Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2017. Том 58, № 3

УДК 512.542

О ПРОНОРМАЛЬНОСТИ ПОДГРУПП НЕЧЕТНЫХ ИНДЕКСОВ В КОНЕЧНЫХ ПРОСТЫХ СИМПЛЕКТИЧЕСКИХ ГРУППАХ

А. С. Кондратьев,
Н. В. Маслова, Д. О. Ревин

Аннотация. Подгруппа H группы G называется *пронормальной*, если для любого элемента $g \in G$ подгруппы H и H^g сопряжены в подгруппе $\langle H, H^g\rangle$. В [1] была высказана гипотеза о том, что подгруппа нечетного индекса в конечной простой группе всегда пронормальна. Недавно [2] авторы подтвердили эту гипотезу для всех конечных простых групп, за исключением $PSL_n(q)$, $PSU_n(q)$, $E_6(q)$ и ${}^2E_6(q)$, где q во всех случаях нечетно и n не является степенью числа 2, а также $P\,\mathrm{Sp}_{2n}(q)$, где $q \equiv \pm 3 \pmod 8$. Однако в [3] авторами было доказано, что при $q \equiv \pm 3 \pmod 8$ и $n \equiv 0 \pmod 3$ простая симплектическая группа $P\,\mathrm{Sp}_{2n}(q)$ содержит непронормальную подгруппу нечетного индекса. Тем самым гипотеза о пронормальности подгруппы нечетного индекса в конечной простой группе была опровергнута.

Как естественное расширение данной гипотезы возникает проблема классификации конечных неабелевых простых групп, в которых любая подгруппа нечетного индекса пронормальна. В настоящей работе продолжается изучение этой проблемы для симплектической простой группы $P\,\mathrm{Sp}_{2n}(q)$ при $q \equiv \pm 3 \pmod 8$ (в отсутствие этого ограничения подгруппы нечетных индексов пронормальны). Доказано, что если n не является числом вида 2^m или $2^m(2^{2k}+1)$, то данная группа содержит непронормальную подгруппу нечетного индекса. Доказано, что если $n = 2^m$, то все подгруппы нечетных индексов в группе $P\,\mathrm{Sp}_{2n}(q)$ пронормальны. Для случая $n = 2^m(2^{2k}+1)$ и $q \equiv \pm 3 \pmod 8$ вопрос о пронормальности подгрупп нечетных индексов в группе $P\,\mathrm{Sp}_{2n}(q)$ пока остается открытым.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.310

Ключевые слова: конечная группа, простая группа, симплектическая группа, пронормальная подгруппа, нечетный индекс.

Введение

В соответствии с определением Холла подгруппа H группы G называется *пронормальной*, если для любого элемента $g \in G$ подгруппы H и H^g сопряжены в подгруппе $\langle H, H^g\rangle$.

В дальнейшем мы рассматриваем только конечные группы и в связи с этим термин «группа» употребляется нами в значении «конечная группа».

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ (проект МК–6118.2016.1) и Программы государственной поддержки ведущих университетов РФ (соглашение № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013). Второй автор является стипендиатом Фонда Дмитрия Зимина «Династия» (программа поддержки молодых математиков). Третий автор поддержан Международной стипендиальной инициативой Президента CAS (PIFI, грант 2016VMA078).

Подгруппа H конечной группы G называется *холловой*, если ее порядок $|H|$ и индекс $|G:H|$ взаимно просты.

В [1] доказано, что холловы подгруппы в конечных простых группах пронормальны, и на основании анализа доказательства высказана следующая

Гипотеза 1 [1, гипотеза 1]. *В конечных простых группах подгруппы нечетных индексов пронормальны.*

Эта гипотеза подтверждена авторами [2, теорема] для всех конечных простых групп, за исключением $PSL_n(q)$, $PSU_n(q)$, $E_6(q)$ и ${}^2E_6(q)$, где q во всех случаях нечетно и n не является степенью числа 2, а также $P\,\mathrm{Sp}_{2n}(q)$, где $q \equiv \pm 3 \pmod 8$.

Однако с помощью полученного в [3, теорема 1] критерия пронормальности добавлений к абелевым нормальным подгруппам конечных групп авторам удалось построить примеры непронормальных подгрупп нечетных индексов в группах $P\,\mathrm{Sp}_{6n}(q)$, где $q \equiv \pm 3 \pmod 8$ (см. [3, теорема 2]). Таким образом, гипотеза 1 была опровергнута.

Как естественное расширение гипотезы 1 в свете полученных результатов возникает

Проблема 1. *Классифицировать неабелевы простые группы, в которых подгруппы нечетных индексов пронормальны.*

В настоящей работе мы продолжаем исследование проблемы 1 для случая симплектических групп. На самом деле результат [3, теорема 2] позволяет исследовать проблему 1 для значительно бóльшего массива симплектических групп, чем это сделано в [3]. Мы докажем следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $G = P\,\mathrm{Sp}_{2n}(q)$, где $q \equiv \pm 3 \pmod 8$ и n не является числом вида 2^w или $2^w(2^{2k}+1)$. Тогда G содержит непронормальную подгруппу нечетного индекса.*

Кроме того, полностью исследуется один из двух оставшихся случаев симплектических групп, которые не накрываются теоремой 1, а именно случай групп $P\,\mathrm{Sp}_{2n}(q)$, где $q \equiv \pm 3 \pmod 8$ и $n = 2^w$. Основным результатом настоящей работы является

Теорема 2. *Подгруппы нечетных индексов пронормальны в группах $P\,\mathrm{Sp}_{2n}(q)$, где $n = 2^w \geq 2$ и $q \equiv \pm 3 \pmod 8$.*

Из теоремы 2 и основного результата в [2] получаем

Следствие. *Подгруппы нечетных индексов пронормальны в простой классической группе, у которой размерность или порядок основного поля является степенью числа* 2.

Замечание. Проблема 1 остается открытой для групп $P\,\mathrm{Sp}_{2n}(q)$, где $q \equiv \pm 3 \pmod 8$ и $n = 2^m(2^{2k}+1)$, а также для групп $E_6(q)$, ${}^2E_6(q)$, $PSL_n(q)$ и $PSU_n(q)$, где во всех случаях q нечетно и n не является степенью числа 2.

Вспомогательные результаты

Терминология и обозначения, в основном, стандартны, их можно найти в [4, 5]. Запись $H \,\mathrm{prn}\, G$ используется для сокращения «H является пронормальной подгруппой в группе G».

Для группы G и подмножества π множества всех простых чисел через $\mathrm{Soc}(G)$, $O_\pi(G)$ и $Z(G)$ обозначаются цоколь, π-радикал (наибольшая нормальная π-подгруппа) и центр группы G соответственно. Для простого числа p через $\mathrm{Syl}_p(G)$ обозначается множество силовских p-подгрупп группы G. Как обычно, через π' обозначается множество всех простых чисел, не принадлежащих π. Кроме того, если n — натуральное число, то n_π — наибольший натуральный делитель числа n такой, что все простые делители n_π принадлежат π. Для конечной группы G будем, как это обычно принято, писать $O(G)$ вместо $O_{2'}(G)$.

Лемма 1 [1, лемма 5]. *Пусть G — конечная группа и $H \leq G$. Предположим также, что подгруппа H содержит некоторую силовскую подгруппу S группы G. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *$H \operatorname{prn} G$;*

(2) *подгруппы H и H^g сопряжены в $\langle H, H^g\rangle$ для любого $g \in N_G(S)$.*

Таким образом, для доказательства пронормальности подгруппы H нечетного индекса в группе G достаточно установить сопряженность подгрупп H и H^g в $\langle H, H^g\rangle$ для любого нетривиального элемента $g \in N_G(S)$ нечетного порядка, где S — фиксированная силовская 2-подгруппа группы H (и, следовательно, группы G).

Лемма 2. *Пусть p — простое число и $\mathfrak{X}_p$ — класс всех конечных групп, в которых силовская p-подгруппа совпадает со своим нормализатором. Тогда*

(1) *если $X \trianglelefteq Y$ и $X, Y/X \in \mathfrak{X}_p$, то $Y \in \mathfrak{X}_p$;*

(2) *если $X \leq Y \in \mathfrak{X}_p$ и индекс $|Y : X|$ не делится на p, то $X \operatorname{prn} Y$.*

Доказательство. Докажем утверждение (1). Пусть $X \trianglelefteq Y$ и $X, Y/X \in \mathfrak{X}_p$. Пусть также $S \in \mathrm{Syl}_p(Y)$. Справедливы равенства

$$N_Y(SX) = SX \quad \text{и} \quad N_X(S \cap X) = S \cap X,$$

так как $SX/X \in \mathrm{Syl}_p(Y/X)$ и $S \cap X \in \mathrm{Syl}_p(X)$. Покажем, что $N_Y(S) = S$. Это так, поскольку $N_Y(S) \leq N_Y(SX) = SX$ и, следовательно,

$$N_Y(S) = N_{SX}(S) = SN_X(S), \quad N_X(S) \leq N_X(S \cap X) = S \cap X.$$

Утверждение (2) следует из леммы 1 и того факта, что подгруппа индекса, не кратного p, в группе $Y \in \mathfrak{X}_p$ содержит некоторую силовскую p-подгруппу S группы Y, а значит, и ее нормализатор в Y. $\square$

Лемма 3 [6, следствие]. *Пусть $G \cong P\mathrm{Sp}_{2n}(q)$, где q является степенью нечетного простого числа, и $S \in \mathrm{Syl}_2(G)$. Тогда если $q \equiv \pm 1 \pmod 8$, то $N_G(S) = S$; если $q \equiv \pm 3 \pmod 8$, то фактор-группа $N_G(S)/S$ изоморфна элементарной абелевой 3-группе порядка 3^t, где число t находится из двоичного разложения*

$$n = 2^{s_1} + \dots + 2^{s_t}, \quad s_1 > \dots > s_t \geq 0.$$

Лемма 4 [7, лемма 1]. *Если группа Фробениуса FC с ядром F и циклическим дополнением $C = \langle g\rangle$ порядка n точно действует на векторном пространстве V над полем ненулевой характеристики, взаимно простой с $|F|$, то минимальный многочлен элемента g как линейного преобразования пространства V равен $\lambda^n - 1$.*

Лемма 5. *Пусть H — подгруппа нечетного порядка группы G, где*

$$SL_2(q) \leq G \leq GL_2(q) \quad \text{или } PSL_2(q) \leq G \leq PGL_2(q),$$

причем $(|H|, q) = 1$, и $g \in N_G(H)$ — элемент нечетного порядка. Тогда

(1) *группа H абелева;*

(2) *$g \in C_G(H)$.*

Доказательство. Для группы $G = PSL_2(q)$ данное утверждение легко вывести из списка максимальных подгрупп группы G [8, теорема II.8.27]. Приведем, однако, здесь другое доказательство, охватывающее все остальные случаи и основанное на элементах теории представлений и линейной алгебры.

Допустим, что $PSL_2(q) \leq G \leq PGL_2(q)$. Так как подгруппы H и $\langle H, g\rangle$ имеют нечетные порядки, эти подгруппы содержатся в $PSL_2(q)$. Более того, в $SL_2(q) \leq GL_2(q)$ у этих подгрупп найдутся изоморфные им прообразы. Следовательно, достаточно доказать лемму для случая, когда $G = GL_2(q)$.

Докажем (1). По теореме Машке [9, теорема (1.9)] группа H вполне приводима. Следовательно, если H приводима, то она сопряжена с подгруппой группы диагональных матриц, и утверждение (1) верно. Поэтому считаем, что подгруппа H неприводима. Более того, заменяя в случае необходимости поле $\mathbb{F}_q$ полем разложения $\mathbb{F}_{q^n}$ группы H и пользуясь вложением $GL_2(q) \hookrightarrow GL_2(q^n)$, не уменьшая общности, можно считать тождественное вложение H в G точным абсолютно неприводимым представлением группы H. По [9, теорема (15.13)] степень этого представления, равная 2, совпадает со степенью некоторого неприводимого комплексного представления и, следовательно, по [9, теорема (3.11)] делит нечетное число $|H|$; противоречие.

Докажем (2). Пусть характеристика поля $\mathbb{F}_q$ равна p. Элемент g можно представить в виде $g = xy$, где $x, y \in \langle g\rangle$, причем x — p-элемент, а y — p'-элемент. Заменяя H подгруппой $\langle H, y\rangle$ (порядок которой делит $|H||y|$ и которая ввиду утверждения (1) абелева), а g на x, можно считать, что g — p-элемент. Более того, поскольку силовская p-подгруппа группы G изоморфна аддитивной группе поля $\mathbb{F}_q$, заключаем, что $|g| = p$. Ввиду [10, теорема 4.34] и абелевости подгруппы H имеем $H = F \times K$, где $F = [H, \langle g\rangle]$ и $K = C_H(g)$. При этом $C_F(g) = F \cap K = 1$, тем самым если группа F нетривиальна, то группа $\langle F, g\rangle = F\langle g\rangle$ является группой Фробениуса с ядром F и циклическим дополнением $\langle g\rangle$ порядка p. Применяя лемму 7, получаем противоречие, так как минимальный многочлен $\lambda^p - 1$ элемента g делит его характеристический многочлен $\det(g - \lambda I)$ степени 2, а $p = |g|$ нечетно. $\square$

Лемма 6 [2, лемма 3]. *Пусть H — подгруппа, N — нормальная подгруппа группы G и $\bar{\ } : G \to G/N$ — естественный эпиморфизм. Справедливы следующие утверждения:*

(1) *если $H \operatorname{prn} G$, то $\overline{H} \operatorname{prn} \overline{G}$;*

(2) *если $N \leq H$ и $\overline{H} \operatorname{prn} \overline{G}$, то $H \operatorname{prn} G$.*

В частности, подгруппа H нечетного индекса пронормальна в G тогда и только тогда, когда подгруппа $H/O_2(G)$ пронормальна в $G/O_2(G)$.

Лемма 7 [2, лемма 5]. *Пусть H и M — подгруппы группы G, причем $H \leq M$. Справедливы следующие утверждения:*

(1) *если $H \operatorname{prn} G$, то $H \operatorname{prn} M$;*

(2) *если $S \leq H$ для некоторой силовской подгруппы S группы G, причем $N_G(S) \leq M$ и $H \operatorname{prn} M$, то $H \operatorname{prn} G$.*

Лемма 8 [3, лемма 3]. *Пусть H — транзитивная группа подстановок степени n и A — группа. Определим действие группы H на группе $V = A^n$ по правилу*

$$(x_1, \dots, x_n)^\pi = (x_{1\pi^{-1}}, \dots, x_{n\pi^{-1}}) \quad \text{для любых } (x_1, \dots, x_n) \in V \text{ и } \pi \in H.$$

Тогда

$$C_V(H) = \{(x_1, \dots, x_n) \in V \mid x_1 = \dots = x_n\} \cong A.$$

Лемма 9 [3, теорема 1]. *Пусть H и V — подгруппы группы G такие, что V — абелева нормальная подгруппа в G и $G = HV$. Тогда следующие утверждения равносильны*:
(1) $H \operatorname{prn} G$;
(2) $U = N_U(H)[H, U]$ *для любой H-инвариантной подгруппы $U \leq V$.*

Лемма 10 [3, теорема 2]. *Группа $\mathrm{PSp}_{6n}(q)$ при $q \equiv \pm 3 \pmod 8$ содержит непронормальную подгруппу нечетного индекса.*

Лемма 11 [3, лемма 8]. *Пусть H — группа подстановок степени n и A — конечная группа. Определим действие группы H на группе $V = A^n$ по правилу*

$$(x_1, \dots, x_n)^\pi = (x_{1\pi^{-1}}, \dots, x_{n\pi^{-1}}) \quad \text{для любых } (x_1, \dots, x_n) \in V \text{ и } \pi \in H.$$

Предположим, что H содержит транзитивную подгруппу K такую, что

$$(|A|, |K|) = 1.$$

Тогда для любой H-инвариантной подгруппы U группы V выполнено равенство

$$U = C_U(H)[H, U].$$

Лемма 12. *Пусть выполнено одно из следующих утверждений:*
(а) *$G = S_n$ — симметрическая группа степени n;*
(б) *G — диэдральная группа;*
(в) *$G = D \wr S_n$ — сплетение диэдральной и симметрической групп.*
Тогда
(1) *силовская 2-подгруппа группы G совпадает со своим нормализатором;*
(2) *любая подгруппа нечетного индекса пронормальна в G.*

Доказательство. Достаточно доказать утверждение (1) в случаях (а) и (б). Тогда справедливость утверждения (1) в случае (в) и утверждения (2) будут следовать из леммы 2. Для случая (а) см. [11, лемма 4]. Рассмотрим случай (б). Путь G — диэдральная группа, $S \in \mathrm{Syl}_2(G)$ и $U = O(G)$. Тогда $G = SU$, поэтому $N_G(S) = SN_U(S) = SC_U(S)$. Покажем, что $C_U(S) = 1$, и тем самым докажем утверждение (1). Из определения диэдральной группы следует, что группа U циклическая и S содержит инволюцию t такую, что $u^t = u^{-1}$ для всех $u \in U$. Допустим, что $1 \neq u \in C_U(S)$. Тогда u — нетривиальный элемент нечетного порядка и $u \neq u^{-1} = u^t = u$; противоречие. $\square$

Лемма 13. *Пусть $G = A \wr B = VB$ — естественное подстановочное сплетение циклической группы A порядка 3 и симметрической группы $B = S_n$, где $n = 2^w$, через $V = V_1 \times \dots \times V_n$, где $V_i \cong A$, обозначена база сплетения и H — подгруппа нечетного индекса в G. Тогда $H \operatorname{prn} G$.*

Доказательство. Пусть $S \in \mathrm{Syl}_2(G)$ и $S \leq H$. По теореме Силова можно считать, что $S \leq B$.

Из леммы 12(1) следует, что $N_G(SV) = SV \le HV$. Поэтому

$$N_G(S) \le N_G(SV) \le HV.$$

Ввиду леммы 7 достаточно показать, что $H \operatorname{prn} HV$, а в силу леммы 9 для этого достаточно, чтобы выполнялось равенство $U = N_U(H)[H,U]$ для любой H-инвариантной подгруппы $U \le V$.

Пусть U — H-инвариантная подгруппа из V. Включение $N_U(H)[H,U] \subseteq U$ очевидно. Заметим, что $S \le B$ является транзитивной группой подстановок и $(|S|,|A|) = 1$. Ввиду лемм 11 и 8 имеем $U = C_U(S)[S,U] \le N_U(H)[H,U]$. Из леммы 9 следует, что $H \operatorname{prn} HV$. □

Лемма 14. *Пусть $G = A \wr B$ — естественное подстановочное сплетение группы $A \cong A_4$ и симметрической группы $B = S_n$, где $n = 2^w$, и H — подгруппа нечетного индекса в G. Тогда $H \operatorname{prn} G$.*

Доказательство. Заметим, что $G/O_2(G) \cong G_1$, где G_1 — естественное подстановочное сплетение циклической группы порядка 3 и симметрической группы S_n. Применение лемм 6 и 13 завершает доказательство леммы. □

Лемма 15. *Пусть Q — подгруппа нечетного индекса группы $L = L_1 \times L_2 \times \dots \times L_n$, где L_i — конечные группы, и π_i — отображение проекции группы L на L_i. Тогда если для некоторого i выполняется равенство $Q^{\pi_i} = L_i$ и L_i — неабелева простая группа, то $L_i \le Q$.*

Доказательство. Так как $L_i \trianglelefteq L$, заключаем, что $Q \cap L_i \trianglelefteq Q$, откуда $(Q \cap L_i)^{\pi_i}$ является нормальной подгруппой в группе $Q^{\pi_i} = L_i$, которая проста. Таким образом, либо $(Q \cap L_i)^{\pi_i} = 1$, либо $(Q \cap L_i)^{\pi_i} = L_i$. В последнем случае получаем, что $L_i \le Q$.

Осталось показать, что $(Q \cap L_i)^{\pi_i} \ne 1$. Пусть подгруппа $S \in \mathrm{Syl}_2(L)$ такова, что $S \le Q$. Тогда $S \cap L_i \in \mathrm{Syl}_2(L_i)$, откуда $1 \ne S \cap L_i = (S \cap L_i)^{\pi_i} \le (Q \cap L_i)^{\pi_i}$. □

Лемма 16. *Пусть $G = A \wr B$ — естественное подстановочное сплетение группы $A = A_5$ и симметрической группы $B = S_n$, где $n = 2^w$, и H — подгруппа нечетного индекса в G. Тогда $H \operatorname{prn} G$.*

Доказательство. Обозначим базу сплетения через $L = L_1 \times L_2 \times \dots \times L_n$, где $L_i \cong A$. Пусть $S \in \mathrm{Syl}_2(G)$ такая, что $S \le H$. Заметим, что $G = X/O_2(X)$, где X — подгруппа группы $G_1 = \mathrm{Sp}_{2n}(5)$, изоморфная $SL_2(5) \wr S_n$.

Из [12, теорема 9] следует, что индекс $|G_1 : X|$ нечетен. Ввиду леммы 3 выполнено равенство $|N_{G_1}(S_1) : S_1| = 3$, где $S_1 \in \mathrm{Syl}_2(G_1)$. Поэтому $|N_X(S_1) : S_1| = |G : N_G(S)|$ делит 3. Заметим, что элемент $(g, g, \dots, g) \in L$, где g — элемент порядка 3 из нормализатора в группе A ее силовской 2-подгруппы, принадлежит $N_G(S)$. Поэтому $|N_G(S) : S| = 3$.

Пусть g — элемент порядка 3 из $N_G(S)$. Приведенные рассуждения показывают, что $g \in L$. Покажем, что подгруппы H и H^g сопряжены в $K = \langle H, H^g \rangle$.

Рассмотрим подгруппу $K_0 = K \cap L$. Пусть π_i — отображение координатной проекции группы L на L_i. Заметим, что K действует транзитивно на L_i, поэтому все подгруппы $K_0^{\pi_i}$ попарно изоморфны. Кроме того, $K_0^{\pi_i}$ являются подгруппами нечетных индексов в L_i, тем самым для них есть всего три возможности:

(1) $K_0^{\pi_i} \cong A_5$ для любого i;
(2) $K_0^{\pi_i} \cong A_4$ для любого i;
(3) $K_0^{\pi_i} \cong C_2 \times C_2$ для любого i.

В случае (1) ввиду леммы 15 подгруппа L содержится в K, поэтому $g \in K$.

В случае (2) подгруппа K нормализует подгруппу $\prod\limits_{i=1}^{n} K_0^{\pi_i}$ и

$$N_G(S) \le N_G\left(\prod_{i=1}^{n} K_0^{\pi_i}\right).$$

Согласно лемме 7 достаточно показать, что $H \operatorname{prn} N_G\left(\prod\limits_{i=1}^{n} K_0^{\pi_i}\right)$. Это так, потому что ввиду леммы 14 подгруппы нечетных индексов пронормальны в группе $N_G\left(\prod\limits_{i=1}^{n} K_0^{\pi_i}\right) \cong A_4 \wr S_n$.

В случае (3) имеем $K \cap L = H \cap L = S \cap L \in \mathrm{Syl}_2(L)$ и $L \cap S \trianglelefteq H$. Поэтому $H \le N_G(L \cap S)$ и $g \in N_G(L \cap S)$ в силу выбора элемента g. Заметим, что подгруппы нечетных индексов пронормальны в группе $N_G(L \cap S)/(L \cap S) \le B \cong S_n$. Следовательно, подгруппы H и H^g сопряжены в $\langle H, H^g \rangle$ по лемме 6. Стало быть, $H \operatorname{prn} G$. $\square$

Лемма 17. *Пусть $G = A \wr S_n = LH$ — естественное подстановочное сплетение неабелевой простой группы A и симметрической группы $H = S_n$, где $n = 2^w$, и через $L = L_1 \times \cdots \times L_n$, где $L_i \cong A$, обозначена база сплетения. Пусть K — подгруппа нечетного индекса в G и $K_0 = K \cap L$. Тогда для любой подгруппы M_1 группы L_1, которая содержит нормализатор в L_1 проекции группы K_0 на L_1, подгруппа K содержится в некоторой подгруппе группы G, изоморфной $M_1 \wr S_n$.*

Доказательство. Группа $H = S_n$ естественным образом действует на множестве $\Omega = \{1, \dots, n\}$. Обозначим через X_i стабилизатор точки $i \in \Omega$ в H.

Пусть S — силовская 2-подгруппа группы G, содержащаяся в K, и T — регулярная подгруппа группы $H = S_n$. Тогда $|T| = n = 2^w$ и по теореме Силова существует элемент $g \in G$ такой, что S^g содержит T. Поэтому можно считать, что $T \le K$. Тогда $H = TX_i = X_iT$ для любого i.

Заметим, что T транзитивно действует сопряжениями на множестве $\{L_i \mid 1 \le i \le n\}$. Пусть K_i — проекция группы K_0 на L_i. Тогда T также действует транзитивно на множестве $\{K_i \mid 1 \le i \le n\}$ (откуда $K_i \cong K_j$ для любых i и j), тем самым

$$\{K_i \mid 1 \le i \le n\} = \left\{K_1^t \mid t \in T\right\} \tag{1}$$

и $K_0 \le \prod\limits_{i=1}^{n} K_i$. Более того, покажем, что $K \le N_G\left(\prod\limits_{i=1}^{n} K_i\right)$.

Заметим, что $N_L\left(\prod\limits_{i=1}^{n} K_i\right) = \prod\limits_{i=1}^{n} N_{L_i}(K_i)$. Покажем, что $H \le N_G\left(\prod\limits_{i=1}^{n} K_i\right)$. Поскольку подгруппа X_i централизует L_i, она централизует также K_i. Кроме того, T регулярно действует на $\{K_i \mid 1 \le i \le n\}$ ввиду (1). Для любого элемента $h \in H$ и для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ найдутся элементы $x \in X_i$ и $t \in T$ такие, что $h = xt$. Пусть $K_i^t = K_j$. Тогда $K_i^h = K_i^{xt} = K_i^t = K_j$. Тем самым показано, что $H \le N_G\left(\prod\limits_{i=1}^{n} K_i\right)$. Поэтому

$$N_G\left(\prod_{i=1}^{n} K_i\right) = HN_L\left(\prod_{i=1}^{n} K_i\right) = H\prod_{i=1}^{n} N_{L_i}(K_i) \cong N_{L_1}(K_1) \wr H.$$

Кроме того, если $N_{L_1}(K_1) \leq M_1 \leq L_1$, то

$$K \leq H \prod_{i=1}^{n} N_{L_i}(K_i) = H \prod_{t \in T} (N_{L_1}(K_1))^t \leq H \prod_{t \in T} (M_1)^t \cong M_1 \wr H. \quad \square$$

Лемма 18. *Пусть $G = A \wr B$ — естественное подстановочное сплетение группы $A = PSL_2(q)$ и симметрической группы $B = S_n$, где $q \equiv \pm 3 \pmod 8$ и $n = 2^w$, и H — подгруппа нечетного индекса в G. Тогда $H \operatorname{prn} G$.*

Доказательство. Допустим, что лемма неверна и q — наименьшее из чисел, сравнимых с ± 3 по модулю 8, для которых группа G содержит непронормальную подгруппу H нечетного индекса. Пусть подгруппа $S \in \mathrm{Syl}_2(G)$ такая, что $S \leq H$.

Обозначим базу сплетения через $L = L_1 \times L_2 \times \dots \times L_n$, где $L_i \cong A$.

Заметим, что $G = X/O_2(X)$, где X — подгруппа группы $G_1 = \mathrm{Sp}_{2n}(q)$, изоморфная $SL_2(q) \wr S_n$.

Из [12, теорема 9] следует, что индекс $|G_1 : X|$ нечетен. Рассуждая, как в доказательстве леммы 16, убеждаемся, что $|N_G(S) : S| = 3$.

Пусть g — элемент порядка 3 из $N_G(S)$. Ввиду сказанного $g \in L$. Более того, можно считать, что $g \in C_L(B)$. Покажем, что подгруппы H и H^g сопряжены в подгруппе $K = \langle H, H^g \rangle$, и тем самым по лемме 1 докажем пронормальность в G подгруппы H.

Рассмотрим подгруппы $H_0 = H \cap L$ и $K_0 = K \cap L$. Пусть $\pi_i : L \to L_i$ — отображение координатной проекции. Заметим, что так как H содержит силовскую 2-подгруппу группы G, она действует сопряжениями транзитивно на множестве $\{L_i \mid i = 1, \dots, n\}$. Поэтому все группы $H_i = H_0^{\pi_i}$ попарно изоморфны и аналогичное утверждение справедливо для групп $K_i = K_0^{\pi_i}$. Кроме того, H_i и K_i являются подгруппами нечетных индексов в L_i, поскольку содержат силовскую 2-подгруппу $S_i = S \cap L_i$ группы L_i.

Существует две возможности.

Случай (i): $K_i = L_i$ для любого i.

Случай (ii): $K_i < L_i$ для любого i.

В случае (i) ввиду леммы 15 имеем $L \leq K$, поэтому $g \in K$, и требуемое доказано.

Пусть имеет место случай (ii). Ввиду леммы 17 можно считать, что $K \leq M_1 \wr S_n$, где $K_1 \leq M_1 < L_1$, и M_1 — максимальная подгруппа нечетного индекса в L_1.

По [12, теорема 1] имеет место один из следующих четырех случаев.

Случай (ii)(1): $M_1 \cong A_4$. В этом случае $H \operatorname{prn} M_1 \wr S_n$ ввиду леммы 14 и $N_G(S) \leq M_1 \wr S_n$, поэтому $H \operatorname{prn} G$ по лемме 7.

Случай (ii)(2): $M_1 \cong A_5$. В этом случае $H \operatorname{prn} M_1 \wr S_n$ ввиду леммы 16 и $N_G(S) \leq M_1 \wr S_n$, поэтому $H \operatorname{prn} G$ по лемме 7.

Случай (ii)(3): $M_1 \cong PSL_2(q_0)$, где $q = q_0^r$ для некоторого нечетного простого числа r. Легко видеть, что $q_0 \equiv \pm 3 \pmod 8$, откуда следует, что $H \operatorname{prn} M \wr S_n$ ввиду выбора числа q. Кроме того, $N_G(S) \leq M \wr S_n$, и, значит, $H \operatorname{prn} G$ по лемме 7.

Случай (ii)(4): M_1 — диэдральная группа порядка $q - \varepsilon$, где число $\varepsilon = \pm 1$ выбрано так, что $q \equiv \varepsilon \pmod 4$. Покажем сначала, что в этом случае $g \in N_L(H_0)$.

Заметим, что в рассматриваемом случае группа M_1 и любая ее подгруппа (в частности, H_1 и K_1 и, как следствие, все группы H_i и K_i) обладают нормальными циклическими 2-дополнениями. Так как

$$H_0 \leq \langle H_1, \dots, H_n \rangle \cong H_1 \times \dots \times H_n,$$

подгруппа H_0 также обладает нормальным 2-дополнением $U = O(H_0)$.

Положим $g_i = g^{\pi_i}$ для всех $i = 1, \dots, n$. Пусть также $U_i = O(H_i)$ и $V_i = O(K_i)$ для любого i. Тогда $H_i^{g_i} = (H^g)^{\pi_i} \leq K_i$. Тем самым

$$U_i^{g_i} = O(H_i)^{g_i} = O\big(H_i^{g_i}\big) \leq O(K_i) = V_i.$$

Но U_i — единственная подгруппа группы V_i, порядок которой равен $|U_i|$ ввиду цикличности V_i. Поэтому $U_i^{g_i} = U_i$ и согласно лемме 5 элемент $g_i \in L_i \cong PSL_2(q)$ централизует U_i.

Далее, поскольку $O(H_0) = U \leq \langle U_1, \dots, U_n \rangle$, имеем

$$g \in \langle g_1, \dots, g_n \rangle \leq \langle C_{L_1}(U_1), \dots, C_{L_n}(U_n) \rangle \leq C_L(\langle U_1, \dots, U_n \rangle) \leq C_L(U).$$

Отсюда, так как U — 2-дополнение, а $S \cap L$ — силовская 2-подгруппа в H_0, получаем $H_0^g = (S^g \cap L)U^g = (S \cap L)U = H_0$ и, как и утверждалось, $g \in N_L(H_0)$.

Рассмотрим в G подгруппу $Y = N_G(H_0)$. По доказанному $g \in Y$ и ясно, что $H \leq Y$, откуда $K = \langle H, H^g \rangle \leq \langle H, g \rangle \leq Y$. Далее, Y — подгруппа нечетного индекса в G, и проекция группы $Y \cap L = N_L(H_0)$ на каждый сомножитель L_i строго меньше L_i (иначе из леммы 15 следует, что $L_i \leq Y$ и $L \leq Y$ ввиду транзитивности действия группы Y на множестве $\{L_i \mid i = 1, \dots, n\}$, откуда вытекает, что подгруппа L содержит разрешимую нетривиальную нормальную подгруппу H_0). По лемме 17 имеем $Y \leq M < G$, где $M \cong M_1^* \wr S_n$, а M_1^* — максимальная подгруппа группы L_1, содержащая $N_{L_1}((Y \cap L)^{\pi_1})$. Для группы M_1^*, как и для группы M_1 выше, имеет место один из случаев (ii)(1)–(ii)(4). Леммы 12, 14, 16 и выбор q показывают, что во всех случаях $H \operatorname{prn} M$ и, поскольку $g \in Y \leq M$, подгруппы H и H^g сопряжены в $\langle H, H^g \rangle$. $\square$

Доказательство теоремы 1

Пусть $G = \mathrm{Sp}_{2n}(q)$, где $q \equiv \pm 3 \pmod 8$ и n не является числом вида 2^w или $2^w(2^{2k}+1)$. Тогда в двоичной записи числа n найдутся либо две единицы в некоторых разрядах с номерами s_1 и s_2 разной четности, либо три единицы в разрядах с номерами s_1, s_2 и s_3 одинаковой четности. Пусть $m = 2^{s_1} + 2^{s_2}$ или $m = 2^{s_1} + 2^{s_2} + 2^{s_3}$ соответственно. Легко видеть, что m кратно 3.

Обозначим через V векторное пространство размерности n над полем $\mathbb{F}_q$ с невырожденной кососимметрической билинейной формой, ассоциированное с группой G. Рассмотрим стабилизатор H в G невырожденного подпространства размерности m пространства V. Индекс $|G : H|$ нечетен ввиду [12, теорема 1]. Таким образом, если K — подгруппа нечетного индекса в H, то K — подгруппа нечетного индекса в группе G.

Легко понять, что $H = H_1 \times H_2$, где $H_1 \cong \mathrm{Sp}_{2m}(q)$ и $H_2 \cong \mathrm{Sp}_{2(n-m)}(q)$. Так как 3 делит m, подгруппа $H_1/O_2(H_1)$ содержит по лемме 10 непронормальную подгруппу $K_1/O_2(H_1)$ нечетного индекса. Поэтому ввиду леммы 6 подгруппа K_1 непронормальна в H_1, поэтому подгруппа $K_1 \times H_2$ непронормальна в H, а значит, по лемме 7 и в G.

В силу леммы 6 простая группа $G/O_2(G) = G/Z(G) \cong P\,\mathrm{Sp}_{2n}(q)$ содержит непронормальную подгруппу нечетного индекса $(K_1 \times H_2)/O_2(G)$. $\square$

Доказательство теоремы 2

Пусть $G = \mathrm{Sp}_n(q)$, где $n = 2^w$ и $q \equiv \pm 3 \pmod 8$. Обозначим через V векторное пространство размерности n над полем $\mathbb{F}_q$ с невырожденной кососимметрической билинейной формой, ассоциированное с группой G.

Допустим, что теорема неверна и q — наименьшее из чисел, сравнимых с ± 3 по модулю 8, для которых группа G содержит непронормальную подгруппу H нечетного индекса.

Рассмотрим естественный гомоморфизм $\bar{}: G \to G/Z(G)$. Заметим, что $|Z(G)| = 2$, поэтому ввиду леммы 6 и выбора H подгруппа $\overline{H}$ непронормальна $\overline{G}$. Поскольку ввиду основного результата из [2] подгруппы нечетных индексов пронормальны в группах $P\,\mathrm{Sp}_2(q) \cong PSL_2(q)$, получаем $n \geq 4$.

Пусть $S \in \mathrm{Syl}_2(H) \subseteq \mathrm{Syl}_2(G)$. В силу леммы 3 имеем $|N_{\overline{G}}(\overline{S}) : \overline{S}| = 3$. По лемме 1 найдется элемент $\bar{g}$ порядка 3 из $N_{\overline{G}}(\overline{S}) \setminus \overline{S}$ такой, что $\overline{H}$ и $\overline{H}^{\bar{g}}$ не сопряжены в $\overline{K} = \langle \overline{H}, \overline{H}^{\bar{g}} \rangle$.

В силу выбора элемента $\bar{g}$ подгруппа $\overline{K}$ собственная в $\overline{G}$. Значит, существует максимальная подгруппа $\overline{M}$ (нечетного индекса) в $\overline{G}$ такая, что $\overline{K} \leq \overline{M}$.

Ввиду [12, теорема 1] для $\overline{M}$ существуют следующие возможности.

Случай (1): $\overline{M} = C_{\overline{G}}(\sigma)$ для полевого автоморфизма σ простого нечетного порядка r группы $\overline{G}$.

В этом случае по [5, предложение 4.5.4] имеем $M \cong P\,\mathrm{Sp}_n(q_0)$, где $q = q_0^r$. Поскольку r — нечетное число, легко понять, что $q_0 \equiv \pm 3 \pmod 8$. Отсюда следует, что $\overline{H} \operatorname{prn} \overline{M}$ ввиду выбора числа q. Кроме того, $\overline{S} \leq \overline{M}$ и $|N_{\overline{M}}(\overline{S}) : \overline{S}| = 3$ в силу леммы 3. Поэтому $\bar{g} \in N_{\overline{G}}(\overline{S}) = N_{\overline{M}}(\overline{S}) \leq \overline{M}$. Получаем противоречие между выбором $\bar{g}$ и тем, что $\overline{H} \operatorname{prn} \overline{M}$.

Случай (2): $\overline{G} = P\,\mathrm{Sp}_4(q)$ и $\overline{M} \cong 2^4.A_5$, где $q \equiv 3 \pmod 8$. Из теоремы в [2] следует, что подгруппы нечетных индексов пронормальны в $\overline{M}/O_2(\overline{M})$. Отсюда $\overline{H} \operatorname{prn} \overline{M}$ ввиду леммы 6. Кроме того, $\overline{S} \leq \overline{M}$ и $|N_{\overline{M}}(\overline{S}) : \overline{S}| = 3$ по лемме 3. Снова $\bar{g} \in N_{\overline{G}}(\overline{S}) = N_{\overline{M}}(\overline{S}) \leq \overline{M}$, и получаем противоречие между выбором $\bar{g}$ и тем, что $\overline{H} \operatorname{prn} \overline{M}$.

Случай (3): $\overline{M}$ — стабилизатор в $\overline{G}$ ортогонального разложения

$$V = \bigoplus_{i=1}^{t} V_i \tag{2}$$

естественного симплектического модуля V группы G в прямую сумму изометричных подпространств V_i размерности m, причем $m = 2^{w_1} \geq 2$. Выберем подгруппу $\overline{M}$ указанного типа так, чтобы число m было наименьшим из возможных, т. е. так, чтобы разложение (2) было неизмельчаемым.

Ввиду [5, предложение 4.2.10] имеем $\overline{M} \cong 2^{t-1}.(P\,\mathrm{Sp}_m(q) \wr S_t)$, где $n = mt$. Кроме того, $\overline{S} \leq \overline{M}$, и в $\overline{M}$ существует элемент порядка 3, нормализующий подгруппу $\overline{S}$, т. е. $|N_{\overline{M}}(\overline{S}) : \overline{S}| = 3$ по лемме 3. Поэтому, как и в предыдущих случаях, $\bar{g} \in N_{\overline{G}}(\overline{S}) = N_{\overline{M}}(\overline{S}) \leq \overline{M}$.

Рассмотрим композицию $\tilde{}: M \to \overline{M}/O_2(\overline{M})$ естественных гомоморфизмов

$$M \to \overline{M}, \quad \overline{M} \to \overline{M}/O_2(\overline{M}).$$

Обозначим через $L = L_1 \times L_2 \times \cdots \times L_t$, где $L_i \cong P\,\mathrm{Sp}_m(q)$, нормальную подгруппу в $\widetilde{M}$, соответствующую базе сплетения $P\,\mathrm{Sp}_m(q) \wr S_t$. Заметим, что невырожденные подпространства V_i в разложении (2) можно считать ассоциированными с соответствующими подгруппами L_i, рассматриваемыми как проективные симплектические группы.

Ввиду выбора элемента $\bar{g}$ его образ $\tilde{g}$ — элемент порядка 3 из $N_{\widetilde{M}}(\widetilde{S})$. Ясно, что $\tilde{g} \in L$. Покажем, что подгруппы $\widetilde{H}$ и $\widetilde{H}^{\tilde{g}}$ сопряжены в подгруппе $\widetilde{K} = \langle \widetilde{H}, \widetilde{H}^{\tilde{g}} \rangle$. Тем самым получим противоречие, поскольку ядро гомоморфизма $\tilde{}$ содержится в H и поэтому подгруппы $\overline{H}$ и $\overline{H}^{\bar{g}}$ окажутся сопряженными в $\overline{K}$.

Рассмотрим подгруппу $K_0 = \widetilde{K} \cap L$. Пусть π_i — отображение координатной проекции группы L на L_i. Заметим, что $\widetilde{K}$ действует транзитивно на L_i. Поэтому все $K_0^{\pi_i}$ попарно изоморфны. Кроме того, $K_0^{\pi_i}$ являются подгруппами нечетных индексов в L_i. Существуют только две возможности.

Случай (3)(i): $K_0^{\pi_i} = L_i$ для любого i.

Случай (3)(ii): $K_0^{\pi_i} < L_i$ для любого i.

Случай (3)(i) исключается леммой 15, поскольку иначе $L \le \widetilde{K}$ и $\tilde{g} \in \widetilde{K}$.

Пусть имеет место случай (3)(ii).

Ввиду леммы 17 можно считать, что $\widetilde{K} \le Y < \widetilde{M}$, где $Y \cong R_1 \wr S_t$, а R_1 — максимальная подгруппа нечетного индекса в $L_1 \cong P\,\mathrm{Sp}_m(q)$.

Из леммы 18 следует, что $m > 2$. Кроме того, поскольку подгруппа $\overline{M}$, содержащая $\overline{K}$, была выбрана таким образом, чтобы число m было наименьшим из возможных, подгруппа R_1 в L_1 не может являться стабилизатором разложения ассоциированного с L_1 подпространства V_1 в ортогональную прямую сумму подпространств меньшей размерности. Поэтому согласно [12, теорема 1] имеет место один из двух случаев.

Случай (3)(ii)(1): $R_1 = C_{L_1}(\sigma)$ для полевого автоморфизма σ простого нечетного порядка r группы L_1, отождествляемой с $P\,\mathrm{Sp}_m(q)$. Тогда ввиду [5, предложение 4.5.4] имеем $R_1 \cong P\,\mathrm{Sp}_m(q_0)$, где $q = q_0^r$. Поскольку r — нечетное число, легко понять, что $q_0 \equiv \pm 3 \pmod 8$. Отсюда следует, что $Y = X/O_2(X)$, где X — подгруппа группы $G_1 = \mathrm{Sp}_m(q_0)$, изоморфная $\mathrm{Sp}_m(q_0) \wr S_t$.

Подгруппы нечетных индексов пронормальны в $\mathrm{Sp}_m(q_0)$ ввиду выбора числа q. Из [12, теорема 9] следует, что индекс $|G_1 : X|$ нечетен. По лемме 3 имеем $|N_{G_1}(S_1) : S_1| = 3$, где $S_1 \in \mathrm{Syl}_2(G_1)$. Поэтому подгруппы нечетных индексов пронормальны в X в силу леммы 7, следовательно, подгруппы нечетных индексов пронормальны в Y ввиду леммы 6. Заметим, что подгруппа $Y \cong R_1 \wr S_t$ содержит элемент порядка 3, нормализующий ее силовскую 2-подгруппу. Отсюда, как и выше, заключаем, что $\tilde{g} \in N_{\widetilde{M}}(\widetilde{S}) \le Y$, и так как $\widetilde{H} \le \widetilde{K} \le Y$, снова получаем противоречие.

Случай (3)(ii)(2): $m = 4$, q — простое число, $q \equiv 3 \pmod 8$ и $R_1 \cong 2^4.A_5$. Из леммы 16 следует, что подгруппы нечетных индексов пронормальны в $Y/O_2(Y)$. Отсюда вытекает, что $\widetilde{H} \operatorname{prn} Y$ ввиду леммы 6. Кроме того, $\widetilde{S} \le Y$, и поскольку Y содержит элемент порядка 3, нормализующий $\widetilde{S}$, имеем $\tilde{g} \in N_{\widetilde{M}}(\widetilde{S}) \le Y$. Получаем противоречие. $\square$

Авторы выражают глубокую благодарность А. В. Заварницину за полезные консультации. Работа над данным текстом была завершена во время визита второго и третьего авторов в Китайскую народную республику. Указанные авторы благодарят профессора Тацуро Ито и профессора Вэньбиня Го за гостеприимство.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вдовин Е. П., Ревин Д. О.* Пронормальность холловых подгрупп в конечных простых группах // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 3. С. 527–542.

2. *Кондратьев А. С., Маслова Н. В., Ревин Д. О.* О пронормальности подгрупп нечетного индекса в конечных простых группах // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 6. С. 1101–1107.

3. *Кондратьев А. С., Маслова Н. В., Ревин Д. О.* Критерий пронормальности добавлений к абелевым нормальным подгруппам // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22, № 1. С. 153–158.

4. *Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A.* Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1985.

5. *Kleidman P. B., Liebeck M.* The subgroup structure of the finite classical groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990.

6. *Кондратьев А. С.* Нормализаторы силовских 2-подгрупп в конечных простых группах // Мат. заметки. 2005. Т. 78, № 3. С. 368–376.

7. *Мазуров В. Д.* О множестве порядков элементов конечной группы // Алгебра и логика. 1994. Т. 33, № 1. С. 81–89.

8. *Huppert B.* Endliche Gruppen. I. Berlin: Springer-Verl., 1967.

9. *Isaacs I. M.* Character theory of finite groups. New York: Acad. Press, 1976.

10. *Isaacs I. M.* Finite group theory. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2008.

11. *Carter R., Fong P.* The Sylow 2-subgroups of the finite classical groups // J. Algebra. 1964. V. 1, N 1. P. 139–151.

12. *Маслова Н. В.* Классификация максимальных подгрупп нечетного индекса в конечных простых классических группах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 4. С. 100–118.

Статья поступила 17 октября 2016 г.

Кондратьев Анатолий Семенович, Маслова Наталья Владимировна
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
ул. С. Ковалевской, 16, Екатеринбург 620990;
Уральский федеральный университет,
ул. Мира, 19, Екатеринбург 620002
a.s.kondratiev@imm.uran.ru, butterson@mail.ru

Ревин Данила Олегович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090;
Department of Mathematics,
University of Science and Technology of China,
Hefei 230026, P. R. China
revin@math.nsc.ru