*Сибирский математический журнал*
*Май—июнь, 2017. Том 58, № 3*

*УДК 512.554.1*

# ПРОСТЫЕ КОНЕЧНОМЕРНЫЕ АЛГЕБРЫ, НЕ ИМЕЮЩИЕ КОНЕЧНОГО БАЗИСА ТОЖДЕСТВ

**А. В. Кислицин**

**Аннотация.** В 1993 г. И. П. Шестаков поставил вопрос о существовании центральной простой конечномерной алгебры над полем нулевой характеристики, тождества которой не задаются конечным набором («Днестровская тетрадь», вопрос 3.103). В 2012 г. И. М. Исаевым и автором построен искомый пример, дающий положительный ответ на поставленный вопрос. В 2015 г. автором построен пример конечномерной центральной простой коммутативной алгебры, не имеющей конечного базиса тождеств. В данной работе продолжается исследование вопроса И. П. Шестакова для случая антикоммутативных алгебр. Строится пример семимерной простой антикоммутативной алгебры над полем нулевой характеристики, не имеющей конечного базиса тождеств.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.309

**Ключевые слова:** простая алгебра, тождество алгебры, базис тождеств, бесконечно базируемая алгебра, сильно бесконечно базируемая алгебра.

Пусть $F$ — произвольное поле и $A$ — алгебра над полем $F$. *Тождеством алгебры* $A$ будем называть многочлен $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ с коэффициентами из $F$, для которого $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$ при всех $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$. Если для алгебры $A$ существует конечная совокупность тождеств этой алгебры, из которой следуют все ее тождества, то будем называть алгебру $A$ *конечно базируемой*. В противном случае будем говорить, что алгебра $A$ *бесконечно базируема* или *не конечно базируема* (сокращенно НКБ-*алгебра*).

В 1970 г. Воон-Ли построил над любым бесконечным полем характеристики 2 конечномерную алгебру Ли, тождества которой не эквивалентны никакой конечной системе тождеств этой алгебры [1]. Дренски доказал, что если $F$ — бесконечное поле характеристики $p > 0$, то существует конечномерная алгебра Ли над полем $F$, не имеющая конечного базиса тождеств [2].

В 1976 г. С. В. Полин для любого конечного поля $F$ построил конечную неассоциативную $F$-алгебру, удовлетворяющую тождеству $x(yz) = 0$ и не имеющую конечного базиса тождеств [3]. В 1978 г. И. В. Львов построил шестимерную неассоциативную НКБ-алгебру $\overline{V} = V \oplus E$, где $V$ — конечномерное векторное пространство, $E$ — подпространство $\mathrm{End}_F V$ [4].

В [5] построен пример четырехмерной НКБ-алгебры, удовлетворяющей тождеству $x(yz) = 0$. И. М. Исаев построил пример конечномерной правоальтернативной алгебры, не обладающей конечным базисом тождеств [6].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 16–11–10002).

Интерес к вопросам, связанным с конечной базируемостью тождеств в различных классах линейных алгебр, тесно связан с проблемой Шпехта о конечной базируемости тождеств произвольной ассоциативной алгебры над полем нулевой характеристики [7, 8]. В 1987 г. А. Р. Кемер показал, что тождества любой ассоциативной алгебры над полем нулевой характеристики имеют конечный базис, что решило проблему Шпехта положительно [9]. Однако существуют примеры ассоциативных НКБ-алгебр над бесконечным полем характеристики $p > 0$, альтернативных разрешимых НКБ-алгебр над полем характеристики 2 и альтернативных коммутативных (а следовательно, йордановых) НКБ-алгебр над полем характеристики 3. Более подробный обзор этого вопроса можно найти в работе А. Я. Белова [10].

В 1989 г. И. М. Исаев доказал, что алгебра $\overline{V} = V \oplus E$ ($V = \langle v_1, v_2\rangle_F$ — векторное пространство, $E = \langle e_{11}, e_{12}, e_{22}\rangle_F$ — подпространство $\mathrm{End}_F V$, $F$ — конечное поле) порождает существенно бесконечно базируемое многообразие линейных алгебр (т. е. такое локально конечное многообразие алгебр, что любое локально конечное многообразие алгебр, его содержащее, не имеет конечного базиса тождеств) [11]. В 1997 г. этим же автором показано, что для любого конечного поля $F$ существует конечная линейная $F$-алгебра, не имеющая независимого базиса тождеств [12].

В 1993 г. И. П. Шестаков сформулировал вопрос: существуют ли конечномерные центральные простые алгебры над полем нулевой характеристики, которые не имеют конечного базиса тождеств [13, вопрос 3.103]? Отметим, что любая конечномерная простая алгебра над алгебраически замкнутым полем с точностью до изоморфизма однозначно определяется своими тождествами [14].

В [15, 16] для любого поля $F$ строится пример конечномерной центральной простой НКБ-алгебры над полем $F$, что, в частности, дает положительный ответ на вопрос И. П. Шестакова. В [17] построен пример семимерной коммутативной центральной простой НКБ-алгебры над полем нулевой характеристики. В классе антикоммутативных алгебр над полем нулевой характеристики не существует центральных алгебр, поскольку в этом случае антикоммутативность исключает наличие в алгебре единицы. В настоящей работе построен пример семимерной простой антикоммутативной алгебры, не имеющей конечного базиса тождеств, а именно доказана

**Теорема 1.** *Пусть $D = \langle e, v_1, v_2, e_{11}, e_{12}, e_{22}, p\rangle_F$ — алгебра над полем $F$ нулевой характеристики, ненулевые произведения базисных элементов которой определяются правилами*

$$v_i e_{ij} = -e_{ij} v_i = v_j, \quad v_2 p = -p v_2 = e, \quad v_i e = -e v_i = v_i,$$

$$e_{ij} e = -e e_{ij} = e_{ij}, \quad pe = -ep = p.$$

*Алгебра $D$ является простой антикоммутативной алгеброй, не имеющей конечного базиса тождеств.*

## 1. Предварительные замечания и вспомогательные утверждения

Зафиксируем обозначения. Пусть $F$ — поле нулевой характеристики, $\mathfrak{M} = \mathrm{Var}\langle (xy)(uv) = 0, xy + yx = 0\rangle$ — многообразие антикоммутативных метабелевых $F$-алгебр и $B = \langle v_1, v_2, e_{11}, e_{12}, e_{22}\rangle_F$ — алгебра, ненулевые произведения базисных элементов которой определяются правилами $v_i e_{ij} = -e_{ij} v_i = v_j$. Несложно проверить, что $B \in \mathfrak{M}$.

Заметим, что любое неассоциативное слово по модулю тождеств $(xy)(uv) = 0$ и $xy+yx = 0$ можно считать правонормированным. Поэтому здесь и далее, если не оговорено противное, расстановка скобок на словах предполагается правонормированной, а скобки будут опускаться для краткости. Таким образом, под записью $x_1x_2\dots x_n$ понимается одночлен $((\dots((x_1x_2)x_3)\dots)x_{n-1})x_n$, а под записью $x[y,z]$ будем понимать выражение $x[y,z] = (xy)z - (xz)y$. Через $J(x,y,z)$ обозначим якобиан элементов $x$, $y$ и $z$, т. е. $J(x,y,z) = (xy)z + (yz)x + (zx)y$.

В [18] рассматривается алгебра $C = \langle e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\rangle_F$. Ненулевые произведения базисных элементов $C$ определены следующими правилами:

$$e_1e_3 = -e_3e_1 = e_1, \quad e_2e_3 = -e_3e_2 = e_1,$$

$$e_1e_4 = -e_4e_1 = e_2, \quad e_2e_4 = -e_4e_2 = e_2,$$

$$e_1e_5 = -e_5e_1 = e_1, \quad e_2e_5 = -e_5e_2 = e_2.$$

В работе доказано, что $C$ — не конечно базируемая алгебра с базисом тождеств

$$\{(xy)(uv), xy + yx, J(x,y,z)[u,v], J(x,y,z)t_1t_2\dots t_n[u,v] \mid n = 1,2,\dots\}.$$

Положим $e_1 = v_1$, $e_2 = v_1 + v_2$, $e_3 = e_{11}$, $e_4 = e_{11} + e_{12}$, $e_5 = e_{11} + e_{22}$, где $v_1, v_2, e_{11}, e_{12}, e_{22}$ — базисные элементы алгебры $B$. При таком выборе $e_i$, $1 \le i \le 5$, все соотношения для базисных элементов алгебры $C$ остаются справедливыми. Таким образом, $B \cong C$, и справедлива

**Теорема 2.** *Пусть $F$ — поле нулевой характеристики и $B = \langle v_1, v_2, e_{11}, e_{12}, e_{22}\rangle_F$ — алгебра над полем $F$, ненулевые произведения базисных элементов которой определяются правилами $v_ie_{ij} = -e_{ij}v_i = v_j$. Тогда $B$ —* НКБ*-алгебра с базисом тождеств*

$$\{(xy)(uv), xy + yx, J(x,y,z)[u,v], J(x,y,z)t_1t_2\dots t_n[u,v] \mid n = 1,2,\dots\}.$$

## 2. Доказательство основной теоремы

Пусть $F$ — поле нулевой характеристики и $B = \langle v_1, v_2, e_{11}, e_{12}, e_{22}\rangle_F$. Обозначим через $D = \langle e, v_1, v_2, e_{11}, e_{12}, e_{22}, p\rangle_F$ алгебру, ненулевые произведения базисных элементов которой определяются следующими правилами:

$$v_ie_{ij} = -e_{ij}v_i = v_j, \quad v_2p = -pv_2 = e, \quad v_ie = -ev_i = v_i,$$

$$e_{ij}e = -ee_{ij} = e_{ij}, \quad pe = -ep = p.$$

Через $T(f_1, f_2, \dots, f_n)$ обозначим $T$-идеал свободной алгебры многообразия $\mathfrak{M}$, порожденный многочленами $f_1, f_2, \dots, f_n$. *Длиной* $l(w)$ *слова* $w = w(x_1, x_2, \dots, x_n)$ будем называть сумму вхождений переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ в слово $w$.

Отметим, что алгебра $B$ является подалгеброй алгебры $D$.

**Предложение 1.** *Алгебра $D$ над полем $F$ является простой алгеброй.*

Доказательство. Из таблицы умножения базисных элементов алгебры $D$ следует, что $D^2 \ne (0)$.

Пусть $(0) \ne I \lhd D$ — идеал алгебры $D$. Покажем вначале, что ни один из базисных элементов $D$ не может лежать в $I$. Действительно, пусть $e \in I$ и $a = \alpha_1e + \alpha_2v_1 + \alpha_3v_2 + \alpha_4e_{11} + \alpha_5e_{12} + \alpha_6e_{22} + \alpha_7p \in D$, $a \ne 0$. Тогда $a = ae + \alpha_1e \in I$, т. е. $I = D$. Если $p \in I$, то $e = v_2p \in I$. Если $v_2 \in I$, то $e = v_2p \in I$. Если $v_1 \in I$, то $v_2 = v_1e_{12} \in I$, но $v_2 \notin I$. Если $e_{11} \in I$, то $v_1 = v_1e_{11} \in I$, но $v_1 \notin I$. Если $e_{12} \in I$, то $v_2 = v_1e_{12} \in I$, но $v_2 \notin I$. Наконец, если $e_{22} \in I$, то $v_2 = v_2e_{22} \in I$, но $v_2 \notin I$.

Пусть далее $0 \neq a = \alpha_1e + \alpha_2v_1 + \alpha_3v_2 + \alpha_4e_{11} + \alpha_5e_{12} + \alpha_6e_{22} + \alpha_7p \in I$. Тогда $I \ni v_2(ae_{22}) = \alpha_1v_2$, откуда $\alpha_1 = 0$. Получим $a = \alpha_2v_1 + \alpha_3v_2 + \alpha_4e_{11} + \alpha_5e_{12} + \alpha_6e_{22} + \alpha_7p \in I$. Далее, $I \ni ae_{11} = \alpha_2v_1$, что влечет $\alpha_2 = 0$, откуда $a = \alpha_3v_2+\alpha_4e_{11}+\alpha_5e_{12}+\alpha_6e_{22}+\alpha_7p \in I$. Аналогично $I \ni ap = \alpha_3e$. Тогда $\alpha_3 = 0$. Получим, что $a = \alpha_4e_{11} + \alpha_5e_{12} + \alpha_6e_{22} + \alpha_7p \in I$. Затем $I \ni (v_1a)e_{11} = \alpha_4v_1$, откуда $\alpha_4 = 0$ и $a = \alpha_5e_{12} + \alpha_6e_{22} + \alpha_7p \in I$. Далее, $I \ni v_1a = \alpha_5v_2$, что влечет $\alpha_5 = 0$ и $a = \alpha_6e_{22} + \alpha_7p \in I$. Наконец, $I \ni v_2(v_2p) = \alpha_7v_2$, откуда $\alpha_7 = 0$ и $\alpha_6e_{22} = a \in I$, что возможно лишь при $\alpha_6 = 0$. Получаем, что $a = 0$.

Таким образом, либо $I = (0)$, либо $I = D$ в силу произвольности $a \in I$, т. е. $D$ — простая алгебра. Предложение доказано.

**Предложение 2.** *Алгебра $D$ не имеет конечного базиса тождеств.*

Доказательство. Предположим, что алгебра $D$ над полем $F$ нулевой характеристики конечно базируема и $\{f_1, f_2, \dots, f_r\}$ — базис ее тождеств. Поскольку $B$ — подалгебра $D$, любое тождество $D$ верно в $B$ и можно считать, что все тождества $D$ следуют из базиса тождеств $B$. Ввиду теоремы 2 множество многочленов

$$\{(xy)(uv), xy + yx, J(x, y, z)[u, v], J(x, y, z)t_1t_2 \dots t_n[u, v] \mid n = 1, 2, \dots\}$$

образует базис тождеств алгебры $B$. Тогда, обозначив

$$G_l = \{(xy)(uv), xy + yx, J(x, y, z)[u, v], J(x, y, z)t_1t_2 \dots t_n[u, v] \mid n = 1, 2, \dots, l\},$$

получим $f_1 \in T(G_{k_1})$, $f_2 \in T(G_{k_2})$, ... ,$f_r \in T(G_{k_r})$ и, если $k = \max\{k_1, k_2, \dots, k_r\}$, то $f_1, f_2, \dots, f_r \in T(G_k)$. Таким образом, любое тождество алгебры $D$ следует из совокупности $G_k$.

Рассмотрим тождество

$$f = \sum_{\sigma\in S_8} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)}y_1y_2 \dots y_{k+5}x_{\sigma(2)}y_1y_2 \dots y_{k+4} \\ \times x_{\sigma(3)}y_1y_2 \dots y_{k+4}x_{\sigma(4)}y_1y_2 \dots y_{k+4} \dots x_{\sigma(7)}y_1y_2 \dots y_{k+4}x_{\sigma(8)} = 0.$$

Поскольку $\dim_F D = 7$, тождество $f = 0$ выполняется в алгебре $D$. Покажем, что оно не следует из множества тождеств $G_k$.

Пусть $Y_1 = \{w_1, w_2, \dots, w_8\}$, $Y_2 = \{u_1, u_2, \dots, u_{k+5}\}$, $Y = Y_1 \cup Y_2$ — множества букв и $W = \langle Y\rangle_F$ — алгебра многообразия $\mathfrak{M}$ с определяющими соотношениями $vw_iw_j = 0$, $vw_iu_{i_1}u_{i_2} \dots u_{i_s}w_j = 0$ ($s \leq k + 3$, $u_i \neq u_j$), $J(u_i, u_j, u_l) = 0$, $uu_iu_j = uu_ju_i$, где $v$ — произвольное (возможно, пустое) правонормированное слово, состоящее из букв множества $Y$, а $u$ — непустое правонормированное слово от букв множества $Y$, для которого $l(u) \geq 2$. Отметим, что ввиду антикоммутативности в $W$ выполняется соотношение $u_i^2 = 0$.

Покажем, что тождества множества $G_k$ выполняются в алгебре $W$. Для краткости слова алгебры $W$, состоящие не менее чем из двух букв, будем называть *длинными*.

Рассмотрим многочлен $g_0 = J(x, y, z)[u, v]$. Заметим, что в $g_0$ длинное слово можно подставить только вместо одной из переменных якобиана (иначе многочлен обратится в нуль). Не ограничивая общности, выполним подстановку $x \to X$, где $X$ — слово от букв множества $Y$ и $l(X) \geq 2$. Тогда

$$g_0 = J(X, y, z)[u, v] = ((Xy)z + (yz)X + (zX)y)[u, v] \\ = ((Xy)z - (Xz)y)[u, v] = X[y, z][u, v].$$

Если теперь подставить вместо переменных хотя бы в один из коммутаторов буквы только одного из множеств $Y_1$ или $Y_2$, то многочлен обратится в нуль. Подставим в каждый коммутатор вместо одной переменной букву из $Y_1$, а вместо другой — букву из $Y_2$, например, $y \to w_i$, $z \to u_l$, $u \to u_m$, $v \to w_n$ (остальные варианты подстановок рассматриваются аналогично). Получим

$$\begin{aligned} g_0 = X[y,z][u,v] &= X[w_i,u_l][u_m,w_n] \\ &= Xw_iu_lu_mw_n - Xu_lw_iu_mw_n - Xw_iu_lw_nu_m + Xu_lw_iw_nu_m = 0. \end{aligned}$$

Осталось рассмотреть случай, когда в многочлен $g_0 = J(x,y,z)[u,v]$ вместо всех переменных подставляются буквы множества $Y$. Если подставить в якобиан только буквы множества $Y_2$, то многочлен обратится в нуль. То же самое произойдет, если вместо не менее чем двух переменных якобиана подставить буквы из $Y_1$. Не ограничивая общности, осуществим подстановку $x \to w_i$, $y \to u_l$, $z \to u_m$. На подстановку букв вместо переменных коммутатора распространяется замечание, сделанное выше, поэтому подставим $u \to u_r$, $v \to w_s$ (подстановка $u \to w_s$, $v \to u_r$ рассматривается аналогично). Получим

$$\begin{aligned} g_0 = J(x,y,z)[u,v] &= J(w_i,u_l,u_m)[u_r,w_s] \\ &= w_iu_lu_mu_rw_s + u_lu_mw_iu_rw_s + u_mw_iu_lu_rw_s \\ &\quad - w_iu_lu_mw_su_r - u_lu_mw_iw_su_r - u_mw_iu_lw_su_r = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, многочлен $g_0 = J(x,y,z)[u,v]$ обращается в нуль при всевозможных подстановках элементов алгебры $W$ вместо переменных, а значит, тождество $J(x,y,z)[u,v] = 0$ выполняется в $W$.

Теперь рассмотрим тождество $g_n = J(x,y,z)t_1t_2\dots t_n[u,v]$ при некотором фиксированном $1 \le n \le k$. Для краткости положим $U_{i_1i_2\dots i_l} = u_{i_1}u_{i_2}\dots u_{i_l}$.

Заметим, что в $g_n$ (как и в $g_0$) длинное слово можно подставить только вместо одной из переменных якобиана (иначе многочлен $g_n$ обратится в нуль ввиду тождества метабелевости). Не ограничивая общности, подставим $x \to X$, где $X$ — слово от букв множества $Y$ и $l(X) \ge 2$. Тогда

$$\begin{aligned} g_n = J(X,y,z)t_1t_2\dots t_n[u,v] &= ((Xy)z + (yz)X + (zX)y)t_1t_2\dots t_n[u,v] \\ &= ((Xy)z - (Xz)y)t_1t_2\dots t_n[u,v] = X[y,z]t_1t_2\dots t_n[u,v]. \end{aligned}$$

Как и выше, несложно убедиться, что многочлен $g_n$ обратится в нуль, если подставить вместо переменных хотя бы в один из коммутаторов буквы только одного из множеств $Y_1$ или $Y_2$. Подставим в каждый коммутатор вместо одной переменной букву из $Y_1$, а вместо другой — букву из $Y_2$, например, $y \to w_i$, $z \to u_l$, $u \to u_m$, $v \to w_p$ (остальные варианты подстановок рассматриваются аналогично). Если при этом хотя бы вместо одной из переменных $t_i$ подставить букву из $Y_1$ (а вместо остальных $t_i$ — произвольные буквы множества $Y$), то каждое слово $g_n$ будет содержать подслово $Xw_iU_{i_1i_2\dots i_s}w_r$, которое равно нулю, ввиду того, что $l(U_{i_1i_2\dots i_s}) = s < k+3$.

Подставляя $t_i \to u_{l_i}$, получим

$$\begin{aligned} g_n = X[w_i,u_l]u_{l_1}u_{l_2}\dots u_{l_n}[u_m,w_p] &= X[w_i,u_l]U_{l_1l_2\dots l_n}[u_m,w_n] \\ &= Xw_iu_lU_{l_1l_2\dots l_n}u_mw_n - Xu_lw_iU_{l_1l_2\dots l_n}u_mw_n \\ &\quad - Xw_iu_lU_{l_1l_2\dots l_n}w_nu_m + Xu_lw_iU_{l_1l_2\dots l_n}w_nu_m \\ &= Xw_iU_{ll_1l_2\dots l_nm}w_n - Xu_lw_iU_{l_1l_2\dots l_nm}w_n \\ &\quad - Xw_iU_{ll_1l_2\dots l_n}w_nu_m + Xu_lw_iU_{l_1l_2\dots l_n}w_nu_m = 0, \end{aligned}$$

поскольку $l(U_{l_1l_2\dots l_n})=n$, $l(U_{ll_1l_2\dots l_n})=l(U_{l_1l_2\dots l_nm})=n+1$, $l(U_{ll_1l_2\dots l_nm})=n+2$ и $n<n+1<n+2<k+3$.

Наконец, осталось рассмотреть случай, когда в многочлен $g_n=J(x,y,z)t_1 t_2\dots t_n[u,v]$ вместо всех переменных подставляются буквы множества $Y$. Как и выше, если подставить в якобиан только буквы множества $Y_2$, то многочлен $g_n$ обратится в нуль. То же самое произойдет, если вместо не менее чем двух переменных якобиана подставить буквы из $Y_1$. Не ограничивая общности, осуществим подстановку $x\to w_i$, $y\to u_l$, $z\to u_m$. На подстановку букв вместо переменных $u$ и $v$, а также $t_1,t_2,\dots,t_n$ распространяется замечание, сделанное выше, поэтому подставим $u\to u_r$, $v\to w_s$, $t_i\to u_{l_i}$, где $1\le i\le n$ (остальные подстановки рассматриваются аналогично). Получим

$$\begin{aligned}
g_n=J(x,y,z)t_1t_2\dots t_n[u,v]&=J(w_i,u_l,u_m)u_{l_1}u_{l_2}\dots u_{l_n}[u_r,w_s]\\
&=w_iu_lu_mU_{l_1l_2\dots l_n}u_rw_s+u_lu_mw_iU_{l_1l_2\dots l_n}u_rw_s+u_mw_iu_lU_{l_1l_2\dots l_n}u_rw_s\\
&-w_iu_lu_mU_{l_1l_2\dots l_n}w_su_r-u_lu_mw_iU_{l_1l_2\dots l_n}w_su_r-u_mw_iu_lU_{l_1l_2\dots l_n}w_su_r\\
&=w_iU_{lml_1l_2\dots l_nr}w_s+u_lu_mw_iU_{l_1l_2\dots l_nr}w_s+u_mw_iU_{ll_1l_2\dots l_nr}w_s\\
&-w_iU_{lml_1l_2\dots l_n}w_su_r-u_lu_mw_iU_{l_1l_2\dots l_n}w_su_r-u_mw_iU_{ll_1l_2\dots l_n}w_su_r=0,
\end{aligned}$$

поскольку $n<n+1<n+2<n+3\le k+3$.

Таким образом, многочлен $g_n=J(x,y,z)t_1t_2\dots t_n[u,v]$, $1\le n\le k$, обращается в нуль при всевозможных подстановках элементов алгебры $W$ вместо переменных, а значит, тождество $J(x,y,z)t_1t_2\dots t_n[u,v]=0$ выполняется в $W$. Итак, все многочлены множества $G_k$ будут тождествами алгебры $W$.

Если в многочлен $f$ подставить $x_i\to w_i$, $1\le i\le 8$, $y_j\to u_j$, $1\le j\le k+5$, то

$$f=\sum_{\sigma\in S_8}(-1)^\sigma w_{\sigma(1)}u_1u_2\dots u_{k+5}w_{\sigma(2)}u_1u_2\dots u_{k+4}\dots w_{\sigma(7)}u_1u_2\dots u_{k+4}w_{\sigma(8)}.$$

Заметим, что любое следствие определяющих соотношений $W$ представляет собой сумму выражений вида $a_nw_iw_jb_n$, $c_n[u_i,u_j]b_n$, $a_nw_iu_{l_1}u_{l_2}\dots u_{l_s}w_jb_n$, $s\le k+3$, $u_i\ne u_j$, $a_nJ(u_i,u_j,u_m)b_n$, где $a_n$, $b_n$, $c_n$ — произвольные слова от букв $w_1,w_2,\dots,w_8$, $u_1,u_2,\dots,u_{k+5}$, причем $l(c_n)\ge 2$. Поэтому $f$ не является следствием определяющих соотношений $W$, а значит, $f\ne 0$ в $W$ и тождество $f=0$ алгебры $D$ не следует из тождеств множества $G_k$.

Полученное противоречие показывает, что $D$ — НКБ-алгебра. Предложение доказано.

Из предложений 1 и 2 вытекает справедливость теоремы 1.

Заметим, что, рассуждая аналогично доказательству предложения 2, можно показать, что любая конечномерная алгебра, содержащая алгебру $B$ в качестве подалгебры, не имеет конечного базиса тождеств. Иными словами, справедлива

**Теорема 3.** *Пусть $A$ — конечномерная алгебра над полем $F$ нулевой характеристики и $B=\langle v_1,v_2,e_{11},e_{12},e_{22}\rangle_F$ — подалгебра $A$. Тогда алгебра $A$ не имеет конечного базиса тождеств.*

В [19] вводится понятие сильно бесконечно базируемой алгебры, а именно рассмотрим множество $\{w=w(x_1,x_2,\dots,x_n;y_1,y_2,\dots,y_k)\}$ всех неассоциативных слов в некотором алфавите, линейных по каждой из переменных $x_1,x_2,\dots,x_n$. Пусть

$$C_n^{(w)}=\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^\sigma w(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},\dots,x_{\sigma(n)};y_1,y_2,\dots,y_k)=0$$

— система тождеств Капелли. Обозначим через Cap$(n)$ многообразие линейных алгебр, удовлетворяющих всевозможным тождествам Капелли для некоторого фиксированного $n$. Будем говорить, что многообразие линейных алгебр над полем $F$ *сильно бесконечно базируемо* или *сильно не конечно базируемо* (сокращенно СНКБ-*многообразие*), если это многообразие лежит в Cap$(m)$ при некотором $m$, и любое многообразие $F$-алгебр, его содержащее и лежащее в Cap$(n)$ при некотором $n$, не имеет конечного базиса тождеств. $F$-алгебра называется *сильно бесконечно базируемой*, если многообразие, порожденное этой алгеброй, является СНКБ-многообразием. Из этого определения следует, что любая конечномерная $F$-алгебра, содержащая в качестве подалгебры СНКБ-алгебру, не является конечно базируемой. Понятие СНКБ-алгебры является в некотором смысле аналогом понятия СББ-алгебры [11] для случая произвольного (не обязательно конечного) поля.

С учетом введенного понятия последнюю теорему можно обобщить следующим образом.

**Теорема 3′.** *Пусть $F$ — поле нулевой характеристики и $B = \langle v_1, v_2, e_{11}, e_{12}, e_{22}\rangle_F$ — алгебра над полем $F$, ненулевые произведения базисных элементов которой определяются правилами $v_i e_{ij} = -e_{ij} v_i = v_j$. Алгебра $B$ является сильно бесконечно базируемой алгеброй.*

Из этой теоремы, в частности, следует, что алгебра $D$ является примером простой антикоммутативной СНКБ-алгебры.

## *ЛИТЕРАТУРА*


**1.** *Vaughan-Lee M. R.* Varieties of Lie algebras // Q. J. Math., Oxf. II Ser. 1970. V. 21, N 83. P. 297–308.

**2.** *Дренски В. С.* О тождествах в алгебрах Ли // Алгебра и логика. 1974. Т. 13, № 3. С. 265–290.

**3.** *Полин С. В.* О тождествах конечных алгебр // Сиб. мат. журн. 1976. Т. 17, № 6. С. 992–999.

**4.** *Львов И. В.* Конечномерные алгебры с бесконечными базисами тождеств // Сиб. мат. журн. 1978. Т. 19, № 1. С. 91–99.

**5.** *Исаев И. М., Кислицин А. В.* Тождества векторных пространств, вложенных в линейные алгебры // Сиб. электрон. мат. изв. 2015. Т. 12. С. 328–343.

**6.** *Исаев И. М.* Конечномерные правоальтернативные алгебры, порождающие не конечно-базируемые многообразия // Алгебра и логика. 1986. Т. 25, № 2. С. 136–153.

**7.** *Specht W.* Gesetze in Ringen. I // Math. Z. 1950. Bd 52, Heft 1. S. 557–589.

**8.** *Филиппов В. Т., Харченко В. К., Шестаков И. П.* Нерешенные проблемы теории колец и модулей. Днестровская тетрадь. 3-е изд. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1982.

**9.** *Кемер А. Р.* Конечная базируемость тождеств ассоциативных алгебр // Алгебра и логика. 1987. Т. 26, № 5. С. 597–641.

**10.** *Белов А. Я.* Локальная конечная базируемость и локальная представимость многообразий ассоциативных колец // Изв. РАН. Сер. мат. 2010. Т. 74, № 1. С. 3–134.

**11.** *Исаев И. М.* Существенно бесконечно базируемые многообразия алгебр // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, № 6. С. 75–77.

**12.** *Isaev I. M.* Finite algebras with no independent basis of identities // Algebra Univers. 1997. V. 37, N 4. P. 440–444.

**13.** *Филиппов В. Т., Харченко В. К., Шестаков И. П.* Нерешенные проблемы теории колец и модулей. Днестровская тетрадь. 4-е изд. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1993.

**14.** *Shestakov I., Zaycev M.* Polynomial identities of finite dimensional simple algebras // Commun. Algebra. 2011. V. 39, N 3. P. 929–932.

**15.** *Исаев И. М., Кислицин А. В.* Пример простой конечномерной алгебры, не имеющей конечного базиса тождеств // Докл. АН. 2012. Т. 447, № 3. С. 252–253.

**16.** *Isaev I. M., Kislitsin A. V.* Example of simple finite dimensional algebra with no finite basis of its identities // Commun. Algebra. 2013. V. 41, N 12. P. 4593–4601.

**17.** *Кислицин А. В.* Пример центральной простой коммутативной конечномерной алгебры с бесконечным базисом тождеств // Алгебра и логика. 2015. Т. 54, № 3. С. 315–325.

**18.** *Парфенов В. А.* О проблеме Шпехта в $\varepsilon$-алгебрах // Мат. заметки. 1983. Т. 34, № 2. С. 189–198.

**19.** *Исаев И. М., Кислицин А. В.* Тождества векторных пространств и примеры конечномерных линейных алгебр, не имеющих конечного базиса тождеств // Алгебра и логика. 2013. Т. 52, № 4. С. 435–460.

*Статья поступила 4 мая 2016 г.*

Кислицин Алексей Владимирович
Омский гос. университет им. Ф. М. Достоевского,
пр. Мира, 55-а, Омск 644077;
Алтайский гос. педагогический университет,
ул. Молодежная, 55, Барнаул 656031
`kislitsin@altspu.ru`