Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2017. Том 58, № 3

УДК 512.543

ОБ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ КОРНЕВЫМИ КЛАССАМИ ГРУПП БАУМСЛАГА — СОЛИТЭРА

Е. А. Туманова

Аннотация. Найден критерий аппроксимируемости произвольной группы Баумслага — Солитэра замкнутым относительно факторизации корневым классом групп. Установлено, в частности, что все группы Баумслага — Солитэра аппроксимируются разрешимыми группами и что группа Баумслага — Солитэра аппроксимируется конечными разрешимыми группами тогда и только тогда, когда она финитно аппроксимируема.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.317

Ключевые слова: аппроксимируемость корневыми классами, аппроксимируемость разрешимыми группами, аппроксимируемость конечными π-группами, группы Баумслага — Солитэра, HNN-расширение.

§ 1. Введение. Формулировка результатов

Среди групп с одним определяющим соотношением особое место занимают группы Баумслага — Солитэра (BS-группы). Напомним, они имеют представление вида

$$\mathrm{BS}(m,n) = \langle a, b; a^{-1}b^m a = b^n \rangle,$$

где m и n — ненулевые целые числа. Ввиду попарной изоморфности групп $\mathrm{BS}(m,n)$, $\mathrm{BS}(n,m)$ и $\mathrm{BS}(-m,-n)$ без потери общности на параметры m и n, однозначно задающие группу $\mathrm{BS}(m,n)$, можно наложить условия $|n| \geqslant m > 0$. Из представления группы $\mathrm{BS}(m,n)$ также очевидно следует, что она является HNN-расширением бесконечной циклической группы, порожденной элементом b, с проходной буквой a и подгруппами с порождающими b^m и b^n, связанными относительно изоморфизма, переводящего b^m в b^n. Поэтому далее без дополнительных оговорок будем применять к BS-группам определенные для HNN-расширений понятия и справедливые для них утверждения и считать выполненными условия $|n| \geqslant m > 0$.

В [1] А. И. Мальцев выявил следующую связь между финитной аппроксимируемостью и хопфовостью: конечно порожденная финитно аппроксимируемая группа хопфова. Для групп Баумслага — Солитэра в [2] это утверждение было усилено и обращено в критерий: группа $\mathrm{BS}(m,n)$ является хопфовой тогда и только тогда, когда она финитно аппроксимируема или множества простых делителей чисел m и n совпадают.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Ивановского гос. университета.

В связи с изучением хопфовости было осуществлено первое вычленение $\mathrm{BS}(m,n)$ в отдельный класс групп [3]. В этой статье установлено, что одна из групп такого вида, а именно $\mathrm{BS}(2,3)$, является минимальным (в смысле количества порождающих символов и определяющих соотношений) примером нехопфовой группы, т. е. группы, изоморфной некоторой своей истинной фактор-группе. Кроме того, построенный пример показал, что не всякая группа с одним определяющим соотношением финитно аппроксимируема.

Одной из отличительных особенностей семейства групп Баумслага — Солитэра выступает разрешимость проблемы изоморфизма групп, что непосредственно вытекает из доказанного Д. И. Молдаванским в [4] утверждения: группы $\mathrm{BS}(m,n)$ и $\mathrm{BS}(k,l)$ изоморфны тогда и только тогда, когда $m=k$ и $n=l$.

В работе [5] показано, что если группа с одним определяющим соотношением не имеет кручения, то все ее нециклические конечно порожденные подгруппы, удовлетворяющие нетривиальному тождеству, являются в точности метабелевыми группами Баумслага — Солитэра.

К числу рассматриваемых для семейства групп Баумслага — Солитэра свойств принадлежит аппроксимируемость относительно различных отношений между элементами и подмножествами элементов. Прежде чем говорить об известных в данном направлении результатах, напомним, что группа X называется *аппроксимируемой некоторым классом групп* $\mathscr{L}$ ($\mathscr{L}$*-аппроксимируемой*), если для каждого неединичного элемента $x \in X$ существует гомоморфизм группы X на группу из класса $\mathscr{L}$, переводящий x в элемент, отличный от единицы.

Первые результаты в изучении аппроксимируемости групп Баумслага — Солитэра получены в [3] для ставшего уже классическим свойства финитной аппроксимируемости, т. е. аппроксимируемости классом всех конечных групп. Исследования Баумслага и Солитэра были продолжены Мескиным [6], доказавшим, что группа $\mathrm{BS}(m,n)$ финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда $m=1$ или $m=|n|$.

Критерий аппроксимируемости BS-групп конечными p-группами, где p — некоторое простое число, был найден Д. И. Молдаванским в [7]. Полное исследование аппроксимируемости групп Баумслага — Солитэра конечными π-группами, где π — непустое множество простых чисел, исчерпывается совокупностью статей [8, 9].

Критерии аппроксимируемости BS-групп конечными группами и конечными p-группами были обобщены Д. И. Молдаванским в работах [10, 11]. В них найдены пересечения всех нормальных подгрупп групп Баумслага — Солитэра, имеющих соответственно конечный индекс и конечный p-индекс.

Для BS-групп изучаются также и другие аппроксимационные свойства: отделимость подгрупп, аппроксимируемость и отделимость относительно сопряженности. Обзор полученных в указанных направлениях результатов приводится в [12].

Заметим, что класс всех конечных групп и его упомянутые подклассы (всех конечных p-групп, всех конечных π-групп) являются замкнутыми относительно факторизации (т. е. взятия фактор-групп) корневыми классами. Поэтому свойство аппроксимируемости корневым классом позволяет обобщать известные результаты об аппроксимируемости групп.

Напомним, что, следуя Грюнбергу [13], класс групп $\mathscr{K}$ называют *корневым*, если он содержит хотя бы одну неединичную группу, замкнут относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей, а также удовлетворяет условию: если $1 \leqslant Z \leqslant Y \leqslant X$ — субнормальный ряд группы X такой, что $X/Y \in \mathscr{K}$ и $Y/Z \in \mathscr{K}$, то в группе X существует нормальная подгруппа T такая, что $T \subseteq Z$ и $X/T \in \mathscr{K}$.

К числу корневых относятся многие активно исследуемые классы групп: класс разрешимых групп, класс всех групп без кручения, класс периодических π-групп, где π — непустое множество простых чисел, и др.

Благодаря полученному в [14] критерию (см. лемму 1 ниже) нетрудно установить, является ли класс групп корневым. Если класс состоит только из конечных групп, то характеризация принимает еще более простой вид: класс конечных групп корневой тогда и только тогда, когда он замкнут относительно взятия подгрупп и расширений [15]. Весьма полезным может оказаться тот факт, что пересечение любых двух корневых классов снова корневой класс [14].

В данной работе полностью решен вопрос об аппроксимируемости групп Баумслага — Солитэра замкнутыми относительно факторизации корневыми классами. Сформулируем полученный результат.

Теорема. *Пусть $\mathscr{K}$ — замкнутый относительно факторизации корневой класс групп.*

1. *Если класс $\mathscr{K}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу, то существует гомоморфизм группы $\mathrm{BS}(m,n)$ на группу из класса $\mathscr{K}$, инъективный на циклической подгруппе, порожденной элементом b, и, в частности, группа $\mathrm{BS}(m,n)$ $\mathscr{K}$-аппроксимируема.*

2. *Пусть класс $\mathscr{K}$ состоит только из периодических групп и $\pi(\mathscr{K})$ — множество всех простых делителей порядков элементов групп из класса $\mathscr{K}$. Тогда имеют место следующие утверждения.*

(а) *Если $1 < m < |n|$, то группа $\mathrm{BS}(m,n)$ не $\mathscr{K}$-аппроксимируема.*

(б) *Группа $\mathrm{BS}(m,m)$ $\mathscr{K}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда m является $\pi(\mathscr{K})$-числом* (*т. е. все простые делители числа m принадлежат множеству $\pi(\mathscr{K})$*).

(в) *Группа $\mathrm{BS}(m,-m)$ $\mathscr{K}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда m является $\pi(\mathscr{K})$-числом и $2 \in \pi(\mathscr{K})$.*

(г) *Группа $\mathrm{BS}(1,n)$, где $|n| \neq 1$, $\mathscr{K}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда существует число $p \in \pi(\mathscr{K})$, не делящее n и такое, что порядок образа $n + p\mathbb{Z}$ числа n в мультипликативной группе вычетов по модулю p является $\pi(\mathscr{K})$-числом.*

Отметим, что утверждение 2 приведенной теоремы обобщает упомянутые выше критерии аппроксимируемости групп Баумслага — Солитэра конечными группами [6], конечными p-группами [7], где p — некоторое простое число, и конечными π-группами [8, 9], где π — непустое множество простых чисел. Непосредственно из данной теоремы вытекает

Следствие 1. 1. *Группа $\mathrm{BS}(m,n)$ аппроксимируема классом всех разрешимых групп.*

2. *Группа $\mathrm{BS}(m,n)$ аппроксимируема классом конечных разрешимых групп тогда и только тогда, когда $m = 1$ или $m = |n|$* (*т. е. тогда и только тогда, когда она финитно аппроксимируема*).

Утверждение 1 в определенной мере дополняет классический результат Баумслага [16] об аппроксимируемости разрешимыми группами положительных групп с одним определяющим соотношением. Утверждение 2 в действительности справедливо в более общей ситуации, как показывает

Следствие 2. *Пусть $\mathscr{K}$ — замкнутый относительно факторизации корневой класс групп, состоящий только из периодических групп, $\pi(\mathscr{K})$ — множество всех простых делителей порядков элементов групп из класса $\mathscr{K}$. Тогда следующие утверждения равносильны.*

1. *Группа* $\mathrm{BS}(m,n)$ $\mathscr{K}$*-аппроксимируема.*

2. *Группа* $\mathrm{BS}(m,n)$ *аппроксимируема конечными* $\mathscr{K}$*-группами.*

3. *Группа* $\mathrm{BS}(m,n)$ *аппроксимируема конечными разрешимыми* $\pi(\mathscr{K})$*-группами (как обычно, под* $\pi(\mathscr{K})$*-группой понимаем группу, порядок которой является* $\pi(\mathscr{K})$*-числом).*

§ 2. Вспомогательные утверждения

Для доказательства сформулированных теоремы и следствия 2 воспользуемся рядом вспомогательных утверждений. Первые два из них раскрывают понятие корневого класса и возможности его применения при исследовании аппроксимационных свойств свободных конструкций групп.

Лемма 1 [14, теорема 1]. *Класс групп $\mathscr{K}$ корневой тогда и только тогда, когда он замкнут относительно взятия подгрупп и расширений, а также для любых двух групп $X, Y \in \mathscr{K}$ содержит декартово произведение $\prod_{y \in Y} X_y$, где X_y — изоморфная копия группы X для каждого $y \in Y$.*

Лемма 2 [17, теорема 1]. *Произвольная свободная группа аппроксимируется любым корневым классом.*

Далее зафиксируем ряд обозначений и приведем формулировки некоторых из уже полученных результатов в области аппроксимируемости корневыми классами различных конструкций групп.

Напомним, что группа X представляет собой расщепляемое расширение группы Z при помощи группы Y, если Y — подгруппа группы X, Z — нормальная подгруппа группы X, $X = YZ$ и $Y \cap Z = 1$. Отображение δ группы Y в группу автоморфизмов группы Z, сопоставляющее элементу $y \in Y$ ограничение на подгруппу Z внутреннего автоморфизма группы X, производимого элементом y, гомоморфно и называется *сопровождающим гомоморфизмом* этого расщепляемого расширения.

Лемма 3 [18, предложение 6]. *Пусть $\mathscr{K}$ — замкнутый относительно факторизации корневой класс групп, X — расщепляемое расширение группы Z при помощи группы Y, $\delta : Y \to \operatorname{Aut} Z$ — сопровождающий гомоморфизм и $Y\delta$ — конечная группа. Группа X $\mathscr{K}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда группы Z и Y $\mathscr{K}$-аппроксимируемы, а группа $Y\delta$ принадлежит классу $\mathscr{K}$.*

Если G — некоторая группа, H и K — изоморфные подгруппы группы G и $\varphi : H \to K$ — изоморфизм подгрупп, то через

$$G^* = (G, t; t^{-1}Ht = K, \varphi)$$

будем обозначать HNN-расширение группы G с проходной буквой t и подгруппами H и K, связанными при помощи изоморфизма φ.

Напомним, что согласно [19] подмножество M группы X называется *отделимым классом групп $\mathscr{L}$ ($\mathscr{L}$-отделимым)* в X, если для любого элемента $x \in X$, не принадлежащего подмножеству M, существует гомоморфизм γ группы X на некоторую группу из класса $\mathscr{L}$ такой, что $x\gamma \notin M\gamma$.

Лемма 4. *Пусть $\mathscr{K}$ — корневой класс групп и*

$$G^* = (G, t; t^{-1}Ht = K, \varphi).$$

1. *Если группа G $\mathscr{K}$-аппроксимируема и существует гомоморфизм группы G^* на группу из класса $\mathscr{K}$, инъективный на подгруппе H, то группа G^* $\mathscr{K}$-аппроксимируема* [20, *теорема* 4.1].

2. *Если $H = K$ и φ — тождественное отображение подгруппы H, то группа G^* $\mathscr{K}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда G $\mathscr{K}$-аппроксимируема и подгруппа H $\mathscr{K}$-отделима в группе G* [20, теорема 4.2].

Если A и B — некоторые группы, H и K — изоморфные подгруппы групп A и B соответственно и $\psi : H \to K$ — изоморфизм подгрупп, то через

$$F = (A * B; H = K, \psi)$$

будем обозначать свободное произведение групп A и B с подгруппами H и K, объединенными относительно изоморфизма ψ. Хорошо известно (см., например, [21, теорема 4.3]), что группы A и B можно считать подгруппами группы F, при этом объединенные подгруппы H и K оказываются совпадающими, а изоморфизм ψ — тождественным отображением подгруппы H.

Лемма 5. *Пусть G — произвольная группа, H — подгруппа группы G и φ — некоторый автоморфизм группы H. Пусть также A — подгруппа* HNN-*расширения*

$$G^* = (G, t; t^{-1}Ht = H, \varphi),$$

порожденная подгруппой H и элементом t. Тогда

а) *подгруппа A является расщепляемым расширением группы H при помощи бесконечной циклической группы, порожденной элементом t, с сопровождающим гомоморфизмом, переводящим t в автоморфизм φ группы H;*

б) *группа G^* представляет собой свободное произведение своих подгрупп A и G с объединенной подгруппой H.*

Доказательство. Пусть H' — изоморфная подгруппе H группа и $\psi : H' \to H$ — изоморфизм. Обозначим через A' расщепляемое расширение группы H' при помощи бесконечной циклической группы, порожденной элементом t', с сопровождающим гомоморфизмом $\delta : t' \to \varphi' = \psi\varphi\psi^{-1}$.

Пусть F — свободное произведение групп A' и G с подгруппами H' и H, объединенными относительно изоморфизма ψ. Нетрудно показать, что с помощью преобразований Тице представление группы F может быть преобразовано в представление группы G^*. При этом элементы подгруппы H' переходят в элементы подгруппы H, а элемент t' — в элемент t. Таким образом, оба утверждения имеют место. Лемма доказана.

Последнее утверждение позволяет свести вопрос об аппроксимируемости корневым классом $\mathscr{K}$ HNN-расширения с совпадающими связанными подгруппами к рассмотренной ранее автором задаче о $\mathscr{K}$-аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух групп с объединенной подгруппой. В ходе доказательства сформулированной выше теоремы потребуется следующий из полученных в этом направлении результатов.

Лемма 6 [18, следствие 5]. *Пусть $\mathscr{K}$ — замкнутый относительно факторизации корневой класс групп, A — $\mathscr{K}$-аппроксимируемая группа, B — $\mathscr{K}$-аппроксимируемая конечно порожденная нильпотентная группа и H, K — собственные* *нормальные циклические подгруппы групп A, B соответственно. Свободное произведение*

$$F = (A * B; H = K, \psi)$$

$\mathscr{K}$-аппроксимируемо тогда и только тогда, когда подгруппа H $\mathscr{K}$-отделима в группе A и подгруппа K $\mathscr{K}$-отделима в группе B.

Также понадобится одно семейство конечных разрешимых гомоморфных образов групп $\mathrm{BS}(1, n)$, где $|n| \neq 1$, необходимые свойства групп которого содержит

Лемма 7 [21, § 1.2]. *Пусть*

$$G_n(r, s) = \langle a, b;\ a^{-1}ba = b^n,\ a^r = 1,\ b^s = 1\rangle,$$

где $n^r \equiv 1 \pmod{s}$. Произвольный элемент группы $G_n(r, s)$ однозначно представим в виде $a^i b^j$, где $0 \leqslant i < r$, $0 \leqslant j < s$. В частности, порядок группы $G_n(r, s)$ равен rs, а порядки ее элементов a и b равны r и s соответственно.

Далее приводятся два утверждения, имеющие вспомогательный характер.

Лемма 8 [18, предложение 3]. *Пусть $\mathscr{L}$ — замкнутый относительно факторизации класс групп, X — некоторая группа и Y — ее нормальная подгруппа. Фактор-группа X/Y $\mathscr{L}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппа Y $\mathscr{L}$-отделима в группе X.*

Лемма 9. *Пусть $\mathscr{L}$ — замкнутый относительно взятия подгрупп и расширений класс групп, состоящий из периодических групп, $\pi(\mathscr{L})$ — множество всех простых делителей порядков элементов групп из класса $\mathscr{L}$. Конечная разрешимая группа принадлежит классу $\mathscr{L}$ тогда и только тогда, когда ее порядок является $\pi(\mathscr{L})$-числом.*

Доказательство. Из теоремы Силова очевидно следует, что порядок любой конечной группы, принадлежащей классу $\mathscr{L}$, является $\pi(\mathscr{L})$-числом. Покажем, что для разрешимых групп справедливо и обратное.

Пусть X — конечная разрешимая группа и ее порядок q является $\pi(\mathscr{L})$-числом. Известно, что группа X обладает субнормальным рядом с циклическими факторами простых порядков. Так как каждый из этих порядков делит q, а q — $\pi(\mathscr{L})$-число, все они содержатся в множестве $\pi(\mathscr{L})$. Отсюда и из замкнутости класса $\mathscr{L}$ относительно взятия подгрупп следует, что все факторы ряда принадлежат $\mathscr{L}$. Тогда из замкнутости класса $\mathscr{L}$ относительно расширений вытекает, что $X \in \mathscr{L}$. Лемма доказана.

§ 3. Доказательства теоремы и следствия 2

Прежде чем приступить к доказательству теоремы, зафиксируем следующее обозначение.

Если X — некоторая группа и x — ее произвольный элемент, то $\langle x\rangle$ обозначает циклическую подгруппу группы X, порожденную элементом x.

Доказательство теоремы. 1. Пусть A — свободная абелева группа с системой порождающих $\{b_i, i \in \mathbb{Z}\}$,

$$D = \bigl\langle b_i;\ [b_i, b_j] = 1,\ b_i^m = b_{i+1}^n,\ i, j \in \mathbb{Z}\bigr\rangle$$

и C — декартово произведение счетного семейства бесконечных циклических групп. Из записи группы D при помощи порождающих символов и определяющих соотношений легко видеть, что она является фактор-группой группы A по подгруппе, порожденной множеством $\bigl\{b_i^m b_{i+1}^{-n}, i \in \mathbb{Z}\bigr\}$.

Обозначим через σ отображение множества порождающих символов представления группы D в аддитивную группу $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, определенное по правилу $b_i\sigma = \left(\frac{m}{n}\right)^i$, где $i \in \mathbb{Z}$. Так как для каждого $i \in \mathbb{Z}$ имеют место равенства

$$b_i^m\sigma = \frac{m^{i+1}}{n^i} = b_{i+1}^n\sigma,$$

то σ определяет гомоморфизм $\sigma^* : D \to \mathbb{Q}$. Поскольку $b_i\sigma^* \neq 0$ для любого $i \in \mathbb{Z}$, порядок каждого элемента b_i в группе D бесконечен.

Так как класс $\mathscr{K}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу, ввиду замкнутости относительно взятия подгрупп он содержит и бесконечную циклическую группу (порожденную элементом бесконечного порядка непериодической группы). Поэтому в силу леммы 1 декартово произведение C является $\mathscr{K}$-группой. Снова пользуясь замкнутостью класса $\mathscr{K}$ относительно взятия подгрупп, получаем, что группа A принадлежит классу $\mathscr{K}$ как подгруппа группы C. Отсюда и из замкнутости $\mathscr{K}$ относительно факторизации вытекает, что группа D содержится в классе $\mathscr{K}$.

Обозначим через α автоморфизм группы D, действующий по правилу $b_i\alpha = b_{i-1}$, где $i \in \mathbb{Z}$, через E — расширение группы D при помощи бесконечной циклической группы $\langle a\rangle$ с сопровождающим гомоморфизмом, переводящим a в α. Тогда группа E имеет представление

$$E = \big\langle a, b_i;\ [b_i, b_j] = 1,\ b_i^m = b_{i+1}^n,\ a^{-1}b_ia = b_{i-1},\ i, j \in \mathbb{Z}\big\rangle$$

и в силу леммы 1 принадлежит классу $\mathscr{K}$ как расширение $\mathscr{K}$-группы при помощи $\mathscr{K}$-группы.

Введем новый порождающий b и соотношение $b = b_0$. Тогда $b_i = a^iba^{-i}$, а потому представление группы E примет следующий вид:

$$E = \langle a, b;\ [a^iba^{-i},\ a^jba^{-j}] = 1,\ a^{-1}b^ma = b^n,\ i \in \mathbb{Z}\rangle.$$

Заметим, что D инъективно вкладывается в E. Значит, в силу доказанного выше $\langle b\rangle$ — бесконечная циклическая подгруппа группы E, а потому тождественное отображение порождающих группы $\mathrm{BS}(m,n)$ в группу E определяет искомый гомоморфизм и группа $\mathrm{BS}(m,n)$ $\mathscr{K}$-аппроксимируема в силу утверждения 1 леммы 4.

2(a). Так как $1 < m < |n|$, элементы $b^{\pm 1}$ и $b^{\pm m}$ не принадлежат связанным подгруппам $\langle b^m\rangle$ и $\langle b^n\rangle$ соответственно.

Рассмотрим элемент

$$g = [b, ab^ma^{-1}] = b^{-1}ab^{-m}a^{-1}bab^ma^{-1}$$

группы $\mathrm{BS}(m,n)$. Ввиду сделанного выше замечания он имеет приведенную запись длины 4 и, следовательно, отличен от 1.

Пусть ρ — некоторый гомоморфизм группы $\mathrm{BS}(m,n)$ на периодическую группу. Тогда элементы $b^m\rho$ и $b^n\rho$, а также порожденные ими циклические подгруппы $\langle b^m\rho\rangle$ и $\langle b^n\rho\rangle$ имеют конечные порядки. Кроме того, данные подгруппы сопряжены и потому совпадают как подгруппы равного порядка конечной циклической группы. Значит,

$$((ab^ma^{-1})\rho)^{\pm 1} \in a\rho\langle b^n\rho\rangle(a\rho)^{-1} = \langle b^m\rho\rangle.$$

Отсюда ввиду абелевости группы $\langle b\rho\rangle$ получаем, что $g\rho = 1$. Следовательно, группа $\mathrm{BS}(m,n)$ (при условии $1 < m < |n|$) не $\mathscr{K}$-аппроксимируема.

2(б). Очевидно, что связанные подгруппы HNN-расширения $\mathrm{BS}(m,m)$ совпадают, а связывающий их изоморфизм является тождественным отображением. Поэтому в силу леммы 4 группа $\mathrm{BS}(m,m)$ $\mathscr{K}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда группа $B=\langle b\rangle$ $\mathscr{K}$-аппроксимируема и подгруппа $H=\langle b^m\rangle$ $\mathscr{K}$-отделима в группе $B=\langle b\rangle$.

$\mathscr{K}$-аппроксимируемость группы $B=\langle b\rangle$ вытекает из леммы 2. $\mathscr{K}$-отделимость подгруппы $H=\langle b^m\rangle$ в группе $B=\langle b\rangle$ в силу леммы 8 равносильна $\mathscr{K}$-аппроксимируемости группы $\mathbb{Z}_m$. Так как группа $\mathbb{Z}_m$ конечна, ее $\mathscr{K}$-аппроксимируемость, в свою очередь, равносильна условию $\mathbb{Z}_m\in\mathscr{K}$. Отсюда ввиду леммы 9 заключаем, что группа $\mathbb{Z}_m$ $\mathscr{K}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда m является $\pi(\mathscr{K})$-числом. Таким образом, доказываемое утверждение справедливо.

2(в). В HNN-расширении $\mathrm{BS}(m,-m)$ связанные подгруппы $H=\langle b^m\rangle$ и $K=\langle b^{-m}\rangle$ совпадают, а связывающий их изоморфизм $\varphi:\langle b^m\rangle\to\langle b^{-m}\rangle$ является автоморфизмом порядка 2 группы $H=\langle b^m\rangle$ (переводит b^m в b^{-m}). Пусть A — расщепляемое расширение группы $H=\langle b^m\rangle$ при помощи группы $\langle a\rangle$ с сопровождающим гомоморфизмом δ, переводящим a в автоморфизм φ группы $H=\langle b^m\rangle$. В силу леммы 5 группа $\mathrm{BS}(m,-m)$ представима в виде обобщенного свободного произведения групп A и $B=\langle b\rangle$ с объединенной подгруппой $H=\langle b^m\rangle$. Покажем, что это разложение удовлетворяет условиям леммы 6.

Так как $a\delta=\varphi$ и φ — элемент порядка 2 группы $\operatorname{Aut}H$, циклическая группа $\langle a\rangle\delta=\langle\varphi\rangle$ имеет конечный порядок, равный 2.

Корневой класс $\mathscr{K}$ замкнут относительно факторизации, $\langle a\rangle\delta$ — конечная группа, и группы $H=\langle b^m\rangle$ и $\langle a\rangle$ $\mathscr{K}$-аппроксимируемы согласно лемме 2, поэтому в силу леммы 3 группа A $\mathscr{K}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда $\langle a\rangle\delta$ является $\mathscr{K}$-группой, т. е. по лемме 9, когда число 2 содержится в множестве $\pi(\mathscr{K})$.

Объединенная подгруппа $H=\langle b^m\rangle$ бесконечная циклическая, собственная и нормальная в A и B. Свободный множитель $B=\langle b\rangle$ и фактор-группа A/H также бесконечные циклические, а потому $\mathscr{K}$-аппроксимируемые группы. Отсюда следует, в частности, что подгруппа $H=\langle b^m\rangle$ $\mathscr{K}$-отделима в группе A ввиду леммы 8.

Таким образом, в силу леммы 6 группа $\mathrm{BS}(m,-m)$ $\mathscr{K}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда число 2 содержится в множестве $\pi(\mathscr{K})$ и подгруппа $H=\langle b^m\rangle$ $\mathscr{K}$-отделима в группе $B=\langle b\rangle$. Как и при доказательстве 2(б), последнее условие равносильно тому, что m является $\pi(\mathscr{K})$-числом. Тем самым справедливость утверждения 2(в) доказана.

2(г). Сначала проверим необходимость условия. Предположим, что группа $\mathrm{BS}(1,n)$ $\mathscr{K}$-аппроксимируема. Так как элемент b отличен от единицы, существует гомоморфизм ρ группы $\mathrm{BS}(1,n)$ на некоторую группу из класса $\mathscr{K}$ такой, что $b\rho\neq 1$. Обозначим порядки элементов $a\rho$ и $b\rho$ через r и s соответственно. Тогда r и s являются $\pi(\mathscr{K})$-числами, причем $s>1$, поскольку $b\rho\neq 1$.

Непосредственной индукцией проверяется, что для любого целого неотрицательного числа z в группе $\mathrm{BS}(1,n)$ справедливо равенство $a^{-z}ba^z=b^{n^z}$. Подействовав на это равенство гомоморфизмом ρ и полагая $z=r$, получим $b\rho=(b\rho)^{n^r}$. Следовательно, $n^r\equiv 1 \pmod{s}$.

Пусть p — некоторый простой делитель числа s. Тогда $p\in\pi(\mathscr{K})$ и $n^r\equiv 1$ $\pmod{p}$. Последнее означает, что p не делит n и порядок элемента $n+p\mathbb{Z}$ в мультипликативной группе $\mathbb{Z}_p^*$ вычетов по модулю p делит r, а потому является

$\pi(\mathscr{K})$-числом.

Покажем достаточность условия. Пусть p — число из множества $\pi(\mathscr{K})$, не делящее n и такое, что порядок r элемента $n + p\mathbb{Z}$ в группе $\mathbb{Z}_p^*$ является $\pi(\mathscr{K})$-числом.

Хорошо известно и нетрудно показать, что произвольный элемент g группы $\mathrm{BS}(1,n)$ может быть записан в виде $g = a^i b^y a^{-j}$, где i, j — неотрицательные целые числа. Так как при любом гомоморфизме образы сопряженных элементов одновременно равны или не равны единице, можно заменить элемент g элементом, сопряженным с ним при помощи a^j, т. е. на $a^x b^y$, где $x = i - j$. Поэтому далее будем считать, что $g = a^x b^y$.

Пусть элемент g отличен от единицы. Тогда имеет место хотя бы одно из утверждений: $x \neq 0$ и $y \neq 0$. В каждом из этих случаев найдем гомоморфизм группы $\mathrm{BS}(1,n)$ на конечную разрешимую $\pi(\mathscr{K})$-группу, переводящий g в элемент, также отличный от единицы. Ввиду леммы 9 это будет означать, что группа $\mathrm{BS}(1,n)$ $\mathscr{K}$-аппроксимируема.

Если $x \neq 0$ и k — положительное целое число такое, что $p^k > |x|$, то искомым будет гомоморфизм ρ группы $\mathrm{BS}(1,n)$ на конечную циклическую группу $X = \langle a;\ a^{p^k} = 1\rangle$, действующий по правилу $a\rho = a$, $b\rho = 1$.

Пусть $y \neq 0$. Так как r — порядок элемента $n + p\mathbb{Z}$ в группе $\mathbb{Z}_p^*$, то $n^r \equiv 1 \pmod p$, откуда легко следует, что для любого положительного числа k выполнено сравнение $n^{rp^k} \equiv 1 \pmod{p^{k+1}}$.

Поскольку rp^k и p^{k+1} — $\pi(\mathscr{K})$-числа, в силу леммы 7 $G_n(rp^k, p^{k+1})$ является конечной разрешимой $\pi(\mathscr{K})$-группой и при $p^{k+1} > |y|$ гомоморфизм $\rho : \mathrm{BS}(1,n) \to G_n(rp^k, p^{k+1})$, переводящий a в a, b в b, искомый.

Теорема доказана.

Из приведенного рассуждения видно, что утверждение 2(a) справедливо для любого класса $\mathscr{K}$, все группы которого периодические, необязательно корневого и замкнутого относительно факторизации.

Доказательство следствия 2. Обозначим через $\mathscr{K}_1$ класс конечных $\mathscr{K}$-групп, через $\mathscr{K}_2$ — класс конечных разрешимых $\pi(\mathscr{K})$-групп. Тогда $\mathscr{K}_1 \subseteq \mathscr{K}$, а в силу леммы 9 $\mathscr{K}_2 \subseteq \mathscr{K}_1$. Поэтому имеют место импликации $2 \Rightarrow 1$ и $3 \Rightarrow 2$.

Так как $\mathscr{K}$ состоит из периодических групп и содержит хотя бы одну неединичную группу, множество $\pi(\mathscr{K})$ непусто. Класс $\mathscr{K}_2$ корневой как пересечение корневых классов всех конечных групп, всех разрешимых групп и всех периодических $\pi(\mathscr{K})$-групп и, очевидно, замкнут относительно факторизации. Отсюда и из совпадения множеств $\pi(\mathscr{K})$ и $\pi(\mathscr{K}_2)$ в силу теоремы заключаем, что утверждения 1 и 3 равносильны. Следствие доказано.

Автор выражает благодарность участникам семинара по теории групп под руководством профессора Д. И. Молдаванского за ряд ценных советов и замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мальцев А. И.* Об изоморфном представлении бесконечных групп матрицами // Мат. сб. 1940. Т. 8, № 3. С. 405–422.
2. *Andreadakis S., Raptis E., Varsos D.* Residual finiteness and Hopficity of certain HNN extensions // Arch. Math. 1986. V. 47. P. 1–5.
3. *Baumslag G., Solitar D.* Some two-generator one-relator non-Hopfian groups // Bull. Amer. Math. Soc. 1962. V. 68. P. 199–201.

4. *Молдаванский Д. И.* Изоморфизм групп Баумслага — Солитэра // Укр. мат. журн. 1991. Т. 43, № 12. С. 1684–1686.

5. *Karrass A., Solitar D.* Subgroups of HNN groups and groups with one defining relation // Can. J. Math. 1971. V. 23, N 4. P. 627–643.

6. *Meskin S.* Non-residually finite one-relator groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. V. 164. P. 105–114.

7. *Молдаванский Д. И.* Аппроксимируемость конечными p-группами HNN-расширений // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер. Биология, химия, физика, математика. 2000. № 3. С. 129–140.

8. *Варламова И. А., Молдаванский Д. И.* Об аппроксимируемости конечными группами групп Баумслага — Солитэра // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер. Естественные, общественные науки. 2012. № 2. С. 107–114.

9. *Иванова О. А., Молдаванский Д. И.* Аппроксимируемость конечными π-группами некоторых групп с одним определяющим соотношением // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. 2008. Т. 6. С. 51–58.

10. *Молдаванский Д. И.* О пересечении подгрупп конечного индекса в группах Баумслага — Солитэра // Мат. заметки. 2010. Т. 87, № 1. С. 92–100.

11. *Молдаванский Д. И.* О пересечении подгрупп конечного p-индекса в группах Баумслага — Солитэра // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер. Естественные, общественные науки. 2010. № 2. С. 106–111.

12. *Moldavanskii D.* On some residual properties of Baumslag–Solitar groups // arXiv:1310.3585 [math.GR], 2013.

13. *Gruenberg K. W.* Residual properties of infinite soluble groups // Proc. London Math. Soc. 1957. V. 7. P. 29–62.

14. *Sokolov E. V.* A characterization of root classes of groups // Comm. Algebra. 2015. V. 43. P. 856–860.

15. *Гольцов Д. В., Яцкин Н. И.* Классы групп и подгрупповые топологии // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер. Естественные, общественные науки. 2011. № 2. С. 115–128.

16. *Baumslag G.* Positive one-relator groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1971. V. 156. P. 165–183.

17. *Азаров Д. Н., Тьеджо Д.* Об аппроксимируемости свободного произведения групп с объединенной подгруппой корневым классом групп // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. 2002. Т. 5. С. 6–10.

18. *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости корневыми классами групп обобщенных свободных произведений с нормальным объединением // Изв. вузов. Математика. 2015. № 10. С. 27–44.

19. *Мальцев А. И.* О гомоморфизмах на конечные группы // Учен. зап. Иван. гос. пед. ин-та. 1958. Т. 18. С. 49–60.

20. *Tieudjo D.* On root-class residuality of some free constructions // JP J. Algebra, Number Theory Appl. 2010. V. 18, N 2. P. 125–143.

21. *Магнус В., Каррас А., Солитэр Д.* Комбинаторная теория групп. М.: Наука, 1974.

Статья поступила 22 июня 2016 г.

Туманова Елена Александровна
Ивановский гос. университет,
ул. Ермака, 39, Иваново 153025
helenfog@bk.ru