*Сибирский математический журнал*
*Май—июнь, 2017. Том 58, № 3*

*УДК 512.8*

# ОБОБЩЕНИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ВАДЫ И ГРУППЫ ВИРТУАЛЬНЫХ ЗАЦЕПЛЕНИЙ

**Ю. А. Михальчишина**

**Аннотация.** С использованием представления Вады классической группы кос строятся продолжения этих представлений на группы виртуальных кос и кос со спайками. С помощью полученных представлений строится группа виртуального зацепления и доказывается, что она является инвариантом зацепления. Приводятся примеры вычисления групп торических (виртуальных) зацеплений.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.313

**Ключевые слова:** группы виртуальных узлов, представления Вады, инварианты виртуальных узлов.

## Введение

Группа кос на $n$ нитях $B_n$, $n \geq 2$, является классическим объектом исследования как в комбинаторной теории групп, так и в маломерной топологии. В частности, основная проблема теории узлов сводится при помощи теорем Александера и Маркова [1] к некоторым проблемам для групп кос. Результаты более чем столетних исследований по теории кос можно найти в монографиях [1–3].

Многие авторы изучают различные обобщения классической теории узлов. Одним из таких обобщений является теория виртуальных узлов, введенная Кауффманом [4]. Также Кауффман определил группу виртуальных кос, которая играет ту же роль в теории виртуальных узлов, что и классическая группа кос в теории узлов. Для виртуальных узлов и зацеплений доказаны аналоги теорем Александера и Маркова [4–6].

Одним из наиболее сильных инвариантов классического зацепления является его группа (фундаментальная группа дополнения зацепления в 3-мерной сфере). Для нахождения группы классического зацепления используется представление Артина группы кос $B_n$ в группу автоморфизмов $\mathrm{Aut}(F_n)$ свободной группы $F_n$ ранга $n$. Существует несколько подходов к определению группы виртуальных узлов и зацеплений (см. [4, 6–10]). В [9] было построено продолжение представления Артина на группу виртуальных кос $VB_n$. С использованием этого продолжения были определены группы виртуальных зацеплений.

Вада [11] построил несколько семейств представлений $B_n$ в группу $\mathrm{Aut}(F_n)$ и определил некоторые группы классических зацеплений. С помощью представления Вады в [12] строятся линейные локальные представления $B_n$.

В настоящей работе строятся продолжения представлений Вады на группы виртуальных кос и кос со спайками (§ 2). В § 3 дается определение группы виртуального зацепления. При этом используются два подхода: косовый и диаграммный. Доказывается эквивалентность этих двух подходов и показывается, что построенная группа является инвариантом виртуального зацепления. В оставшейся части работы приводятся примеры вычисления групп классических (§ 4) и виртуальных зацеплений (§ 5).

## § 1. Вспомогательные утверждения

**Группа кос.** Группа кос впервые была введена Артином [1]. Напомним, что группа кос $B_n$, $n \geq 2$, на $n$ нитях задается порождающими элементами $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ и определяющими соотношениями

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad \text{при } i = 1, 2, \dots, n-2, \tag{1}$$

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad \text{при } |i-j| \geq 2. \tag{2}$$

Существует гомоморфизм группы $B_n$ на группу подстановок $S_n$, переводящий порождающий $\sigma_i$ в транспозицию $(i, i+1)$, $i = 1, 2, \dots, n-1$. Ядро этого гомоморфизма называется *группой крашеных кос* и обозначается символом $P_n$. Группа $P_n$ порождается элементами $a_{ij}, 1 \leq i < j \leq n$, которые выражаются через порождающие группы $B_n$ следующим образом:

$$a_{ii+1} = \sigma_i^2 \quad \text{при } i = 1, 2, \dots, n-1, \tag{3}$$

$$a_{ij} = \sigma_{j-1} \sigma_{j-2} \dots \sigma_{i+1} \sigma_i^2 \sigma_{i+1}^{-1} \dots \sigma_j^{-1} \sigma_{j-1}^{-1} \quad \text{при } 1 \leq i < j-1 \leq n-1. \tag{4}$$

**Группа виртуальных кос и кос со спайками.** Группа виртуальных кос $VB_n$ введена в работе Кауффмана [4], там же выписана ее система порождающих и определяющих соотношений. В работе В. В. Вершинина [13] построена более компактная система соотношений (приведенная ниже). Группа $VB_n$ равна $\langle B_n, S_n \rangle$, где $B_n = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \rangle$ — классическая группа кос, $S_n = \langle \rho_1, \dots, \rho_{n-1} \rangle$ — группа подстановок.

Порождающие $\sigma_i$, $i = 1, \dots, n-1$, группы кос $B_n$ удовлетворяют соотношениям (1), (2), а порождающие $\rho_i$, $i = 1, \dots, n-1$, группы подстановок $S_n$ — следующим соотношениям:

$$\rho_i^2 = 1 \quad \text{при } i = 1, 2, \dots, n-1, \tag{5}$$

$$\rho_i \rho_j = \rho_j \rho_i \quad \text{при } |i-j| \geq 2, \tag{6}$$

$$\rho_i \rho_{i+1} \rho_i = \rho_{i+1} \rho_i \rho_{i+1} \quad \text{при } i = 1, 2, \dots, n-2. \tag{7}$$

Остальные определяющие соотношения являются смешанными и имеют вид

$$\sigma_i \rho_j = \rho_j \sigma_i \quad \text{при } |i-j| \geq 2, \tag{8}$$

$$\rho_i \rho_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \rho_i \rho_{i+1} \quad \text{при } i = 1, 2, \dots, n-2. \tag{9}$$

Отметим, что последнее соотношение равносильно такому:

$$\rho_{i+1} \rho_i \sigma_{i+1} = \sigma_i \rho_{i+1} \rho_i \quad \text{при } i = 1, 2, \dots, n-2. \tag{10}$$

Как замечено в [14], в группе $VB_n$ не обязаны выполняться соотношения

$\mathscr{F}_1$: $\rho_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \rho_{i+1}$ при $i = 1, 2, \dots, n-2$,

$\mathscr{F}_2$: $\rho_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} = \sigma_i \sigma_{i+1} \rho_i$ при $i = 1, 2, \dots, n-2$.

Они называются *запрещенными соотношениями.*

В [15] введена группа кос со спайками $WB_n$, которая порождается элементами $\sigma_i, \alpha_i$, $i = 1, 2, \dots, n-1$. Группа, порожденная элементами $\sigma_i$, является классической группой кос $B_n$, группа, порожденная элементами $\alpha_i$, — группой подстановок $S_n$, при этом выполняются смешанные соотношения

$$\alpha_i\sigma_j = \sigma_j\alpha_i \quad \text{при } |i-j| \geq 2, \tag{11}$$

$$\alpha_i\alpha_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\alpha_i\alpha_{i+1} \quad \text{при } i = 1, 2, \ldots, n-2, \tag{12}$$

$$\alpha_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\alpha_{i+1} \quad \text{при } i = 1, 2, \ldots, n-2. \tag{13}$$

Сравнивая соотношения групп $VB_n$ и $WB_n$, видим, что $WB_n$ получается из $VB_n$ введением дополнительного соотношения (13). Следовательно, существует гомоморфизм

$$\varphi_{VW} : VB_n \longrightarrow WB_n,$$

переводящий $\sigma_i$ в $\sigma_i$ и $\rho_i$ в $\alpha_i$ при всех $i$. Таким образом, $WB_n$ является гомоморфным образом группы $VB_n$.

**Представления Вады.** В [11] построены семь типов локальных представлений группы кос $B_n$ в группу $\mathrm{Aut}(F_n)$. Напомним, что представление является *локальным*, если образ $\sigma_i$, $i = 1, \ldots, n-1$, действует нетривиально на паре соседних порождающих $x_i$, $x_{i+1}$, при этом образ элемента $x_i$ является словом $u(x_i, x_{i+1})$, а образ элемента $x_{i+1}$ — словом $v(x_i, x_{i+1})$, где $u$, $v$ — приведенные слова в группе, порожденной $x_i$ и $x_{i+1}$. Из этих семи типов четыре точные (см. [16–18]). Вада высказал предположение, что описаны все возможные локальные представления группы кос $B_n$ в группу $\mathrm{Aut}(F_n)$. Это предположение доказал Ито [19]. Из четырех точных представлений два сопряженные. Таким образом, мы рассматриваем только три типа представлений Вады.

Напомним определение этих представлений.

1. Представление $w_1^r$, $r \in \mathbb{Z}$, $r \neq 0$, определяется формулой

$$w_1^r(\sigma_i) : \begin{cases} x_i \longmapsto x_i^r x_{i+1} x_i^{-r}, \\ x_{i+1} \longmapsto x_i. \end{cases}$$

Здесь и далее указываем только нетривиальное действие на порождающих, подразумевая, что остальные порождающие остаются на месте. Отметим, что при $r = 1$ это представление Артина. Для краткости будем обозначать $w_1^r$ просто через $w_1$.

2. Представление $w_2$ определяется формулой

$$w_2(\sigma_i) : \begin{cases} x_i \longmapsto x_i x_{i+1}^{-1} x_i, \\ x_{i+1} \longmapsto x_i. \end{cases}$$

3. Представление $w_3$ определяется формулой

$$w_3(\sigma_i) : \begin{cases} x_i \longmapsto x_i^2 x_{i+1}, \\ x_{i+1} \longmapsto x_{i+1}^{-1} x_i^{-1} x_{i+1}. \end{cases}$$

Эти три типа представлений Вада использовал для построения инвариантов зацеплений.

Крисп и Парис доказали [20], что представления $w_2$ и $w_3$ эквивалентные. Более точно, существует автоморфизм $\chi : F_n \longrightarrow F_n$ такой, что

$$\chi \circ w_3(\sigma_i) \circ \chi^{-1} = w_2(\mu(\sigma_i)), \quad i = 1, \ldots, n-1,$$

где $\mu : B_n \longrightarrow B_n$ — инволюция, посылающая $\sigma_i$ в $\sigma_i^{-1}$.

Представление $w_1^r$ и соответствующие ему группы изучались в работах Вады [11], Нельсона, Лина и Ньюмена [21, 22]. Нельсон и Ньюмен доказали, что группа, построенная по представлению $w_1^2$, определяет узлы с точностью до зеркального образа.

**Продолжение представления Артина.** Представление группы виртуальных кос $VB_n \longrightarrow \mathrm{Aut}(F_{n+1})$ в группу автоморфизмов свободной группы $F_{n+1} = \langle x_1, x_2, \dots, x_n, y\rangle$ ранга $n+1$ рассматривалось независимо в [6, 8, 23]:

$$\varphi_A(\sigma_i) : \begin{cases} x_i \longmapsto x_i x_{i+1} x_i^{-1}, \\ x_{i+1} \longmapsto x_i, \end{cases} \qquad \varphi_A(\rho_i) : \begin{cases} x_i \longmapsto x_{i+1}^{y^{-1}}, \\ x_{i+1} \longmapsto x_i^{y}, \end{cases}$$

где $a^b = b^{-1}ab$. Оно является продолжением представления Артина $\varphi_A : B_n \longrightarrow \mathrm{Aut}(F_n)$ (см. [1]).

**Преобразования Титце.** Пусть $G$ имеет следующее представление в виде системы порождающих и определяющих соотношений:

$$G = \langle x_1, \dots, x_n \parallel r_1 = 1, \dots, r_t = 1\rangle.$$

Теорема Титце [2, гл. IV] утверждает, что одно представление данной группы $G$ может быть преобразовано в любое другое представление группы $G$ применением конечной последовательности операций следующих типов и обратных к ним, называемых *преобразованиями Титце*.

(I) Добавление соотношения $r = 1$, являющегося следствием соотношений $r_1 = 1, \dots, r_t = 1$, к множеству соотношений. В итоге получается представление

$$\langle x_1, \dots, x_n \parallel r_1 = 1, \dots, r_t = 1,\ r = 1\rangle.$$

(II) Добавление нового порождающего $x$ и нового соотношения $xw^{-1} = 1$, где $w$ — это любое слово в алфавите $x_1, \dots, x_n$. Таким образом получается представление

$$\langle x_1, \dots, x_n, x \parallel r_1 = 1, \dots, r_t = 1,\ xw^{-1} = 1\rangle.$$

## § 2. Представления группы виртуальных кос и группы кос со спайками

Построим отображения $W_l : VB_n \longrightarrow \mathrm{Aut}(F_{n+1})$, $l = 1, 2, 3$, являющиеся продолжением представлений Вады $w_l$, т. е. $W_l(\sigma_k) = w_l(\sigma_k)$, $k = 1, \dots, n-1$.

Для этого зададим действие $W_l$ на порождающем $\rho_k$, $k = 1, \dots, n-1$, следующим образом:

$$W_l(\rho_k) : \begin{cases} x_k \longmapsto y x_{k+1} y^{-1}, \\ x_{k+1} \longmapsto y^{-1} x_k y. \end{cases}$$

**Вопрос.** *Являются ли построенные таким образом продолжения представлений Вады $w_l$, $l = 1, 2, 3$, представлениями группы виртуальных кос $VB_n$?*

**Предложение 1.** *Отображения $W_l$, $l = 1, 2, 3$, продолженные на $VB_n$, суть представления $VB_n$ в $\mathrm{Aut}(F_{n+1})$ свободной группы $F_{n+1} = \langle x_1, \dots, x_n, y\rangle$.*

Доказательство. Для того чтобы отображения $W_l$, $l = 1, 2, 3$, являлись представлениями группы виртуальных кос, нужно проверить, что при отображениях $W_l$ соотношения $VB_n$ переходят в соотношения.

Соотношения (1), (2) выполняются, так как $W_l|_{B_n} = w_l$, а $w_l$ является представлением группы $B_n$, $l = 1, 2, 3$. Утверждение о том, что соотношения (5)–(7) выполняются, доказано ранее в [23]. Соотношение (8) выполняется в силу локальности. Остается проверить выполнение соотношения (9), т. е.

$$W_l(\rho_k\rho_{k+1}\sigma_k) = W_l(\sigma_{k+1}\rho_k\rho_{k+1}) \quad \text{при } k = 1, 2, \ldots, n-2,\ l = 1, 2, 3.$$

Для $W_1$ вычисляем левую часть соотношения (здесь и далее действие будет слева направо):

$$W_1(\rho_k\rho_{k+1}\sigma_k): \begin{cases} x_k \xrightarrow{\rho_k} yx_{k+1}y^{-1} \xrightarrow{\rho_{k+1}} y^2x_{k+2}y^{-2} \xrightarrow{\sigma_k} y^2x_{k+2}y^{-2}, \\ x_{k+1} \xrightarrow{\rho_k} y^{-1}x_ky \xrightarrow{\rho_{k+1}} y^{-1}x_ky \xrightarrow{\sigma_k} y^{-1}x_k^rx_{k+1}x_k^{-r}y, \\ x_{k+2} \xrightarrow{\rho_k} x_{k+2} \xrightarrow{\rho_{k+1}} y^{-1}x_{k+1}y \xrightarrow{\sigma_k} y^{-1}x_ky, \\ y \xrightarrow{\rho_k} \rho_{k+1}\sigma_k y. \end{cases}$$

Вычисляем правую часть соотношения:

$$W_1(\sigma_{k+1}\rho_k\rho_{k+1}): \begin{cases} x_k \xrightarrow{\sigma_{k+1}} x_k \xrightarrow{\rho_k} yx_{k+1}y^{-1} \xrightarrow{\rho_{k+1}} y^2x_{k+2}y^{-2}, \\ x_{k+1} \xrightarrow{\sigma_{k+1}} x_{k+1}^rx_{k+2}x_{k+1}^{-r} \xrightarrow{\rho_k} y^{-1}x_k^ryx_{k+2}y^{-1}x_k^{-r}y \\ \qquad\qquad \xrightarrow{\rho_{k+1}} y^{-1}x_k^rx_{k+1}x_k^{-r}y, \\ x_{k+2} \xrightarrow{\sigma_{k+1}} x_{k+1} \xrightarrow{\rho_k} y^{-1}x_ky \xrightarrow{\rho_{k+1}} y^{-1}x_ky, \\ y \xrightarrow{\sigma_{k+1}\rho_k\rho_{k+1}} y. \end{cases}$$

Видим, что смешанное соотношение (9) группы виртуальных кос выполняется. Значит, $W_1$ является представлением $VB_n$.

Представления $W_2$ и $W_3$ рассматриваются аналогично. □

Подобно случаю группы виртуальных кос строим отображения $\widetilde{W}_l$, $l = 1, 2, 3$, группы кос со спайками $WB_n$, являющиеся продолжениями представлений Вады $w_l$, т. е. $\widetilde{W}_l(\sigma_k) = w_l(\sigma_k)$, $k = 1, \ldots, n-1$.

Задаем действие $\widetilde{W}_l$ на порождающем $\alpha_k$, $k = 1, \ldots, n-1$, следующим образом:

$$\widetilde{W}_l(\alpha_k): \begin{cases} x_k \longmapsto x_{k+1}, \\ x_{k+1} \longmapsto x_k. \end{cases}$$

**Вопрос.** *Являются ли построенные таким образом отображения представлениями группы кос со спайками $WB_n$ в группу $\mathrm{Aut}(F_n)$?*

**Предложение 2.** *Отображения $\widetilde{W}_1$ и $\widetilde{W}_2$, продолженные на $WB_n$, являются представлениями $WB_n$ в $\mathrm{Aut}(F_n)$.*

Доказательство. Для того чтобы отображения $\widetilde{W}_l$, $l = 1, 2, 3$, являлись представлениями группы кос со спайками, нужно, чтобы выполнялись все соотношения $WB_n$. Как упоминали ранее, $WB_n$ получается из $VB_n$ введением дополнительного соотношения (13). Для $\widetilde{W}_1$ и $\widetilde{W}_2$ простым вычислением проверяется выполнение соотношения (13), которое совпадает с $\mathscr{F}_1$. □

**Предложение 3.** *Отображение*

$$\widetilde{W}_3 : WB_n \longrightarrow \mathrm{Aut}(F_n)$$

*является представлением группы кос со спайками при условиях*

$$x_k^2 = 1, \quad [x_{k+1}, x_{k+2}] = 1, \quad k = 1, \dots, n-2.$$

Доказательство. Вычисляем левую часть равенства (13) под действием $\widetilde{W}_3$:

$$\widetilde{W}_3(\alpha_k\sigma_{k+1}\sigma_k) : \begin{cases} x_k \xrightarrow{\alpha_k} x_{k+1} \xrightarrow{\sigma_{k+1}} x_{k+1}^2 x_{k+2} \xrightarrow{\sigma_k} x_{k+1}^{-1} x_k^{-2} x_{k+1} x_{k+2}, \\ x_{k+1} \xrightarrow{\alpha_k} x_k \xrightarrow{\sigma_{k+1}} x_k \xrightarrow{\sigma_k} x_k^2 x_{k+1}, \\ x_{k+2} \xrightarrow{\alpha_k} x_{k+2} \xrightarrow{\sigma_{k+1}} x_{k+2}^{-1} x_{k+1}^{-1} x_{k+2} \xrightarrow{\sigma_k} x_{k+2}^{-1} x_{k+1}^{-1} x_k x_{k+1} x_{k+2}. \end{cases}$$

Вычисляем правую часть равенства:

$$\widetilde{W}_3(\sigma_{k+1}\sigma_k\alpha_{k+1}) : \begin{cases} x_k \xrightarrow{\sigma_{k+1}} x_k \xrightarrow{\sigma_k} x_k^2 x_{k+1} \xrightarrow{\alpha_{k+1}} x_k^2 x_{k+2}, \\ x_{k+1} \xrightarrow{\sigma_{k+1}} x_{k+1}^2 x_{k+2} \xrightarrow{\sigma_k} x_{k+1}^{-1} x_k^{-2} x_{k+1} x_{k+2} \\ \qquad \xrightarrow{\alpha_{k+1}} x_{k+2}^{-1} x_k^{-2} x_{k+2} x_{k+1}, \\ x_{k+2} \xrightarrow{\sigma_{k+1}} x_{k+2}^{-1} x_{k+1}^{-1} x_{k+2} \xrightarrow{\sigma_k} x_{k+2}^{-1} x_{k+1}^{-1} x_k x_{k+1} x_{k+2} \\ \qquad \xrightarrow{\alpha_{k+1}} x_{k+1}^{-1} x_{k+2}^{-1} x_k x_{k+2} x_{k+1}. \end{cases}$$

Видим, что смешанное соотношение (13) группы кос со спайками выполняется при условиях $x_k^2 = 1$, $[x_{k+1}, x_{k+2}] = 1$, $k = 1, \dots, n-2$. $\square$

Замечание 1. Соотношение $\mathscr{F}_2$ не выполняется для $\widetilde{W}_l$, $l = 1, 2, 3$.

Используя результат Чтеренталя [24], который установил, что представление $\varphi_A$ группы $VB_n$ не точное при $n \geq 4$, можно показать, что и представления $W_1$ и $W_2$ также не точные при $n \geq 4$.

**Предложение 4.** *Элемент* $\beta = \left(\sigma_2^{-1}\rho_1\sigma_2\rho_3\right)^3 \in VP_4$ *лежит в ядре представлений* $W_1$ *и* $W_2$ *и не лежит в ядре представления* $W_3$.

Доказательство. Непосредственной проверкой находим, что $W_1(\beta) = 1$ и $W_2(\beta) = 1$.

Обозначим $\alpha = \sigma_2^{-1}\rho_1\sigma_2\rho_3$. Тогда $\beta = \alpha^3$. Для проверки последней части предложения находим автоморфизм $W_3(\alpha)$. Имеем

$$W_3(\alpha) : \begin{cases} x_1 \longmapsto \left(x_2^2 x_4^{y^{-1}}\right)^{y^{-1}}, \\ x_2 \longmapsto x_2^{x_4^{y^{-1}} x_1^{-y}}, \\ x_3 \longmapsto x_1^y x_4^{-y^{-1}} x_2^{-2} x_4^{y^{-1}}, \\ x_4 \longmapsto x_4. \end{cases}$$

Находим

$$W_3(\beta) : \begin{cases} x_1 \longmapsto \left(x_2^2\right)^{x_4^{y^{-1}} x_1^{-y} x_2^{-2} y^{-1}} x_4^{y^{-2}}, \\ x_2 \longmapsto \left(x_2^2\right)^{x_4^{y^{-1}} x_1^{-y}} (x_2)^{x_4^{y^{-1}} x_1^{-y} x_2^{-2}} \left(x_2^{-2}\right)^{x_4^{y^{-1}} x_1^{-y}}, \\ x_3 \longmapsto \left(x_2^2\right)^{x_4^{y^{-1}} x_1^{-y}} \left(x_2^{-2}\right)^{x_4^{y^{-1}} x_1^{-y} x_2^{-2}} x_4^{y^{-1}}, \\ x_4 \longmapsto x_4, \end{cases}$$

т. е. $W_3(\beta) \neq 1$. $\square$

Тем не менее остаются открытыми следующие

**Вопросы.** *Будут ли представления* $W_1, W_2 : VB_n \longrightarrow \mathrm{Aut}(F_{n+1})$ *точными при* $n = 3$*? Будет ли представление* $W_3$ *точным при* $n \geq 3$*?*

## § 3. Группы виртуальных зацеплений

*Диаграммой виртуального узла* (*зацепления*) называется регулярная проекция узла (зацепления) на плоскость, в которой каждая двойная точка снабжена дополнительной информацией: является ли эта двойная точка классическим перекрестком или виртуальным [4] (рис. 1). *Виртуальный узел* — это класс эквивалентности диаграмм по обобщенным преобразованиям Райдемайстера (рис. 2). Основная проблема теории виртуальных узлов — классификация виртуальных узлов.

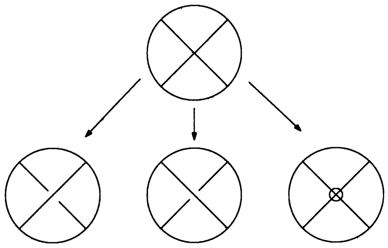

Рис. 1. Двойная точка виртуального узла

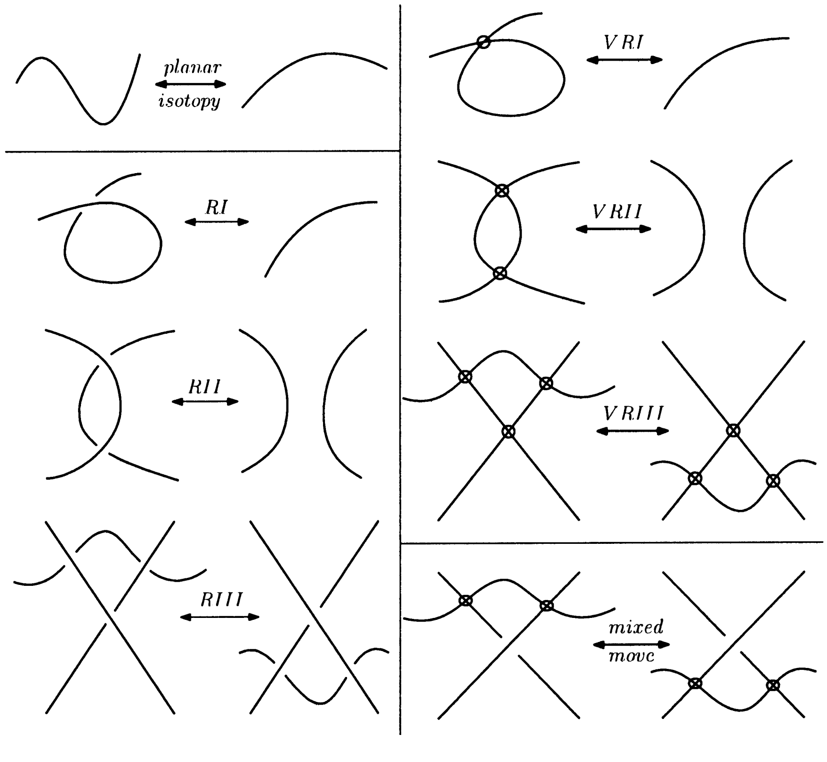


Рис. 2. Обобщенные преобразования Райдемайстера

Связь между виртуальными зацеплениями и виртуальными косами полностью задается аналогами теорем Александера и Маркова [5, 6, 25]. Аналог теоремы Александера утверждает, что любое виртуальное зацепление можно представить в виде замыкания виртуальной косы. Напомним, что операция *замыкания*, обозначающаяся символом $\widehat{\ }$, соединяет соответствующие начала и концы нитей косы (рис. 3). Таким образом, получается зацепление $\hat{\beta}$, соответствующее косе $\beta$.

Для нахождения представления группы зацепления можно использовать два подхода. Первый, подход Виртингера, состоит в том, что строим диаграмму зацепления и по ней находим порождающие и соотношения группы зацепления. Второй подход основан на представлении зацепления в виде замкнутой косы и представлении группы кос в группу автоморфизмов некоторой группы. Оба эти подхода описаны в [1] для классических зацеплений и в [7] для виртуальных зацеплений. В частности, для всякой виртуальной косы $\beta$, используя представления $W_1$, $W_2$ и $W_3$, можно определить группы $G_1$, $G_2$ и $G_3$ соответственно. При этом если хотим построить инвариант зацепления, надо доказывать, что соответствующая группа зависит только от зацепления $\hat{\beta}$.

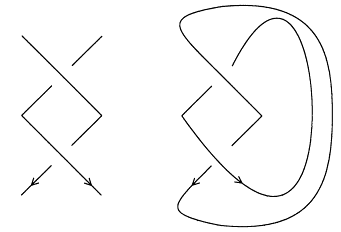

Рис. 3. Замыкание косы $\sigma^2$

**Группа классического зацепления.** Напомним: если $L$ — классическое зацепление в $\mathbb{S}^3$, то его группой $G(L)$ называется фундаментальная группа $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus L)$ дополнения $L$ в $\mathbb{S}^3$ [2]. Каждой компоненте связности диаграммы сопоставляется порождающий, а каждому классическому перекрестку сопоставляется следующее соотношение: $c = aba^{-1}$ для положительного перекрестка (рис. 4 слева) и $c = b^{-1}ab$ для отрицательного перекрестка (рис. 4 справа).

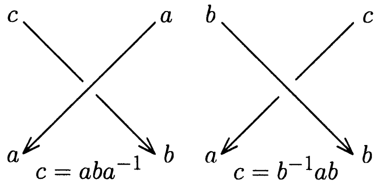


Рис. 4. Соотношения в классических перекрестках

**Косовый подход.** Опишем общий подход, позволяющий по представлению группы виртуальных кос автоморфизмами некоторой группы строить инварианты зацеплений. Предположим, что у нас есть представление $\varphi : VB_n \longrightarrow \mathrm{Aut}(H)$ группы виртуальных кос в группу автоморфизмов некоторой группы $H = \langle h_1, h_2, \dots, h_m \parallel \mathscr{R} \rangle$, где $\mathscr{R}$ — соотношения группы $H$ и $L = \hat{\beta}$ — виртуальное зацепление. Сопоставим виртуальной косе $\beta \in VB_n$ следующую группу:

$$G_\varphi^v(\beta) = \langle h_1, h_2, \dots, h_m \parallel \mathscr{R}, h_i = \varphi(\beta)(h_i),\ i = 1, 2, \dots, m \rangle.$$

Группа $G_\varphi^v$ будет инвариантом виртуального зацепления $L$, если доказать, что для любой другой косы $\beta'$ такой, что зацепления $\hat{\beta}$ и $\hat{\beta}'$ эквивалентны, группа $G_\varphi^v(\beta)$ изоморфна группе $G_\varphi^v(\beta')$.

Используем этот подход для представлений $W_l$, $l = 1, 2, 3$. Пусть $\beta \in VB_n$ для некоторого $n$. Тогда *группой косы* $\beta$ назовем следующую группу:

$$G_l^v(\beta) = \langle x_1, x_2, \dots, x_n, y \parallel x_i = W_l(\beta)(x_i),\ i = 1, 2, \dots, n \rangle.$$

Покажем, что определенная таким образом группа будет инвариантом виртуального зацепления $\hat{\beta}$. Более точно, справедлива

**Теорема 1.** *Пусть $\beta \in VB_n$ и $\beta' \in VB_m$ — две виртуальные косы, замыкания которых определяют одно и то же виртуальное зацепление $L$. Тогда*

$G_l^v(\beta) \cong G_l^v(\beta')$, $l = 1, 2, 3$, *т. е. группа* $G_l^v(\beta)$ *является инвариантом виртуального зацепления* $L$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2 в [26]. □

**Диаграммный подход.** Пусть $D_L$ — диаграмма виртуального зацепления $L$. Каждой дуге диаграммы от одного перекрестка до другого (классического или виртуального) сопоставим свой порождающий. Получим некоторое множество порождающих $a, b, c, \ldots$. Для представлений $W_1$ и $W_2$ дуге, проходящей сверху в классическом перекрестке, сопоставляется один порождающий, для представления $W_3$ в этом случае сопоставляются два порождающих.

*Группой диаграммы* $D_L$ назовем группу, порожденную элементами $a, b, c$, $\ldots, y$ и определяемую следующей системой соотношений. Дополнительный элемент $y$ вводится для виртуальных перекрестков. Для представления $W_1$ положительному перекрестку соответствует соотношение $c = a^r b a^{-r}$ (рис. 5 слева), отрицательному перекрестку — соотношение $c = b^{-r} a b^r$ (рис. 5 справа), виртуальному перекрестку — пара соотношений $c = b^{y^{-1}}$ и $d = a^y$ (рис. 6).

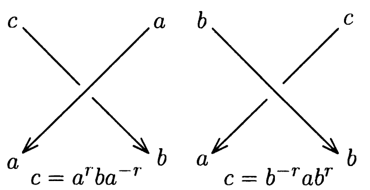


Рис. 5. Соотношения в классических перекрестках группы $G_1^v(D_L)$

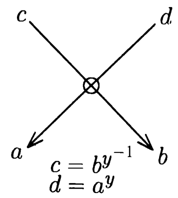


Рис. 6. Соотношения в виртуальном перекрестке группы $G_1^v(D_L)$

Для представления $W_2$ положительному перекрестку соответствует соотношение $c = ab^{-1}a$ (рис. 7 слева), отрицательному — соотношение $c = ba^{-1}b$ (рис. 7 справа), виртуальному — та же пара соотношений, что и для представления $W_1$.

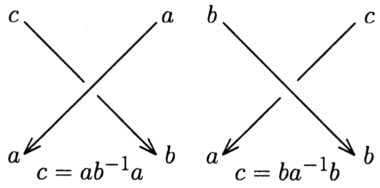


Рис. 7. Соотношения в классических перекрестках группы $G_2^v(D_L)$

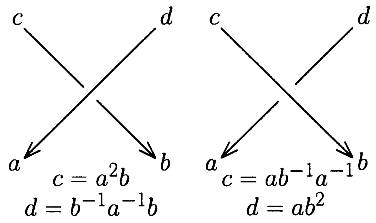


Рис. 8. Соотношения в классических перекрестках группы $G_3^v(D_L)$

Для представления $W_3$ перекрестку каждого типа соответствует пара соотношений: $c = a^2 b$ и $d = b^{-1}a^{-1}b$ в случае положительного перекрестка (рис. 8 слева) и $c = ab^{-1}a^{-1}$ и $d = ab^2$ в случае отрицательного перекрестка (рис. 8 справа). Виртуальному перекрестку соответствует та же пара соотношений, что и для представления $W_1$.

Определенные таким образом группы являются инвариантами зацепления $L$, т. е. справедлива

**Теорема 2.** *Если* $D_L$ *и* $D'_L$ *— две диаграммы, отвечающие виртуальному зацеплению* $L$, *то* $G_l^v(D_L)$ *и* $G_l^v(D'_L)$ *изоморфны*, $l = 1, 2, 3$.

Доказательство следует из теоремы 1 и предложения 5. □

**Предложение 5.** *Пусть $L$ — виртуальное зацепление, $D_L$ — его диаграмма и $\beta$ — виртуальная коса такая, что ее замыкание $\hat{\beta}$ эквивалентно $L$. Тогда группа $G_l^v(D_L)$ изоморфна группе $G_l^v(\beta)$, $l = 1, 2, 3$.*

Доказательство аналогично доказательству предложения 1 в [26]. □

## § 4. Примеры вычисления групп классических зацеплений

В этом параграфе рассматриваем только представления $w_1$ и $w_2$, так как $w_3$ эквивалентно $w_2$. Символом $G_l(L)$ будем обозначать группу зацепления $L$, построенную по представлению $w_l$, $l = 1, 2$.

Для начала установим связь группы узла (зацепления) с группой зеркального образа этого узла. Напомним, что в диаграмме зеркального образа узла все положительные перекрестки исходного узла становятся отрицательными, и наоборот (см. ниже рис. 11). Для зеркального образа узла (зацепления) справедливо

**Предложение 6.** *Пусть $\hat{\beta}$ — узел (зацепление), а $\widehat{\beta^{-1}}$ — его зеркальный образ. Тогда $G_l(\beta^{-1}) = G_l(\beta)$, $l = 1, 2$. Это означает, что группы $G_l$ не отличают узел (зацепление) от его зеркального образа.*

Доказательство. По определению группа $G_l(\beta)$, $l = 1, 2$, $\beta \in B_n$, равна

$$G_l(\beta) = \langle x_1, x_2, \dots, x_n, y \parallel w_l(\beta)(x_i) = x_i,\ i = 1, 2, \dots, n\rangle.$$

Соотношение $w_l(\beta)(x_i) = x_i$, $i = 1, \dots, n$, равносильно $x_i = w_l^{-1}(\beta)(x_i)$, что эквивалентно следующему:

$$x_i = w_l(\beta^{-1})(x_i).$$

Таким образом, получается соотношение группы $G_l(\beta^{-1})$. □

Зацепления, полученные замыканием 2-нитиевых кос, называются *2-нитиевыми торическими зацеплениями.* Сформулируем общий результат для таких зацеплений $\widehat{\sigma_1^k}$, $\sigma_1^k \in B_2$, где $k \in \mathbb{N}$, и как частные случаи найдем группы тривиального узла, зацепления Хопфа и трилистника. Для представления $w_1$ справедливо

**Предложение 7.** *Группа $G_1(\sigma_1^k)$, где $\widehat{\sigma_1^k}$ — 2-нитиевое торическое зацепление, $\sigma_1^k \in B_2$, $k \in \mathbb{N}$, имеет следующий вид:*

$$G_1(\sigma_1^k) = \Bigl\langle x_1, x_2 \parallel x_1 \underbrace{x_2^r x_1^r x_2^r \dots x_2^r}_{k-1} = \underbrace{x_2^r x_1^r x_2^r \dots x_2^r}_{k-1} x_1,\ x_2 \underbrace{x_1^r x_2^r x_1^r \dots x_1^r}_{k-1} = \underbrace{x_1^r x_2^r x_1^r \dots x_1^r}_{k-1} x_2 \Bigr\rangle,$$

*если $k$ четное, и вид*

$$G_1(\sigma_1^k) = \Bigl\langle x_1, x_2 \parallel x_1 \underbrace{x_2^r x_1^r x_2^r \dots x_1^r}_{k-1} = \underbrace{x_2^r x_1^r x_2^r \dots x_1^r}_{k-1} x_2,\ x_2 \underbrace{x_1^r x_2^r x_1^r \dots x_2^r}_{k-1} = \underbrace{x_1^r x_2^r x_1^r \dots x_2^r}_{k-1} x_1 \Bigr\rangle,$$

*если $k$ нечетное.*

Доказательство. Пусть $k=1$. Автоморфизм $w_1(\sigma_1)$ имеет вид

$$w_1(\sigma_1):\begin{cases} x_1 \longmapsto x_1^r x_2 x_1^{-r}, \\ x_2 \longmapsto x_1. \end{cases}$$

Тогда

$$G_1(\sigma_1)=\bigl\langle x_1,x_2 \parallel x_1=x_1^r x_2 x_1^{-r},\ x_2=x_1\bigr\rangle=\langle x_1\rangle\cong\mathbb{Z}.$$

Пусть $k$ нечетное, т. е. $k=2m-1, m\in\mathbb{N}$. Нетрудно заметить, что

$$w_1\bigl(\sigma_1^{2m-1}\bigr):\begin{cases} x_1 \longmapsto \underbrace{x_1^r x_2^r x_1^r \dots x_1^r}_{2m-1} x_2 \underbrace{x_1^{-r} x_2^{-r} x_1^{-r}\dots x_1^{-r}}_{2m-1}, \\ x_2 \longmapsto \underbrace{x_1^r x_2^r x_1^r \dots x_1^r}_{2m-2} x_2 \underbrace{x_1^{-r} x_2^{-r} x_1^{-r}\dots x_1^{-r}}_{2m-2}. \end{cases}$$

Действуя на порождающий $x_1$ автоморфизмом $w_1\bigl(\sigma_1^{2m}\bigr)$, имеем

$$\begin{aligned} x_1 &\xrightarrow{w_1(\sigma_1^{2m-1})} \underbrace{x_1^r x_2^r x_1^r \dots x_1^r}_{2m-1} x_2 \underbrace{x_1^{-r} x_2^{-r} x_1^{-r}\dots x_1^{-r}}_{2m-1} \\ &\xrightarrow{w_1(\sigma_1)} x_1^r x_2^r x_1^{-r} x_1^r x_1^r \dots x_1^{-r} x_1 x_1^r x_2^{-r} x_1^{-r} x_1^{-r} x_1^r \dots x_1^{-r} \\ &= \underbrace{x_1^r x_2^r x_1^r \dots x_1^r}_{2m} x_2 \underbrace{x_1^{-r} x_2^{-r} x_1^{-r}\dots x_1^{-r}}_{2m}. \end{aligned}$$

Действуя на порождающий $x_2$ автоморфизмом $w_1(\sigma_1^{2m})$, получаем

$$\begin{aligned} x_2 &\xrightarrow{w_1(\sigma_1^{2m-1})} \underbrace{x_1^r x_2^r x_1^r \dots x_1^r}_{2m-2} x_2 \underbrace{x_1^{-r} x_2^{-r} x_1^{-r}\dots x_1^{-r}}_{2m-2} \\ &\xrightarrow{w_1(\sigma_1)} x_1^r x_2^r x_1^{-r} x_1^r x_1^r \dots x_1^{-r} x_1 x_1^r x_2^{-r} x_1^{-r} x_1^{-r} x_1^r \dots x_1^{-r} \\ &= \underbrace{x_1^r x_2^r x_1^r \dots x_1^r}_{2m-1} x_2 \underbrace{x_1^{-r} x_2^{-r} x_1^{-r}\dots x_1^{-r}}_{2m-1}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} G_1\bigl(\sigma_1^{2m}\bigr)=\bigl\langle x_1,x_2 \parallel x_1 &\underbrace{x_2^r x_1^r x_2^r \dots x_2^r}_{2m-1} \\ &= \underbrace{x_2^r x_1^r x_2^r \dots x_2^r}_{2m-1} x_1,\ x_2 \underbrace{x_1^r x_2^r x_1^r \dots x_1^r}_{2m-1} = \underbrace{x_1^r x_2^r x_1^r \dots x_1^r}_{2m-1} x_2\bigr\rangle. \end{aligned}$$

Для нечетного $k$ доказывается аналогично. $\square$

Отсюда легко вытекает

**Следствие.** *Пусть $k\in\mathbb{Z}$. Тогда для всякого зацепления $\widehat{\sigma_k}$ фактор-группа группы $G_1\bigl(\sigma_1^k\bigr)$ по коммутанту равна*

$$G_1\bigl(\sigma_1^k\bigr)/\bigl(G_1\bigl(\sigma_1^k\bigr)\bigr)'=\begin{cases} \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} & \text{при } k=2m, \\ \mathbb{Z} & \text{при } k=2m-1, \end{cases}$$

*где $m\in\mathbb{N}$.*

Группы, построенные по представлению $w_2$ для 2-нитиевого торического зацепления, будут иметь кручение. А именно, верно

**Предложение 8.** *Группа* $G_2(\sigma_1^k)$, *где* $\widehat{\sigma_1^k}$ — *2-нитиевое торическое зацепление,* $\sigma_1^k \in B_2$, $k \in \mathbb{N}$, *имеет следующий вид:*

$$G_2(\sigma_1^k) = \langle x_1, t \parallel t^k = 1\rangle \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_k.$$

Доказательство. Пусть $k = 1$. Автоморфизм $w_2(\sigma_1)$ имеет вид

$$w_1(\sigma_1) : \begin{cases} x_1 \longmapsto x_1 x_2^{-1} x_1, \\ x_2 \longmapsto x_1. \end{cases}$$

Тогда

$$G_1(\sigma_1) = \big\langle x_1, x_2 \parallel x_1 = x_1 x_2^{-1} x_1,\ x_2 = x_1 \big\rangle = \langle x_1 \rangle \cong \mathbb{Z}.$$

Нетрудно заметить, что

$$w_2(\sigma_1^{k-1}) : \begin{cases} x_1 \longmapsto \big(x_1 x_2^{-1}\big)^{k-1} x_1, \\ x_2 \longmapsto \big(x_1 x_2^{-1}\big)^{k-2} x_1. \end{cases}$$

Действуя на $x_1$ автоморфизмом $w_2(\sigma_1^k)$, получим

$$x_1 \overset{w_2(\sigma_1^{k-1})}{\longrightarrow} \big(x_1 x_2^{-1}\big)^{k-1} x_1 \overset{w_2(\sigma_1)}{\longrightarrow} \big(x_1 x_2^{-1} x_1 x_1^{-1}\big)^{k-1} x_1 x_2^{-1} x_1 = \big(x_1 x_2^{-1}\big)^k x_1.$$

Аналогично, действуя на $x_2$, имеем

$$x_2 \overset{w_2(\sigma_1^{k-1})}{\longrightarrow} \big(x_1 x_2^{-1}\big)^{k-2} x_1 \overset{w_2(\sigma_1)}{\longrightarrow} \big(x_1 x_2^{-1} x_1 x_1^{-1}\big)^{k-2} x_1 x_2^{-1} x_1 = \big(x_1 x_2^{-1}\big)^{k-1} x_1.$$

Следовательно,

$$G_2(\sigma_1^k) = \big\langle x_1, x_2 \parallel x_1 = \big(x_1 x_2^{-1}\big)^k x_1, \quad x_2 = \big(x_1 x_2^{-1}\big)^{k-1} x_1 \big\rangle = \langle x_1, t \parallel t^k = 1\rangle,$$

где $t = x_1 x_2^{-1}$. Видим, что группа $G_2(\sigma_1^k)$ изоморфна $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_k$. $\square$

Предложение 8 дает классификацию 2-нитиевых торических зацеплений с точностью до зеркального образа.

Используя предложения 7 и 8, можем сформулировать следующие результаты для тривиального узла, зацепления Хопфа и трилистника.

**Тривиальный узел.** Тривиальный узел $U$ можно представить в виде замыкания косы $\sigma_1 \in B_2$ (рис. 9). Известно, что классическая группа тривиального узла $G(U) = \pi(S^3 - U)$ изоморфна $\mathbb{Z}$. В случае представлений Вады справедливо

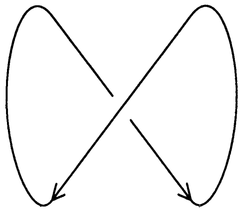

Рис. 9. Тривиальный узел

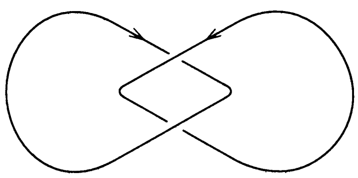

Рис. 10. Зацепление Хопфа

**Предложение 9.** *Пусть $U = \widehat{\sigma_1}$ — тривиальный узел. Тогда его группа $G_l(\sigma_1)$, $l = 1, 2$, изоморфна бесконечной циклической группе, т. е. $G_l(\sigma_1) \cong \mathbb{Z}$.*

**Зацепление Хопфа.** Напомним, что зацепление Хопфа является зацеплением двух тривиальных узлов (рис. 10). Его можно представить в виде замыкания косы $\sigma_1^2 \in B_2$. Классическая группа зацепления Хопфа имеет вид

$$G(\sigma_1^2) = \langle x_1, x_2 \parallel x_1 x_2 = x_2 x_1 \rangle \cong \mathbb{Z}^2.$$

Для зацепления Хопфа справедливо

**Предложение 10.** *Группы зацепления Хопфа, построенные по представлениям $w_1$ и $w_2$, имеют следующий вид:*

$$G_1(\sigma_1^2) = \langle x_1, x_2 \parallel x_1 x_2^r = x_2^r x_1,\ x_2 x_1^r = x_1^r x_2 \rangle = \langle x_1, x_2 \parallel [x_1, x_2^r] = [x_1^r, x_2] = 1 \rangle,$$

$$G_2(\sigma_1^2) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2.$$

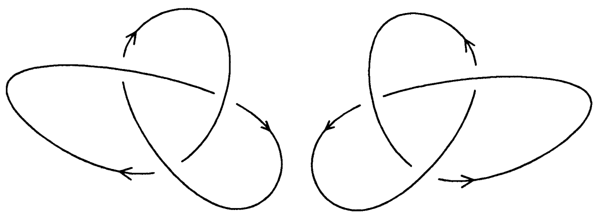

Рис. 11. Трилистники

**Трилистник.** Узел, изображенный на рис. 11 слева, называется *трилистником* и обозначается символом $T$. Его можно представить в виде замыкания косы $\sigma_1^3 \in B_2$. Известно, что классическая группа трилистника $G(T)$ изоморфна $B_3$. Найдем группы трилистника для представлений $w_1$ и $w_2$.

**Предложение 11.** *Группы трилистника, построенные по представлениям $w_1$ и $w_2$, имеют следующий вид:*

$$G_1(\sigma_1^3) = \langle x_1, x_2 \parallel x_1 x_2^r x_1^r = x_2^r x_1^r x_2,\ x_2 x_1^r x_2^r = x_1^r x_2^r x_1 \rangle,$$

$$G_2(\sigma_1^3) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_3.$$

**Зеркальный образ трилистника.** Обозначим зеркальный образ трилистника $T$ символом $\overline{T}$ (рис. 11 справа). Его можно представить в виде замыкания косы $\sigma_1^{-3} \in B_2$. Известно, что классическая группа не отличает трилистник от его зеркального образа, т. е. $G(\overline{T}) \cong G(T)$, хотя доказано, что трилистник и его зеркальный образ не эквивалентны.

**Предложение 12.** *Группы $G_l$ не отличают трилистник от его зеркального образа, т. е. $G_l(\sigma_1^{-3}) \cong G_l(\sigma_1^3)$, где $l = 1, 2$.*

Доказательство следует из предложения 6. □

## § 5. Примеры вычислений групп виртуальных зацеплений

**Предложение 13.** *Пусть $L = \hat{\beta}$ — классическое зацепление. Тогда*

$$G_l^v(\beta) = G_l(\beta) * \mathbb{Z}, \quad l = 1, 2, 3.$$

**Тривиальный узел.** Вычисляем группы тривиального узла $U = \widehat{\sigma_1}$, где $\sigma_1 \in B_2$, для представлений $W_l$, $l = 1, 2, 3$. Справедливо

**Предложение 14.** $G_l^v(\sigma_1) \cong F_2$, $l = 1, 2, 3$.

Доказательство. Для $G_1^v(\sigma_1)$ и $G_2^v(\sigma_1)$ это следует из предложений 9 и 13. Рассмотрим случай $W_3$. Имеем

$$W_3(\sigma_1) : \begin{cases} x_1 \longmapsto x_1^2 x_2, \\ x_2 \longmapsto x_2^{-1} x_1^{-1} x_2. \end{cases}$$

Тогда

$$G_3^v(\sigma_1) = \langle x_1, x_2, y \parallel x_1 = x_1^2 x_2,\ x_2 = x_2^{-1} x_1^{-1} x_2 \rangle = \langle x_1, y \rangle \simeq F_2. \quad \square$$

**Виртуальное зацепление Хопфа.** Виртуальное зацепление Хопфа можно представить в виде замкнутой косы $\widehat{\rho_1\sigma_1}$, где $\rho_1, \sigma_1 \in VB_2$, (рис. 12). Справедливо

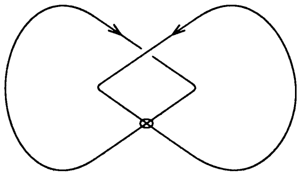

Рис. 12. Виртуальное зацепление Хопфа

**Предложение 15.** $G_l^v(\rho_1\sigma_1) \cong F_2 \leftthreetimes \mathbb{Z}$, $l = 1, 2, 3$.

Доказательство. Находим группу $G_1^v(\rho_1\sigma_1)$. Автоморфизм $W_1(\rho_1\sigma_1)$ действует на $x_1$ и $x_2$ следующим образом:

$$W_1(\rho_1\sigma_1) : \begin{cases} x_1 \xrightarrow{\rho_1} y x_2 y^{-1} \xrightarrow{\sigma_1} y x_1 y^{-1}, \\ x_2 \xrightarrow{\rho_1} y^{-1} x_1 y \xrightarrow{\sigma_1} y^{-1} x_1^r x_2 x_1^{-r} y. \end{cases}$$

Группа виртуального зацепления Хопфа имеет вид

$$\begin{aligned} G_1^v(\rho_1\sigma_1) &= \langle x_1, x_2, y \parallel x_1 = y x_1 y^{-1},\ x_2 = y^{-1} x_1^r x_2 x_1^{-r} y \rangle \\ &= \langle x_1, x_2, y \parallel x_1^y = x_1,\ x_2^y = x_1^{-r} x_2 x_1^r \rangle. \end{aligned}$$

Видим, что группа $G_1^v(\rho_1\sigma_1)$ является полупрямым произведением свободной группы $F_2 = \langle x_1, x_2 \rangle$ и бесконечной циклической группы $\langle y \rangle$, при этом $y$ действует на $F_2$ как автоморфизм

$$\varphi_1 : \begin{cases} x_1 \longmapsto x_1, \\ x_2 \longmapsto (x_2)^{x_1^r}. \end{cases}$$

Автоморфизм $W_2(\rho_1\sigma_1)$ действует на $x_1$ и $x_2$ следующим образом:

$$W_2(\rho_1\sigma_1) : \begin{cases} x_1 \longmapsto y x_1 y^{-1}, \\ x_2 \longmapsto y^{-1} x_1 x_2^{-1} x_1 y. \end{cases}$$

Получаем группу

$$\begin{aligned} G_2^v(\rho_1\sigma_1) &= \langle x_1, x_2, y \parallel x_1 = y x_1 y^{-1},\ x_2 = y^{-1} x_1 x_2^{-1} x_1 y \rangle \\ &= \langle x_1, x_2, y \parallel [x_1, y] = 1,\ y x_2 y^{-1} = x_1 x_2^{-1} x_1 \rangle. \end{aligned}$$

Таким образом, $G_2^v(\rho_1\sigma_1)$ является расширением свободной группы $F_2 = \langle x_1, x_2\rangle$ при помощи $\mathbb{Z} = \langle y\rangle$, и сопряжение элементом $y^{-1}$ индуцирует автоморфизм

$$\varphi_2 : \begin{cases} x_1 \longmapsto x_1, \\ x_2 \longmapsto x_1 x_2^{-1} x_1. \end{cases}$$

Автоморфизм $W_3(\rho_1\sigma_1)$ действует на $x_1$ и $x_2$ следующим образом:

$$W_3(\rho_1\sigma_1) : \begin{cases} x_1 \longmapsto y x_2^{-1} x_1^{-1} x_2 y^{-1}, \\ x_2 \longmapsto y^{-1} x_1^2 x_2 x_1 x_2 y. \end{cases}$$

Группа имеет вид

$$\begin{aligned} G_3^v(\rho_1\sigma_1) &= \bigl\langle x_1, x_2, y \parallel x_1 = y x_2^{-1} x_1^{-1} x_2 y^{-1},\ x_2 = y^{-1} x_1^2 x_2 y \bigr\rangle \\ &= \bigl\langle x_1, x_2, y \parallel x_1^y = x_2^{-1} x_1^{-1} x_2,\ x_2 = \bigl(x_1^2 x_2\bigr)^y \bigr\rangle. \end{aligned}$$

Преобразуем последнее соотношение:

$$x_2 = \bigl(x_1^y\bigr)^2 x_2^y = x_2^{-1} x_1^{-2} x_2 x_2^y \Rightarrow x_2^y = x_2^{-1} x_1^{-2} x_2^2.$$

Получаем

$$G_3^v(\rho_1\sigma_1) = \bigl\langle x_1, x_2, y \parallel x_1^y = x_2^{-1} x_1^{-1} x_2,\ x_2^y = x_2^{-1} x_1^{-2} x_2^2 \bigr\rangle.$$

Покажем, что $G_3^v(\rho_1\sigma_1)$ является HNN-расширением с базой $F_2 = \langle x_1, x_2\rangle$, ассоциативными подгруппами $A = F_2$, $B = \bigl\langle x_1^{x_2}, x_2^{-1} x_1^{-2} x_2^2 \bigr\rangle$ и проходной буквой $y$, которая индуцирует изоморфизм $A$ на $B$:

$$\varphi_3 : \begin{cases} x_1 \longmapsto x_1^{x_2}, \\ x_2 \longmapsto x_2^{-1} x_1^{-2} x_2^2. \end{cases}$$

Покажем, что $B = A$. Для этого надо показать, что сопряжение элементом $y$ индуцирует автоморфизм $\varphi_3$ группы $A$. Используем преобразования Нильсена [27] для группы $B = \langle x_2^{-1} x_1 x_2, x_2^{-1} x_1^{-2} x_2 x_2\rangle$. Умножая второй элемент на квадрат первого, имеем $\bigl(x_2^{-1} x_1 x_2,\ x_2^{-1} x_1^2 x_2 x_2^{-1} x_1^{-2} x_2 x_2\bigr) = \bigl(x_2^{-1} x_1 x_2,\ x_2\bigr)$. Сопрягая элементом $x_2^{-1}$ первый элемент, получаем $\bigl(x_2 x_2^{-1} x_1 x_2 x_2^{-1},\ x_2\bigr) = (x_1,\ x_2)$. $\square$

**Следствие.** *Группы $G_l^v(\rho_1\sigma_1)$, $l = 1, 2, 3$, линейны.*

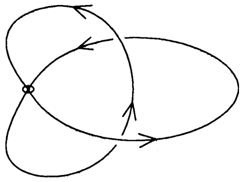

Рис. 13. Виртуальный трилистник

Доказательство. Поскольку $G_l^v$ является расширением $F_2$ при помощи $\mathbb{Z}$, она вкладывается в голоморф $\operatorname{Hol} F_2$. Из [28] следует, что голоморф $\operatorname{Hol} F_2$ является линейной группой. $\square$

**Виртуальный трилистник.** Виртуальный трилистник $vT$ (рис. 13) является замыканием косы $\rho_1\sigma_1^2 \in VB_2$. Найдем группу $G_1^v(vT)$. Имеем

$$W_1\bigl(\rho_1\sigma_1^2\bigr) : \begin{cases} x_1 \xrightarrow{\rho_1} y x_2 y^{-1} \xrightarrow{\sigma_1} y x_1 y^{-1} \xrightarrow{\sigma_1} y x_1^r x_2 x_1^{-r} y^{-1}, \\ x_2 \xrightarrow{\rho_1} y^{-1} x_1 y \xrightarrow{\sigma_1} y^{-1} x_1^r x_2 x_1^{-r} y \xrightarrow{\sigma_1} y^{-1} x_1^r x_2^r x_1 x_2^{-r} x_1^{-r} y. \end{cases}$$

Следовательно,

$$G_1^v\big(\rho_1\sigma_1^2\big) = \big\langle x_1, x_2, y \parallel x_1 = yx_1^r x_2 x_1^{-r} y^{-1},\ x_2 = y^{-1}x_1^r x_2^r x_1 x_2^{-r} x_1^{-r} y\big\rangle.$$

Из первого соотношения выражаем $x_2$, подставляем во второе, получаем

$$G_1^v\big(\rho_1\sigma_1^2\big) = \big\langle x_1, y \parallel x_1^{-r} y^{-1} x_1 y x_1^r = y^{-2} x_1^r y x_1 y^{-1} x_1^{-r} y^2\big\rangle.$$

Аналогично строим группы виртуального трилистника, используя $W_2$ и $W_3$. Автоморфизм $W_2\big(\rho_1\sigma_1^2\big)$ действует на $x_1$ и $x_2$ следующим образом:

$$W_2\big(\rho_1\sigma_1^2\big) : \begin{cases} x_1 \longmapsto yx_1x_2^{-1}x_1y^{-1}, \\ x_2 \longmapsto y^{-1}x_1x_2^{-1}x_1x_2^{-1}x_1y. \end{cases}$$

Получаем группу

$$G_2^v\big(\rho_1\sigma_1^2\big) = \big\langle x_1, x_2, y \parallel x_1 = yx_1x_2^{-1}x_1y^{-1},\ x_2 = y^{-1}x_1x_2^{-1}x_1x_2^{-1}x_1y\big\rangle.$$

Из первого соотношения выражаем $x_2$, подставляем во второе и получаем

$$G_2^v\big(\rho_1\sigma_1^2\big) = \big\langle x_1, y \parallel x_1y^{-1}x_1^{-1}yx_1 = y^{-2}x_1yx_1^{-1}y^{-1}x_1y^2\big\rangle.$$

Ясно, что группы $G_1^v\big(\rho_1\sigma_1^2\big)$ и $G_2^v\big(\rho_1\sigma_1^2\big)$ не изоморфны $F_2$, так как они имеют два порождающих и одно нетривиальное соотношение.

Автоморфизм $W_3\big(\rho_1\sigma_1^2\big)$ действует на $x_1$ и $x_2$ следующим образом:

$$W_3\big(\rho_1\sigma_1^2\big) : \begin{cases} x_1 \longmapsto yx_2^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1}x_1^{-1}x_2y^{-1}, \\ x_2 \longmapsto y^{-1}x_1^2x_2x_1x_2y. \end{cases}$$

Соответствующая группа имеет вид

$$G_3^v\big(\rho_1\sigma_1^2\big) = \big\langle x_1, x_2, y \parallel x_1 = yx_2^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1}x_1^{-1}x_2y^{-1},\ x_2 = y^{-1}x_1^2x_2x_1x_2y\big\rangle.$$

Видим, что группы $G_l^v\big(\rho_1\sigma_1^2\big)$, $l = 1, 2, 3$, не изоморфны $F_2$, что доказывает неэквивалентность виртуального трилистника тривиальному узлу.

**Узел Кишино.** Узел Кишино (рис. 14 слева) является связной суммой двух тривиальных виртуальных узлов, при этом он сам не является тривиальным узлом [29]. Известно, что его полином Джонса тривиален. Пусть $c = \rho_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2\rho_1\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1} \in VB_3$ (рис. 14 справа), тогда замыкание $\hat{c}$ эквивалентно узлу Кишино. Найдем группы $G_1^v(c)$ и $G_2^v(c)$.

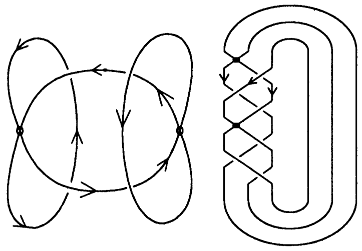

Рис. 14. Узел Кишино

Нетрудно доказать, что образы косы $c$ при представлениях $W_1$ и $W_2$ имеют вид

$$W_1(c) : \begin{cases} x_1 \longmapsto yx_2y^{-1}, \\ x_2 \longmapsto x_3^{(y^{-1}x_1^{-r}y^2x_2^{-r}yx_2^ry^{-1})}, \\ x_3 \longmapsto x_1^{(y^2x_2^{-r}y^{-2}x_2^ry^{-2}x_1^ryx_3^ry^{-1}x_1^{-r}y^2x_2^{-r}yx_2^ry^{-1})}, \\ y \longmapsto y, \end{cases}$$

$$W_2(c) : \begin{cases} x_1 \longmapsto yx_2y^{-1}, \\ x_2 \longmapsto \big(x_3^{-1}\big)^{(y^{-1}x_1y^2x_2^{-1}yx_2y^{-1})}, \\ x_3 \longmapsto \big(x_1^{-1}\big)^{(y^2x_2y^{-2}x_2^{-1}y^{-2}x_1yx_3^{-1}y^{-1}x_1y^2x_2^{-1}yx_2y^{-1})}, \\ y \longmapsto y. \end{cases}$$

Покажем, что $G_l^v(c) \cong F_2$, $l = 1, 2$, т. е. эти группы не отличают узел Кишино от тривиального узла. Имеем

$$G_1^v(c) = \langle x_1, x_2, x_3, y \parallel x_1 = yx_2y^{-1},\ x_2 = x_3^{(y^{-1}x_1^{-r}y^2x_2^{-r}yx_2^ry^{-1})},$$

$$x_3 = x_1^{(y^2x_2^{-r}y^{-2}x_2^ry^{-2}x_1^ryx_3^ry^{-1}x_1^{-r}y^2x_2^{-r}yx_2^ry^{-1})}\rangle.$$

Используя первое соотношение, можно исключить $x_1$ из множества порождающих группы $G_1^v(\hat{c})$, а используя второе соотношение, можно исключить $x_3$. Получаем

$$G_1^v(c) = \langle x, y \parallel x^{-r}yx^{-r}yx^ry^{-1}xyx^{-r}y^{-1}x^ry^{-1}x^r$$

$$= x^{-r}yx^{-r}yx^ry^{-1}xyx^{-r}y^{-1}x^ry^{-1}x^r\rangle \cong F_2,$$

где $x = x_2$.

Аналогично проверяется, что $G_2^v(c) \cong F_2$.

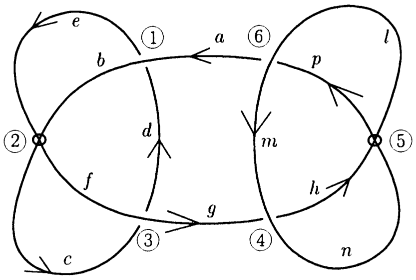


Рис. 15. Диаграмма узла Кишино

Для вычисления группы $G_3^v(c)$ удобнее использовать диаграммный подход (рис. 15). Имеем

$$G_3^v(c) = \langle a, b, c, d, e, f, g, h, l, m, n, p, y \parallel a = eb^{-1}e^{-1},\ d = eb^2,\ e = f^{y^{-1}},$$

$$b = c^y,\ c = g^2d,\ f = d^{-1}g^{-1}d,\ g = n^2h,\ m = h^{-1}n^{-1}h,\ n = p^{y^{-1}},$$

$$h = l^y,\ l = a\ m^{-1}a^{-1},\ p = am^2\rangle.$$

Можно показать, что она изоморфна

$$G_3^v(c) = \langle c, l, p, y \parallel y^{-1}l^{-y}p^{-2y^{-1}}l^{-y}p^{-2y^{-1}}cc^{-2y}y = c^{-1}l^{-y}p^{-2y^{-1}}c,$$

$$p^{-1}lp = l^{-y}p^{y^{-1}}l^y,\ p = l^{-y}p^{-2y^{-1}}l^{-y}p^{-2y^{-1}}cc^{-y}c^{-1}p^{2y^{-1}}l^{2y}\rangle.$$

**Вопрос.** *Будет ли $G_3^v(c)$ изоморфна $F_2$?*

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Birman J. S.* Braids, links, and mapping class groups. Princeton: Princeton Univ. Press, 1974. (Ann. Math. Stud; V. 82).
2. *Crowell R., Fox R.* Introduction to knot theory. Berlin: Springer-Verl., 1963. (Graduate Texts Math; V. 57).

**3.** *Kassel C., Turaev V.* Braid groups. Berlin: Springer-Verl., 2008. (Graduate Texts Math.; N 247).

**4.** *Kauffman L. H.* Virtual knot theory // Eur. J. Comb. 1999. V. 20, N 7. P. 663–690.

**5.** *Kamada S.* Invariants of virtual braids and a remark on left stabilizations and virtual exchange moves // Kobe J. Math. 2004. V. 21, N 1–2. P. 33–49.

**6.** *Manturov V. O., Ilyutko D. P.* Virtual knots. The state of the art. Singapore: World Sci. Press, 2013.

**7.** *Bardakov V. G., Bellingeri P.* Groups of virtual and welded links // J. Knot Theory Ramifications. 2014. V. 23, N 3. 1450014. 23 p.

**8.** *Мантуров В. О.* О распознавании виртуальных кос // Зап. науч. сем. ПОМИ РАН. 2003. Т. 299, № 8. С. 267–286.

**9.** *Bardakov V. G., Mikhalchishina Yu. A., Neshchadim M. V.* Representations of virtual braids by automorphisms and virtual knot groups // J. Knot Theory Raminifications. 2017. V. 26, N 1. 1750003. 17 p.

**10.** *Carter J. S., Silver D., Williams S.* Invariants of links in thickened surfaces // Algebr. Geom. Topol. 2014. V. 14, N 3. P. 1377–1394.

**11.** *Wada M.* Group invariants of links // Topology. 1992. V. 31, N 2. P. 399–406.

**12.** *Михальчишина Ю. А.* Локальные представления групп кос // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 4. С. 838–851.

**13.** *Vershinin V. V.* On homology of virtual braids and Burau representation // J. Knot Theory Raminifications. 2001. V. 10, N 5. P. 795–812.

**14.** *Goussarov M., Polyak M., Viro O.* Finite type invariants of classical and virtual knots // Topology. 2000. V. 39, N 5. P. 1045–1068.

**15.** *Fenn R., Rimanyi R., Rourke C.* The braid-permutation group // Topology. 1997. V. 36, N 1. P. 123–135.

**16.** *Shpilrain V.* Representing braids by automorphisms // Intern. J. Algebra Comput. 2001. V. 11, N 6. P. 773–777.

**17.** *Bacardit L., Dicks W.* Actions of the braid group, and new algebraic proofs of results of Dehornoy and Larue // Groups Complex. Cryptol. 2009. V. 1, N 1. P. 77–129. DOI 10.1515/GCC.2009.77. MR2502938 (2010a:20083).

**18.** *Sakuma M.* A note on Wada′s group invariants of links // Proc. Japan Acad. Ser. A. Math. Sci. 1991. V. 67, N 5. P. 176–177. (http://mat.uab.cat/ dicks/bacardit.html).

**19.** *Ito T.* The classification of Wada-type representations of braid groups // J. Pure Appl. Algebra. 2013. V. 217, N 9. P. 1754–1763. DOI 10.1016/j.jpaa.2012.12.010. MR3042635.

**20.** *Chrisp J., Paris L.* Representations of the braid group by automorphisms of groups, invariants of links, and Garside groups // Pacific J. Math. 2005. V. 221, N 1. P. 1–27.

**21.** *Lin X., Nelson S.* On generalized knot groups // J. Knot Theory Raminifications. 2008. V. 17, N 3. P. 263–272.

**22.** *Nelson S., Neumann W.* The 2-generalized knot group determines the knot // Commun. Contemp. Math. 2008. V. 10, N supp01. P. 843–847.

**23.** *Bardakov V. G.* Virtual and welded links and their invariants // Sib. Elektron. Mat. Izv. 2005. V. 2. P. 196–199.

**24.** *Chterental O.* Virtual braids and virtual curve diagrams. arXiv 1411.63 13v14 [math.QA] 2 Jun 2015. 25 p.

**25.** *Kauffman L. H., Lambropoulou S.* The L-move and virtual braids // J. Knot Theory Ramifications. 2006. V. 15, N 6. P. 773–811.

**26.** *Бардаков В. Г., Михальчишина Ю. А., Нещадим М. В.* Группы виртуальных зацеплений // Сиб. мат. журн. (в печати).

**27.** *Магнус В., Каррас А., Солитер Д.* Комбинаторная теория групп. М.: Наука, 1974.

**28.** *Бардаков В. Г., Брюханов О. В.* О линейности некоторых расширений // Вестн. НГУ. Сер. математика, механика, информатика. 2007. Т. 7, № 3. С. 45–58.

**29.** *Kishino T., Satoh S.* A note on non-classical virtual knots // J. Knot Theory Ramifications. 2004. V. 13, N 7. P. 845–856.

**30.** *Bardakov V. G., Mikhalchishina Yu. A., Neshchadim M. V.* Representations of virtual braids by automorphisms and virtual knot groups. arXiv:1603.01425 [math.AT] 4 Mar 2016.

**31.** *Бардаков В. Г.* Строение группы сопрягающих автоморфизмов // Алгебра и логика. 2003. Т. 42, № 5. С. 515–541.

**32.** *Elhamdadi M., Saito M., Scott Carter J., Silver D., Williams S.* Virtual knot invariants from group biquandles and their cocycles // J. Knot Theory Ramifications. 2009. V. 18, N 7. P. 957–972.

*Статья поступила 1 сентября 2016 г.*

Михальчишина Юлия Андреевна
Новосибирский гос. аграрный университет,
ул. Добролюбова, 160, Новосибирск 630039
jam92888@gmail.com