D}}$ on a :

$$\underline{\mathsf{Gr}}(\mathbb{K}) \simeq \mathbf{Ens}^{\mathbb{N}} \text{ et } \underline{\mathsf{Di}}(\mathbb{K}) \simeq \mathbf{Ens}$$

où $\mathbb{N}$ est le monoïde des entiers naturels.

II - 2-TOPOS.

0.2 *§.1. 2-topos* : **(1 - 1)** *Proposition* : Soit $\mathbb{K}$ une 2-catégorie finiment complète. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) Il existe un topos $\mathbb{E}$, un cotriple exact C sur la 2-catégorie **Cat** ($\mathbb{E}$) et une équivalence de 2-catégorie :

$$\mathbb{K} \cong \mathsf{Coalg}_C \mathbf{Cat}(\mathbb{E})$$

(ii) $\mathbb{K}$ est réductible et $\underline{\mathsf{Gr}}(\mathbb{K})$ est un topos,
(iii) $\mathbb{K}$ vérifie, en plus de (R 1) et (R 2), l'axiome suivant :
(R T) : Pour tout objet A de $\mathbb{K}$, le 2-préfaisceau $\mathcal{P}(- \times A)$ est représentable (où $\mathcal{P}(X)$ désigne la catégorie grossière colibre associée à l'ensemble des sous objets pleins de X).

Preuve :
$(i) \Rightarrow (ii)$: Le 2-foncteur d'oubli $\mathsf{Coalg}_C(\mathbf{Cat}\mathbb{E}) \to \mathbf{Cat}\mathbb{E}$:
- admettant un adjoint à droite,
- étant exact à gauche,
- réfléchissant les isomorphismes,

il en est de même du foncteur $\underline{\mathsf{Gr}}(\mathsf{Coalg}_C(\mathbf{Cat}\mathbb{E})) \to \underline{\mathsf{Gr}}(\mathbf{Cat}\mathbb{E}) \simeq \mathbb{E}$; par suite $\underline{\mathsf{Gr}}\mathbb{K} \simeq \underline{\mathsf{Gr}}(\mathsf{Coalg}_C(\mathbf{Cat}\mathbb{E}))$ est exactement cotriplable sur $\mathbb{E}$ et est donc un topos puisque $\mathbb{E}$ l'est.
$(ii) \Rightarrow (i)$: résulte de (I, (3 - 2)).
$(ii) \Rightarrow (iii)$: Pour tout couple (A, B) d'objets de $\mathbb{K}$, on a :

$$\mathcal{P}(A \times B) \simeq \mathcal{P}(G(A \times B)) \simeq \mathcal{P}(GA \times GB) \simeq (\mathsf{Gr}\mathbb{K})(GB, \Omega^{GA}) \simeq \mathbb{K}(B, \Omega^{GA})$$

$(iii) \Rightarrow (ii)$: Immédiat.

(1 - 2) *Définition* : Une 2-catégorie finiment complète vérifiant l'une des trois propriétés équivalentes de la proposition précédente sera appelée 2-topos.

(1 - 3) *Exemples* :
1) **Cat** ($\mathbb{E}$), où $\mathbb{E}$ est un topos,
2) $\mathbf{Cat}^{\mathbb{D}}$, pour toute 2-catégorie $\mathbb{D}$ petite ;
3) $\mathsf{Fais}_J(\mathbb{D})$, où $\mathbb{D}$ est petite et J est une topologie de Grothendieck sur la catégorie $\underline{\mathbb{D}}$ sous jacente à $\mathbb{D}$ (voir plus bas (2 - 3)).

(1 - 4) Comme pour les 2-catégories réductibles on a la :
Proposition : $\mathbb{K}$ étant un 2-topos, il en est de même des 2-catégories (1), (2), (3), (4), (5) considérées dans la Proposition (I, (3 - 6)).

Preuve :
(1) Immédiat,
(2) $\mathsf{Gr}(\mathsf{Coalg}_C\mathbb{K}) \simeq \mathsf{Coalg}_C(\mathsf{Gr}\mathbb{K})$,
(3) $\mathsf{Gr}(\mathsf{Alg}_T\mathbb{K}) \simeq \mathsf{Alg}_T(\mathsf{Gr}\mathbb{K})$,
(4) si $\mathbb{E}$ est un topos, il en est de même de $\mathbb{E}^X$ [11],
(5) immédiat à partir de (4).

(1 - 5) *Proposition* : Soit un 2-topos $\mathbb{K}$. Sont des topos les catégories suivantes :
1) $\underline{\mathsf{Gr}}(\mathbb{K})$ et $\underline{\mathsf{Di}}(\mathbb{K})$

2) $\mathsf{Fibdi}_X(\mathbb{K})$ et $\mathsf{Cofibdi}_X(\mathbb{K})$
3) **Dist** (A, B).

Preuve :
1) $\underline{\mathsf{Gr}}(\mathbb{K})$ est un topos et $\underline{\mathsf{Di}}(\mathbb{K})$ est exactement cotriplable sur $\underline{\mathsf{Gr}}(\mathbb{K})$.
2) $\mathsf{Fibdi}_X(\mathbb{K}) = \mathsf{DiFib}_X\mathbb{K}$
3) $\mathbf{Dist}(A, B) = \mathsf{Di\ Bifib}(A, B)$.

(1 - 6) *Proposition* : Soit $f : A \to B$ une flèche de $\mathbb{K}$, alors :
1) Le 2-foncteur changement de base :

$$f^* : \mathbb{K}/B \to \mathbb{K}/A$$

admet un adjoint à droite lorsque f est une fibration scindée ou une cofibration scindée.
2) Les 2-foncteurs changement de base :

$$f^* : \mathsf{Fib}_B(\mathbb{K}) \to \mathsf{Fib}_A(\mathbb{K}) \ \ ; \ \ f^* : \mathsf{Cofib}_B(\mathbb{K}) \to \mathsf{Cofib}_A(\mathbb{K})$$

admettent des adjoints à droite, pour tout f.

Preuve :
1) Le résultat est vrai pour $\mathbb{K} = \mathbf{Cat}(\mathbb{E})$ où $\mathbb{E}$ est un topos, voir [5], β (4.2.4.). Si $\mathbb{K}$ est un 2-topos quelconque, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}/B \arrow[r, "f^*"] \arrow[d] & \mathbb{K}/A \arrow[d] \\
\mathbf{Cat}\mathbb{E}/UB \arrow[r, "Uf^*"'] & \mathbf{Cat}\mathbb{E}/UA
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales proviennent du foncteur d'oubli $U : \mathbb{K} \to \mathbf{Cat}(\mathbb{E})$. Elles sont cotriplables en vertu de la Proposition (I, (3 - 6) ((4), Lemme 1)) :

$$\mathbb{K}/B \simeq \mathsf{Coalg}_C\mathbf{Cat}(\mathbb{E})/B \simeq \mathsf{Coalg}_{C_B}(\mathbf{Cat}\mathbb{E}/UB)$$

Si f est une fibration scindée, il en est de même de $U(f)$, car U est exact ; par conséquent $(Uf)^*$ admet un adjoint à droite et on peut appliquer le résultat de (I, (3 - 2), Lemme 3).
2) En fait dès que $\mathbb{K}$ est finiment complète, on va montrer qu'on a toujours (1) $\Rightarrow$ (2).
i) Il suffit de démontrer le résultat pour f cofibration scindée, car toute flèche $X \to Y$ peut se décomposer en

$$X \xrightarrow{i} X/_YY \to Y$$

où i admet un adjoint à droite d et $X/_YY \to Y$ est une cofibration scindée ; or i^* admet d^* comme adjoint à droite, voir [5] (β (0.2.3.)) ; l'application $X \mapsto \mathsf{Fib}_X(\mathbb{K})$ est en effet un 2-pseudo-foncteur $\mathbb{K}^{\mathrm{op}}_{\mathrm{op}} \to \mathbf{Cat}$.
ii) $\mathsf{Fib}_X(\mathbb{K})$ est monadique sur $\mathbb{K}/X$, où l'endofoncteur de la monade est :

$$\mathbb{K}/X \xrightarrow{\Sigma\mathsf{dom}} \mathbb{K}/X^{\mathbf{2}} \xrightarrow{\mathsf{cod}^*} \mathbb{K}/X$$

et donc, par 1), admet un adjoint à droite puisque cod est une cofibration scindée ; par conséquent, en suivant [7], $\mathsf{Fib}_X\mathbb{K}$ est alors cotriplable sur $\mathbb{K}/X$.
iii) Considérons maintenant le diagramme suivant où f est une cofibration scindée :

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Fib}_B(\mathbb{K}) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d] & \mathsf{Fib}_A(\mathbb{K}) \arrow[d] \\ \mathbb{K}/B \arrow[r, "f^*"'] & \mathbb{K}/A \end{tikzcd}$$

Clairement ce diagramme est commutatif et le 2 foncteur $f^* : \mathbb{K}/B \to \mathbb{K}/A$ admet un adjoint à droite, puisque f est une cofibration scindée (cf. 1). Il suffit d'appliquer (I, (3 - 2), Lemme 3) pour trouver l'adjoint à droite du foncteur $f^* : \mathsf{Fib}_B(\mathbb{K}) \to \mathsf{Fib}_A(\mathbb{K})$.

Etudions maintenant quelques propriétés inductives de $\mathbb{K}$.

(1 - 7) *Proposition* :
1) $\mathsf{Di}(\mathbb{K}) \hookrightarrow \mathbb{K}$ admet un 2-adjoint à gauche $\pi_0 : \mathbb{K} \to \mathsf{Di}(\mathbb{K})$.
2) On peut composer les distributeurs.
Preuve :
1) Le résultat est vrai pour **Cat** $(\mathbb{E})$ où $\mathbb{E}$ est un topos. De plus $\mathbb{K} \mapsto \mathsf{Di}(\mathbb{K})$ se prolonge en un 2-foncteur : $\mathrm{Comp}_f \to \mathrm{Comp}_f$ (voir I, (3 - 2) preuve du Lemme 1) qui préserve les 2-foncteurs réfléchissant les inversibles. De plus on a une transformation naturelle $\mathsf{Di}() \hookrightarrow \mathrm{Id}$. Ainsi $\mathsf{Di}()$ préserve-t-il les 2-foncteurs comonadiques, et le diagramme ci-dessous verifie-t-il les conditions de (I, (3 - 2), Lemme 2) :

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Di}(\mathbb{K}) \arrow[r, tail] \arrow[d] & \mathbb{K} \arrow[d] \\ \mathsf{Di}(\mathbf{Cat}\mathbb{E}) \simeq \mathbb{E} \arrow[r, tail] & \mathbf{Cat}\mathbb{E} \end{tikzcd}$$

D'où le résultat.
2) D'après 1) et (1 - 5), l'inclusion $\mathbf{Dist}(A,B) = \mathsf{Di}\ \mathsf{Bifib}(A,B) \hookrightarrow \mathsf{Bifib}(A,B)$ admet donc un adjoint à gauche π_0. Soient $A \leftarrow D \to A'$ et $A' \leftarrow D' \to A$" deux distributeurs. Le span composé $A \leftarrow D" \to A"$ est une bifibration ; le distributeur composé sera donc :

$$\pi_0(A \leftarrow D" \to A")$$

0.3 *§. 2. Etude des monades idempotentes exactes sur un 2-topos.* Soit $\mathbb{K}$ un 2-topos.

(2 - 1) *Définition* : Appellons fermeture pleine stable un endomorphisme $\overline{()}$ sur l'ensemble des sous-objets pleins de $\mathbb{K}$, vérifiant les quatre conditions habituelles :
1) $A \rightarrowtail B \subset A' \rightarrowtail B \quad \Rightarrow \quad \overline{A \rightarrowtail B} \subset \overline{A' \rightarrowtail B}$
2) $A \rightarrowtail B \subset \overline{A \rightarrowtail B}$
3) Pour toute flèche $f : B' \to B$ de $\mathbb{K}$, on a $\overline{f^*(A \rightarrowtail B)} = f^*(\overline{A \rightarrowtail B})$
4) $\overline{\overline{A \rightarrowtail B}} = \overline{A \rightarrowtail B}$

(2 - 2) *Proposition* : Il existe une bijection entre l'ensemble des fermetures pleines stables sur $\mathbb{K}$ et les topologies sur $\underline{\mathsf{Gr}}(\mathbb{K})$.

Preuve :
L'objet classifiant les monomorphismes pleins dans $\mathbb{K}$ étant l'objet classifiant les monomorphismes dans $\underline{\mathsf{Gr}}(\mathbb{K})$ (voir Proposition (II, (1 - 1))) la démonstration est la même que dans le cas des topos [11].

(2 - 3) *Définition* : j étant une topologie sur $\underline{\mathsf{Gr}}(\mathbb{K})$, notons $\overline{()}$ la fermeture pleine stable associée.
1) Un sous objet plein $A \rightarrowtail B$ de $\mathbb{K}$ est dit dense (pour j) si :

$$\overline{A \rightarrowtail B} = B \overset{\mathrm{Id}}{\rightarrowtail} B$$

2) Une flèche $X \to Y$ de $\mathbb{K}$ est dit dense (pour j) si elle vérifie les deux conditions suivantes :
(i) $Im(X^{\mathbf{2}} \to Y^{\mathbf{2}})$ est dense (où Im désigne l'image pleine).
(ii) $X \to X \times_Y X$ vérifie (i).
3) Un objet F de $\mathbb{K}$ est appellé faisceau (pour j) si pour tout monomorphisme dense $X \rightarrowtail Y$ le foncteur

$$\mathbb{K}(Y, F) \to \mathbb{K}(X, F)$$

est un isomorphisme (les monomorphismes $X \rightarrowtail Y$ considérés ne sont pas nécéssairement pleins).

Notons $\mathsf{Fais}_j(\mathbb{K})$ la sous-2-catégorie pleine de $\mathbb{K}$ formée des faisceaux pour j.

(2 - 4) *Proposition* : Soit $T = (T, \lambda, \mu)$ une monade idempotente exacte sur $\mathbb{K}$. Alors :
1) Il existe sur $\mathbb{K}$ une fermeture pleine stable $\overline{()}$ (et donc une topologie j_T) sur $\mathsf{Gr}(\mathbb{K})$, définie sur un sous-objet plein $A \rightarrowtail B$ par :

$$\overline{A \rightarrowtail B} = \lambda_B^*(TA \rightarrowtail TB)$$

2) Une flèche $A \to B$ de $\mathbb{K}$ est dense pour j_T si et seulement si $TA \to TB$ est un isomorphisme.
3) Pour tout objet A de $\mathbb{K}$, la flèche $\lambda_A : A \to TA$ est dense et TA est un faisceau pour j_T.
4) $\mathsf{Fais}_{j_T}(\mathbb{K}) = \mathsf{Alg}_T(\mathbb{K})$.

Preuve :
1) Cela se vérifie comme dans les topos [11].
2) On le démontre tout d'abord dans le cas particulier où $A \to B$ est un monomorphisme plein.
- Si $TA \rightarrowtail TB$ est inversible, alors $A \rightarrowtail B$ est évidemment dense. Réciproquement si $A \rightarrowtail B$ est dense, il existe une flèche $k : B \to TA$ rendant le diagramme suivant

commutatif :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail] \arrow[d, "\lambda_A"'] & B \arrow[d, "\lambda_B"] \arrow[dl, "k"'] \\ TA \arrow[r, tail] & TB \end{tikzcd}$$

On en déduit alors que :

$$TB \overset{Tk}{\to} T^2A \overset{\mu_A}{\to} TA \rightarrowtail TB = TB \overset{\mathrm{Id}}{\to} TB$$

Par suite $TA \rightarrowtail TB$ étant un monomorphisme, puisque T est exact, il est inversible.
- Supposons maintenant $A \to B$ quelconque. Comme $T : \mathbb{K} \to \mathsf{Alg}_T(\mathbb{K})$ est un adjoint exact, il préserve les images pleines, la représentation $()^{\mathbf{2}}$ et les produits fibrés. Par suite :

$$T(Im(A^{\mathbf{2}} \to B^{\mathbf{2}})) \simeq Im(TA^{\mathbf{2}} \to TB^{\mathbf{2}})$$

$$T(Im(A^{\mathbf{2}} \to (A \times_B A)^{\mathbf{2}})) \simeq Im(TA^{\mathbf{2}} \to (TA \times_{TB} TA)^{\mathbf{2}})$$

Ainsi une flèche $A \to B$ est dense si et seulement si $TA \to TB$ est inversible (on utilise le fait que si un monomorphisme $X \rightarrowtail Y$ est tel que :

$$Im(X^{\mathbf{2}} \to Y^{\mathbf{2}}) \simeq Y^{\mathbf{2}} \overset{\mathrm{Id}}{\to} Y^{\mathbf{2}}$$

alors il est inversible).
3) Comme T est idempotent, $T\lambda_A : TA \to T^2A$ est inversible, par suite λ_A est dense (2). D'autre part pour tout monomorphisme dense $X \rightarrowtail Y$ le carré suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}(Y, TA) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathbb{K}(X, TA) \arrow[d, "\simeq"] \\ \mathsf{Alg}_T(\mathbb{K})(TY, TA) \arrow[r] & \mathsf{Alg}_T(\mathbb{K})(TX, TA) \end{tikzcd}$$

et la flèche horizontale inférieure est inversible, car $TX \to TY$ l'est. Donc la flèche horizontale supérieure est inversible ce qui prouve que TA est un faisceau.
4) Toute T-algèbre est un faisceau d'après le (3). Réciproquement soit F un faisceau. Comme $\lambda_F : F \to TF$ est dense, alors $F \to F \times_{TF} F$ est un monomorphisme dense. Par suite, F étant un faisceau, il existe une unique flèche $F \times_{TF} F \to F$ telle que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r] \arrow[dr, "\mathrm{Id}"'] & F \times_{TF} F \arrow[d] \\ & F \end{tikzcd}$$

En fait $F \times_{TF} F \to F$ et $F \to F \times_{TF} F$ sont inverses l'une de l'autre, car $F \times_{TF} F$ est un faisceau (ceci résulte du fait que TF est un faisceau (3) et que les faisceaux sont stables par limites projectives finies). La flèche $\lambda_F : F \to TF$ est donc un monomorphisme dense. Un raisonnement analogue au précédent finit de prouver que λ_F est inversible.

Dans la proposition précédente nous venons de construire une application $\Phi : T \mapsto j_T$ de l'ensemble $\mathcal{M}$ des monades idempotentes exactes sur $\mathbb{K}$ dans l'ensemble $\mathcal{T}$ des topologies sur $\underline{\mathsf{Gr}}(\mathbb{K})$.

(2 - 5) *Théorème* : Il existe une équivalence entre l'ensemble des monades idempotentes exactes sur $\mathbb{K}$ et les topologies sur $\underline{\mathsf{Gr}}(\mathbb{K})$ (i.e. il existe une application $\Psi : \mathcal{T} \to \mathcal{M}$ telle que $\Phi\Psi(j) = j$ et $\Psi\Phi(T) = T$).

Preuve :
a) Pour la construction de Ψ nous allons procéder en trois temps :
- Soit j une topologie sur $\underline{\mathsf{Gr}}(\mathbb{K})$. Comme $\underline{\mathsf{Gr}}(\mathbb{K})$ est un topos, nous savons qu'il existe une monade idempotente exacte T_0 sur la catégorie $\underline{\mathsf{Gr}}(\mathbb{K})$.
- La monade T_0 étant exacte, on peut la prolonger en une monade idempotente exacte $T_1 = (T_1, \lambda_1, \mu_1)$ sur la 2-catégorie $\mathbb{L} = \mathbf{Cat}\underline{\mathsf{Gr}}(\mathbb{K})$.
- Le 2-foncteur composé $\mathbb{K} \overset{U}{\to} \mathbb{L} \overset{T_1}{\to} \mathsf{Alg}_{T_1}\mathbb{L}$ admet un adjoint à droite, puisque U et T_1 en admettent un, par suite il définit une monade exacte $T' = (T', \lambda', \mu')$ sur $\mathbb{K}$. En prenant l'égalisateur T de

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, tail, dotted, "\eta"] & T' \arrow[r, shift left, "T'\lambda'"] \arrow[r, shift right, "\lambda' T'"'] & T'^2 \end{tikzcd}$$

dans End$(\mathbb{K})$ on construit une monade idempotente exacte sur $\mathbb{K}$ (voir [8]).
- L'application Ψ est alors définie par $\Psi(j) = T$.

b) La fin de la preuve résulte du lemme suivant :
Lemme :
1) Sur une 2-catégorie $\mathbb{D}$, deux monades idempotentes M et M' qui inversent les mêmes flèches sont isomorphes.
2) Dans un topos, deux topologies qui ont les mêmes sous-objets denses coïncident.
3) $A \to B$ étant une flèche de $\mathbb{K}$, $TA \to TB$ est inversible si et seulement si $T_1UA \to T_1UB$ l'est.
4) T_0 est la restriction de la monade T à $\underline{\mathsf{Gr}}(\mathbb{K})$.
5) $A \to B$ étant une flèche de $\mathbb{K}$, alors $A \to B$ est dense pour j_T si et seulement si $A \to B$ est dense pour j.
6) $j = j_T$.
7) M et M' étant deux monades idempotentes exactes sur $\mathbb{K}$, si $j_M = j_{M'}$, alors $M \simeq M'$.

Preuve du lemme :
1) Pour tout objet A de la 2-catégorie $\mathbb{D}$, le carré suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u_A"] \arrow[d, "u'_A"'] & MA \arrow[d, "u'_{MA}"] \\ M'A \arrow[r, "M'u_A"'] & M'MA \end{tikzcd}$$

où u et u' sont les unités respectivement de M et M'. Or $M'u_A$ est inversible car Mu_A

l'est. Nous avons donc un triangle commutatif :

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "u_A"'] \arrow[dr, "u'_A"] & \\ MA \arrow[rr] & & M'A \end{tikzcd}$$

Le rôle de M et M' étant interchangeable, on en déduit que $MA \simeq M'A$.
2) Soit $\overline{()}$ et $\hat{()}$ deux fermetures stables ayant les mêmes sous objets denses. Alors pour tout sous-objet $A \rightarrowtail B$ on a le triangle commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \overline{A} \arrow[rr, tail] \arrow[dr, tail] & & \hat{\overline{A}} \arrow[dl, tail] \\ & B & \end{tikzcd}$$

où $\overline{A} \rightarrowtail B$ est fermé pour $\overline{()}$ et $\overline{A} \rightarrowtail \hat{\overline{A}}$ est dense pour $\hat{()}$, donc pour $\overline{()}$. Comme on le vérifie facilement, ceci entraîne que $\overline{A} \rightarrowtail \hat{\overline{A}}$ est un isomorphisme. Or : $A \rightarrowtail B \subset \overline{A} \rightarrowtail B$, donc : $\hat{A} \rightarrowtail B \subset \hat{\overline{A}} \rightarrowtail B$ et ainsi $\hat{A} \rightarrowtail B \subset \overline{A} \rightarrowtail B$. On démontre l'inclusion inverse par symétrie. D'où $\hat{A} \rightarrowtail B = \overline{A} \rightarrowtail B$.
3) Notons q le composé $\mathbb{K} \overset{U}{\to} \mathbb{L} \overset{T_1}{\to} \mathsf{Alg}_{T_1}(\mathbb{L})$ et p son adjoint à droite. Alors pour tout objet A de $\mathbb{K}$:

$$\begin{tikzcd} qA \arrow[r, tail, "q\lambda'_A"] & q(pq)A \arrow[r, shift left, "q\lambda'_{pqA}"] \arrow[r, shift right, "qpq\lambda'_A"'] & q(pq)^2A \end{tikzcd}$$

est un égalisateur ; du fait de la définition de T, il en est de même pour :

$$\begin{tikzcd} qTA \arrow[r, tail, "q\eta_A"] & q(pq)A \arrow[r, shift left, "q\lambda'_{pqA}"] \arrow[r, shift right, "qpq\lambda'_A"'] & q(pq)^2A \end{tikzcd}$$

car $pq = T'$ et q, étant exact, préserve les égalisateurs. Donc $qA \to qTA$ est un inversible, ou encore $T_1UA \to T_1UTA$ est inversible, pour tout objet A de $\mathbb{K}$.

Montrons maintenant notre lemme. Soit $A \to B$ une flèche de $\mathbb{K}$. Comme le carré suivant est conmutatif dans $\mathbb{L}$:

$$\begin{tikzcd} T_1UA \arrow[r] \arrow[d] & T_1UTA \arrow[d] \\ T_1UB \arrow[r] & T_1UTB \end{tikzcd}$$

on en déduit, d'après ce qui précède, que, si $TA \to TB$ est inversible, alors $T_1UA \to T_1UB$ l'est aussi. Réciproquement si $T_1UA \to T_1UB = qA \to qB$ est inversible, alors $T'A \to T'B = pqA \to pqB$ l'est aussi, ainsi que la flèche $T'^2A \to T'^2B$. Donc $TA \to TB$

est inversible.
4) Se déduit immédiatement de (1) et (3), car les deux monades T_0 et T inversent les mêmes flèches.
5) Il suffit de le montrer pour les monomorphismes pleins. Soit $A \rightarrowtail B$ un sous objet plein. On a les équivalences :

$$\begin{array}{rlrl} & A \rightarrowtail B \text{ est dense pour } j & \Leftrightarrow & GA \rightarrowtail GB \text{ est dense pour } j \\ \Leftrightarrow & T_0GA \rightarrowtail T_0GB \text{ est inversible} & \Leftrightarrow & T_1UA \rightarrowtail T_1UB \text{ est inversible} \\ \Leftrightarrow & TA \rightarrowtail TB \text{ est inversible} & \Leftrightarrow & A \rightarrowtail B \text{ est dense pour } j_T \end{array}$$

6) Résulte de (2) et (5).
7) D'après le (1), il suffit de montrer que M et M' inversent les mêmes flèches. Mais cela résulte de (2 - 4) (2).

(2 - 6) *Corollaire* : Si j est une topologie sur $\underline{\mathsf{Gr}}(\mathbb{K})$, alors $\mathsf{Fais}_j(\mathbb{K})$ est un 2-topos.
Preuve :
Résulte des propositions (l - 4), (2 - 4) et (2 - 5).

APPENDICE

0.4 *Deux constructions associées à une (2)-monade.* **(A - 1)** Soit $T = (T, \lambda, \mu)$ une monade sur **Cat** et C un objet de **Cat**. Pour simplifier les notations, on supprimera éventuellement la lettre "C" des flèches λ_C, μ_C, λ_{TC}, $T\lambda_C$ ...

Notons $K_T(C)$ la catégorie dont :

1) Les objets sont les couples (X, h) où X est un objet de $T(C)$ et $h : T\lambda(X) \to \lambda T(X)$ est une 2-flèche de T^2C telle que :

i) $\mu(h) = X \overset{\mathsf{id}}{\to} X$

ii) Le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
T^2\lambda.T\lambda(X) \arrow[r, "T^2\lambda(h)"] \arrow[d, equal] & T^2\lambda.\lambda T(X) = \lambda T^2.T\lambda(X) \arrow[r, "\lambda T^2(h)"] & \lambda T^2.\lambda T(X) \arrow[d, equal] \\
T\lambda T.T\lambda(X) \arrow[rr, "T\lambda T(h)"'] & & T\lambda T.\lambda T(X)
\end{tikzcd}$$

2) les morphismes $x : (X_1, h_1) \to (X_2, h_2)$ sont les flèches $x : X_1 \to X_2$ rendant commutatif le carré suivant :

$$\begin{tikzcd}
T\lambda(X_1) \arrow[r, "h_1"] \arrow[d, "T\lambda(x)"'] & \lambda T(X_1) \arrow[d, "\lambda T(x)"] \\
T\lambda(X_2) \arrow[r, "h_2"'] & \lambda T(X_2)
\end{tikzcd}$$

Notons $k_C : K_T(C) \to T(C)$ le foncteur défini sur les objets par $k_C(X, h) = X$, par $u_C : C \to K_T(C)$ le foncteur défini sur les objets par $u_C(X) = (\lambda(X), \mathsf{id})$ (on a donc $k_C.u_C = \lambda_C$) et par ν_C la transformation naturelle $T\lambda_C.k_C \Rightarrow \lambda T_C.k_C$, définie par $\nu_C(X, h) = h$.

(A - 2) *Proposition* : Si $b : TC \to C$ est une algèbre pour T, alors la flèche $K_T(C) \overset{k_C}{\to} T(C) \overset{b}{\to} C$ est un adjoint à gauche inverse à gauche de $u_c : C \to K_T(C)$.

Preuve :

Il est clair que le couple (k_C, ν_C) a une propriété universelle relativement aux conditions (i) et (ii). On trouvera la 2-flèche $\epsilon : \mathsf{id} \Rightarrow u_C.b.k_C$ en prenant la factorisation à travers k_C de la 2-flèche :

$$Tb.\nu_C : Tb.T\lambda_C.k_C = k_C \Rightarrow Tb.\lambda T_C.k_C = \lambda_C.b.k_C = k_C.u_C.b.k_C$$

(A - 3) D'une façon "duale" on construit $A_T(C)$. Cette catégorie a pour objets les couples (X, h) où X est un objet de $T(C)$ et $h : \lambda T(X) \to T\lambda(X)$ est une flèche de $T^2(C)$ vérifiant les deux axiomes qui se déduisent de (i) et (ii) en changeant le sens de h. On obtient donc :

(A - 4) *Proposition* : Si $b : T(C) \to C$ est une algèbre pour T, alors $A_T(C) \overset{a_C}{\to} T(C) \overset{b}{\to} C$ est un adjoint à droite inverse à gauche de $C \overset{w_C}{\to} A_T(C)$ (où a_C et w_C sont les foncteurs d'oubli canoniques similaires à k_C et à u_C).

(A - 5) Il est clair que ces résultats restent valables pour toute monade T sur une 2-catégorie $\mathbb{D}$ où l'on peut construire $K_T(C)$ et $A_T(C)$ comme les objets universels pour les axiomes (i) et (ii) qui les concernent respectivement (ce qui est le cas si la 2-catégorie $\mathbb{D}$ est finiment complète par exemple). D'autre part la construction K_T est la première étape d'une récurrence pour associer à T une λ-monade [10] (à la manière dont on associe une monade idempotente à une monade quelconque [8]), première étape qui est suffisante lorsque l'endofoncteur de T est exact. De plus Kock appelle λ-modules les couples (C, β) où β est un inverse à gauche, adjoint à gauche de u_C. Lorsque l'endofoncteur T est exact, K_TC possède une structure canonique de λ-module [10] (et A_TC de co-λ-module).

(A - 6) *Remarque* : Si $T\lambda_{T(C)}$ pleinement fidèle, l'axiome (ii) est automatiquement vérifié une fois (i) vérifié.

Preuve :
Il suffit même que $T\lambda T(C)$ soit plein. Donnons nous en effet le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "k"] \arrow[d, "k"'] \arrow[dr, phantom, "\nu \swarrow"] & TC \arrow[d, "T\lambda_C"] \\ TC \arrow[r, "\lambda_{TC}"'] & T^2C \end{tikzcd}$$

avec $\mu_C.\nu = \mathrm{Id}_k$. On considère alors la 2-flèche :

$$(\lambda T^2.\nu) \circ (T^2\lambda.\nu) : T\lambda T.T\lambda.k = T^2\lambda.T\lambda.k \Rightarrow \lambda T^2.\lambda T.k = T\lambda T.\lambda T.k$$

d'où, $T\lambda T(C)$ étant plein, une 2-flèche $\bar{\nu} : T\lambda.k \Rightarrow \lambda T.k$ telle que :

$$T\lambda T.\bar{\nu} = (\lambda T^2.\nu) \circ (T^2\lambda.\nu) \quad \text{et donc} \quad :$$

$$\bar{\nu} = \mu T.T\lambda T.\bar{\nu} = (\mu T.\lambda T^2.\nu) \circ (\mu T.T^2\lambda.\nu) = \nu \circ (T\lambda.\mu.\nu) = \nu$$

d'où (ii).

(A - 7) Plaçons-nous à présent dans le cadre suivant : on considère la 2-catégorie Comp_f qui a pour objets les 2-catégories finiment complètes, pour flèches les 2-foncteurs exacts et pour 2-flèches les 2-transformations naturelles quelconques, et le 2-endofoncteur sur Comp_f qui à $\mathbb{D}$ associe **Cat** ($\mathbb{D}$). On a aussi une 2-transformation naturelle μ : $\mathbf{Cat}(\mathbf{Cat}()) \Rightarrow \mathbf{Cat}()$ définie sur un objet C de **Cat** (**Cat** ($\mathbb{D}$)) par :

$$\mu_{\mathbb{D}}(C) = (|C_2| \longrightarrow |C_1| \rightrightarrows |C_0|)$$

De plus on a une pseudo-transformation naturelle $\lambda : \mathrm{Id} \Rightarrow \mathbf{Cat}()$ (la commutation est à isomorphisme naturel près) définie sur un objet $\mathbb{D}$ de Comp_f par :

$$\lambda_{\mathbb{D}}(X) = (X^{\mathbf{3}} \longrightarrow X^{\mathbf{2}} \rightrightarrows X)$$

On vérifie alors que $T = (\mathbf{Cat}(), \lambda, \mu)$ vérifie les axiomes d'une monade (et devient donc une pseudo-monade) et que le choix naturel pour $\mathbf{Cat}(\lambda_{\mathbb{D}})$ entraîne que :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{Cat}(\mathbb{D}) \arrow[dr, "\lambda_{\mathbf{Cat}(\mathbb{D})}"] & & & & \\
\mathbb{D} \arrow[ur, "\lambda_{\mathbb{D}}"] \arrow[dr, "\lambda_{\mathbb{D}}"'] & \Updownarrow & \mathbf{Cat}^2(\mathbb{D}) \arrow[r, "\mu_{\mathbb{D}}"] & \mathbf{Cat}(\mathbb{D}) \; = \; \mathbb{D} \arrow[rr, "\lambda_{\mathbb{D}}"] & & \mathbf{Cat}(\mathbb{D}) \\
 & \mathbf{Cat}(\mathbb{D}) \arrow[ur, "\mathbf{Cat}(\lambda_{\mathbb{D}})"'] & & & &
\end{tikzcd}$$

On vérifie enfin que, $\lambda_{\mathbb{D}}$ étant pleinement fidèle, il en est de même pour $\mathbf{Cat}(\lambda_{\mathbf{Cat}(\mathbb{D})})$, car $\mathbf{Cat}()$, étant exact, préserve les flèches pleinement fidèles.

On peut voir alors que les propositions précédentes (A - 2) et (A - 4) demeurent valables malgré la pseudo-naturalité de λ, pourvu que l'on puisse construire l'objet universel pour l'axiome (i), ce qu'il est aisé de vérifier dans la 2-catégorie Comp_f.

(A - 8) *Proposition* :
1) $K_T(\mathbb{D}) \simeq \mathbf{Kat}(\mathbb{D})$ (cf. (I, (1 - 5))
2) $A_T(\mathbb{D}) \simeq \mathbf{An}(\mathbb{D})$ (cf. (I, (2 - 3)).

Preuve :
1) Un objet de $K_T(\mathbb{D})$ est donc un couple (X, h) d'une catégorie interne X à $\mathbb{D}$ et d'une flèche $h : \mathbf{Cat}(\lambda_{\mathbb{D}})(X) \to \lambda_{\mathbf{Cat}(\mathbb{D})}(X)$ telle que $\mu_{\mathbb{D}}(h) = 1_X$; soit dans $\mathbf{Cat}$ $(\mathbb{D})$:

$$\begin{tikzcd}
\lambda_{\mathbb{D}}(X_2) \arrow[r, "h_2"] \arrow[d] & X^{\mathbf{3}} \arrow[d] \\
\lambda_{\mathbb{D}}(X_1) \arrow[r, "h_1"] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & X^{\mathbf{2}} \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\
\lambda_{\mathbb{D}}(X_0) \arrow[r, "h_0"'] & X
\end{tikzcd}$$

On va montrer que la catégorie de gauche est obtenue dans $\mathbf{Cat}$ $(\mathbb{D})$ à partir de l'objet "comma" de h_0 par lui-même, ce qui prouvera que c'est une catéade de $\mathbf{Cat}$ $(\mathbb{D})$ (I, (1 - 4), exemple 2) et, comme $\lambda_{\mathbb{D}}$ est pleinement fidèle, que :

$$X = (X_2 \longrightarrow X_1 \overset{\mathsf{dom}}{\underset{\mathsf{cod}}{\rightrightarrows}} X_0)$$

est une catéade de $\mathbb{D}$.

Pour cela il suffit de vérifier que dans $\mathbf{Cat}$ $(\mathbb{D})$ le carré suivant est un produit fibré :

$$\begin{tikzcd}
\lambda_{\mathbb{D}}(X_1) \arrow[r, "h_1"] \arrow[d] & X^{\mathbf{2}} \arrow[d] \\
\lambda_{\mathbb{D}}(X_0) \times \lambda_{\mathbb{D}}(X_0) \arrow[r, "h_0 \times h_0"'] & X \times X
\end{tikzcd}$$

Au niveau $()_0$ (celui des objets), c'est trivial du fait que $\mu_{\mathbb{D}}(h) = 1_X$.
Au niveau $()_1$ (celui des flèches), on trouve le carré :

$$\begin{tikzcd}
X_1^{\mathbf{2}} \arrow[rr] \arrow[d, "{(\mathsf{dom}^{\mathbf{2}},\mathsf{cod}^{\mathbf{2}})}"'] & & X_4 \arrow[d] \\
X_0^{\mathbf{2}} \times X_0^{\mathbf{2}} \arrow[rr, "(h_0)_1 \times (h_0)_1"'] & & X_1 \times X_1
\end{tikzcd}$$

Grâce au lemme de Yoneda, il suffit alors de vérifier que c'est un produit fibré dans **Cat**.

Réciproquement, on montre qu'une catéade de $\mathbb{D}$ est un objet de $K_T(\mathbb{D})$ par l'adjonction (I, (1 - 6)(2)).

2) Un objet de $A_T(\mathbb{D})$ est, dans **Cat** $(\mathbb{D})$, la donnée de :

$$\begin{tikzcd}
X^{\mathbf{3}} \arrow[r, "h_2"] \arrow[d] & \lambda_{\mathbb{D}}(X_2) \arrow[d] \\
X^{\mathbf{2}} \arrow[r, "h_1"] \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left] & \lambda_{\mathbb{D}}(X_1) \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left] \\
X \arrow[r, "h_0"'] & \lambda_{\mathbb{D}}(X_0)
\end{tikzcd}$$

On va montrer que la catégorie de droite est obtenue dans **Cat** $(\mathbb{D})$ à partir de la construction (I, (2 - 2) exemple 2) ce qui prouvera qu'elle est munie d'une structure d'anéade dans **Cat** $(\mathbb{D})$ et, $\lambda_{\mathbb{D}}$ étant pleinement fidèle, que

$$X = (X_2 \longrightarrow X_1 \underset{\mathsf{cod}}{\overset{\mathsf{dom}}{\rightrightarrows}} X_0)$$

est munie d'une structure d'anéade dans $\mathbb{D}$. Pour cela, h_0 étant grossièrement inversible (car $\mu_{\mathbb{D}}(h) = 1_X$), il suffit de montrer que h_1 est la partie grossièrement inversible de la décomposition de $h_0^{\mathbf{2}}$. Pour cela il reste à prouver que, dans $\mathbb{D}$, le carré suivant est un produit fibré :

$$\begin{tikzcd}
X_1^{\mathbf{2}} \arrow[rr] \arrow[d] & & (X_0^{\mathbf{2}})^{\mathbf{2}} \arrow[d] \\
X_1 \times X_1 \arrow[rr, "(h_0)_1 \times (h_0)_1"'] & & X_0^{\mathbf{2}} \times X_0^{\mathbf{2}}
\end{tikzcd}$$

ce qui signifie que $(h_0)_1$ est pleinement fidèle. Grâce à Yoneda, il suffit de vérifier cela dans **Cat**. Réciproquement on montre qu'une anéade de $\mathbb{D}$ est un objet de $A_T(\mathbb{D})$ par l'adjonction (I, (2 - 4)(2)).

(A - 9) $\mathbb{E}$ étant une catégorie finiment compléte, **Cat** $(\mathbb{E})$ a une structure canonique d'a1gèbre pour la monade T ; on a donc :

Corollaire : Soit $\mathbb{E}$ une catégorie finiment compléte. **Cat** ($\mathbb{E}$) vérifie (R 1) et (R 2).

(A - 10) Le 2-foncteur **Cat**() étant exact et donc compatible avec les propriétés universelles de K_T et A_T, la 2-catégorie $K_T(\mathbb{D}) \simeq \mathbf{Kat}(\mathbb{D})$ vérifie (R 1) et la 2-catégorie $A_T(\mathbb{D}) \simeq \mathbf{An}(\mathbb{D})$ vérifie (R 2) (c.f. (A - 5)).

De plus, il est aisé de vérifier que $K_T(\mathbb{D})$ et $A_T(\mathbb{D})$ sont les 2-catégories pseudo-libres (unicité des factorisations à une transformation isonaturelle près : cela provient de la pseudonaturalité de λ) respectivement pour les inclusions :

$$\mathbb{R}_1 \hookrightarrow \mathrm{Comp}_f$$

$$\mathbb{R}_2 \hookrightarrow \mathrm{Comp}_f$$

où $\mathbb{R}_1$ (resp $\mathbb{R}_2$) est la sous 2-catégorie de Comp_f formée des 2-catégories vérifiant (R 1) (resp. (R 2)) et des 2-foncteurs compatibles avec (R 1) (resp. (R 2)).

References

[1] BECK J. - Distributive laws. - Springer L.N. n°80 - 1969, 119-140.

[2] BENABOU J. - Les distributeurs. - Louvain Rapport n° 33 - 1973.

[3] BOURKE J. - Exact 2-categories. - talk at CT09 Conference, Cape-Town, July 2009.

[4] BOURN D. - La tour de fibrations exactes des n-catégories, Cahiers de Top. et Géom. Diff., 25, 1984, 327-351.

[5] BOURN D.- α : Natural anadeses and catadeses. - CTGD n° XIV-4 -1973, 374-415. - β : Ditopos ou une approche axiomatique de Cat (I et II) Publications internes Lille I n° 40 1975, pp. 47, et n° 85 1976, pp. 87.

[6] BURRONI E. - Algèbres non déterministiques. - CTGD n° XIV-4 -1973, 417-475.

[7] EILENBERG S. et MOORE J.C. - Adjoint functors and triples. - Ill. J. Math. 9. - 1965, 381-398.

[8] FAKIR S. - Monades idempotentes associées et coassociées à une monade. - CRAS T. 270. - 1970, 99-101.

[9] GRAY J. - Formal category theory : adjoint-ness for 2-categories. - Springer L.N. n°391 - 1974, pp. 282.

[10] KOCK A. - Monads for which structures are adjoint to units. - Aarhus L.N. n° 35 - 1972, 1-15.

[11] KOCK A. et WRAITH G. - Elementary toposes. - Aarhus L.N. n° 30 - 1971.

[12] LAWVERE W. - The category of categories as a foundation of math. - Proceedings of the Conf. on cat. Alg. La Jo1la. - 1966, 1-20.

[13] PENON J. - Sur les quasi-topos. - CTGD n° XVIII-3 - 1977, 181-218.

[14] STREET R. - Fibrations and Yoneda's lemma in a 2-category, Sydney category seminar. - Springer L.N. n° 420 - 1974, 104-133.

[15] THIEBAUD M. - Self dual structure semantics and alg. Categories. - Thesis Dalhousie Un. Halifax N.S. - 1971, 114 pp.

This article may be accessed via WWW at `http://www.tac.mta.ca/tac/` or by anonymous ftp at `ftp://ftp.tac.mta.ca/pub/tac/html/reprints/19/tr19.{dvi,ps,pdf}`