Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2017. Том 58, № 3

УДК 517.444

ПРОБЛЕМА УСТРАНИМОСТИ ДЛЯ ФУНКЦИЙ С НУЛЕВЫМИ ШАРОВЫМИ СРЕДНИМИ

Вит. В. Волчков, Н. П. Волчкова

Аннотация. Изучаются функции на n-мерной сфере с выколотой точкой, имеющие нулевые интегралы по всем допустимым «полусферам». Найдено условие, при котором точка является устранимым множеством для такого класса функций. Показано, что это условие нельзя опустить или существенно улучшить.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.306

Ключевые слова: сферические средние, преобразование Функа, функции Лежандра.

§ 1. Введение

Одной из интересных проблем теории отображений, привлекающей внимание широкого круга специалистов, является проблема устранимости, которая состоит в следующем. Пусть $\mathscr{M}$ и $\mathscr{N}$ — многообразия, $\mathscr{D}$ — область в $\mathscr{M}$ и $E \subset \mathscr{D}$ — замкнутое относительно $\mathscr{D}$ множество. Спрашивается, в каком случае любое отображение $f : \mathscr{D} \setminus E \to \mathscr{N}$ из заданного класса можно продолжить до отображения $\mathbf{f} : \mathscr{D} \to \mathscr{N}$ с сохранением класса? Если указанное продолжение существует, то множество E называют *устранимым множеством* в рассматриваемом классе отображений.

Проблема устранимости исследовалась многими авторами в различных постановках. Например, хорошо известны соответствующие результаты в многомерном комплексном анализе, теории квазиконформных отображений и их обобщений, теории гармонических функций и других областях (см. [1–5]). В последние годы активно развиваются геометрические аспекты теории периодичности в среднем на однородных пространствах (см. [6–9]). Однако результатов по проблеме устранимости здесь получено мало. Все известные случаи относятся, в основном, к евклидову пространству и касаются лишь функций специального вида, а именно радиальных функций и их обобщений (см. [7, гл. 3.2; 10, теорема 4]).

В данной работе изучаются функции на n-мерной сфере с выколотой точкой, имеющие нулевые интегралы по всем допустимым «полусферам». Найдено условие, при котором точка является устранимым множеством для такого класса функций. Показано также, что это условие нельзя опустить или существенно улучшить.

§ 2. Формулировка основного результата

Пусть $n \geq 2$, $\mathbb{S}^n = \{\xi \in \mathbb{R}^{n+1} : |\xi| = 1\}$, $\xi_1, \dots, \xi_{n+1}$ — декартовы координаты точки $\xi \in \mathbb{S}^n$, $\mathscr{S} = \mathbb{S}^n \setminus (0, \dots, 0, -1)$, $\mathscr{S}' = \mathscr{S} \setminus (0, \dots, 0, 1)$. Положим

$$C_{\text{even}}(\mathscr{S}') = \{f \in C(\mathscr{S}') : f(-\xi) = f(\xi)\ \forall \xi \in \mathscr{S}'\}.$$

Обозначим через $SO(n+1)$ группу вращений пространства $\mathbb{R}^{n+1}$. Определим класс $\mathscr{F}$ равенством

$$\mathscr{F} = \left\{ f \in C(\mathscr{S}) : \int\limits_{\tau(H)} f(\xi)\, d\xi = 0 \ \forall \tau \in SO(n+1) : \tau(H) \subset \mathscr{S} \right\},$$

где $H = \{\xi \in \mathbb{S}^n : \xi_{n+1} \geq 0\}$, $d\xi$ — элемент площади на сфере.

Основным результатом данной работы является

Теорема 1. (i) *Пусть* $f \in \mathscr{F}$ *и*

$$f(\xi) = o\left(\frac{1}{(1+\xi_{n+1})^{(n+1)/2}}\right) \quad \text{при } \xi \to (0,\dots,0,-1). \tag{1}$$

Тогда $f \in C_{\mathrm{even}}(\mathscr{S}')$.

(ii) *Существует функция* $f \in \mathscr{F} \setminus C_{\mathrm{even}}(\mathscr{S}')$ *такая, что*

$$f(\xi) = O\left(\frac{1}{(1+\xi_{n+1})^{(n+1)/2}}\right) \quad \text{при } \xi \to (0,\dots,0,-1). \tag{2}$$

Теорема 1 показывает, что точка $(0,\dots,0,-1)$ является устранимым множеством для функций класса $\mathscr{F}$ при выполнении условия (1). Таким образом, всякая функция $f \in \mathscr{F}$, удовлетворяющая (1), имеет нулевые интегралы по всем полусферам на $\mathbb{S}^n$. Интегральное преобразование, ставящее в соответствие функции $f \in C(\mathbb{S}^n)$ ее интегралы по всевозможным полусферам, введено Функом в [11]. Вопросы, связанные с обращением преобразования Функа, изучались в [11–13]. Отметим также, что в [12] найдены образы различных функциональных пространств под действием указанного преобразования.

§ 3. Вспомогательные утверждения

Будем использовать следующие стандартные обозначения: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$ — множества натуральных, целых и целых неотрицательных чисел соответственно, Γ — гамма-функция,

$$(z)_j = \frac{\Gamma(z+j)}{\Gamma(z)} \text{ — символ Похгаммера}, \quad j \in \mathbb{Z}_+, \tag{3}$$

$F(a,b;c;z)$ — гипергеометрическая функция Гаусса, т. е.

$$F(a,b;c;z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a)_j (b)_j}{(c)_j j!} z^j, \quad |z|<1, \ c \notin \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}, \tag{4}$$

а P_ν^μ, Q_ν^μ — функции Лежандра первого и второго рода на $(-1,1)$ соответственно.

Функции P_ν^μ определены при любых $\nu,\mu \in \mathbb{C}$ равенством

$$P_\nu^\mu(x) = \frac{\sqrt{\pi}2^\mu}{(1-x^2)^{\mu/2}} \left(\frac{F\left(-\frac{\nu+\mu}{2}, \frac{1+\nu-\mu}{2}; \frac{1}{2}; x^2\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\nu-\mu}{2}\right)} - \frac{2xF\left(\frac{1-\nu-\mu}{2}, 1+\frac{\nu-\mu}{2}; \frac{3}{2}; x^2\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{\nu+\mu}{2}\right)} \right) \tag{5}$$

(см. [14, гл. 3, формула 3.4(11)]). Отметим, что при $\mu \notin \mathbb{N}$

$$P_\nu^\mu(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\mu/2} F\left(-\nu, \nu+1; 1-\mu; \frac{1-x}{2}\right) \tag{6}$$

(см. [14, гл. 3, формула 3.4(6)]).

Далее, если $\nu, \mu \in \mathbb{C}$ и $\nu + \mu \notin \mathbb{Z}\backslash\mathbb{Z}_+$, то

$$Q_\nu^\mu(x) = -\frac{\sqrt{\pi}2^\mu}{(1-x^2)^{\mu/2}}\Bigg(\frac{\sin\big(\frac{\pi}{2}(\nu+\mu)\big)\Gamma\big(\frac{1+\nu+\mu}{2}\big)}{2\Gamma\big(1+\frac{\nu-\mu}{2}\big)}F\bigg(-\frac{\nu+\mu}{2}, \frac{1+\nu-\mu}{2}; \frac{1}{2}; x^2\bigg)$$
$$+ \frac{\cos\big(\frac{\pi}{2}(\nu+\mu)\big)\Gamma\big(1+\frac{\nu+\mu}{2}\big)}{\Gamma\big(\frac{1+\nu-\mu}{2}\big)}xF\bigg(\frac{1-\nu-\mu}{2}, 1+\frac{\nu-\mu}{2}; \frac{3}{2}; x^2\bigg)\Bigg)$$

(см. [14, гл. 3, формула 3.4(12), гл. 1, формула 1.2(5)]). В случае, когда $\mu \notin \mathbb{Z}$, $\nu + \mu \notin \mathbb{Z}\backslash\mathbb{Z}_+$, справедливо представление

$$Q_\nu^\mu(x) = \frac{\Gamma(1+\nu+\mu)\Gamma(-\mu)}{2\Gamma(1+\nu-\mu)}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\mu/2} F\left(-\nu, \nu+1; 1+\mu; \frac{1-x}{2}\right)$$
$$+ \frac{1}{2}\Gamma(\mu)\cos(\pi\mu)\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\mu/2} F\left(-\nu, \nu+1; 1-\mu; \frac{1-x}{2}\right) \quad (7)$$

(см. [14, гл. 3, формула 3.4(10)]).

Из (5) легко получить соотношение

$$P_\nu^\mu(-x) - P_\nu^\mu(x)\cos(\pi(\nu+\mu))$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}2^{\mu+1}}{(1-x^2)^{\mu/2}}\Bigg(\frac{\sin^2\big(\frac{\pi}{2}(\nu+\mu)\big)}{\Gamma\big(\frac{1-\nu-\mu}{2}\big)\Gamma\big(1+\frac{\nu-\mu}{2}\big)}F\bigg(-\frac{\nu+\mu}{2}, \frac{1+\nu-\mu}{2}; \frac{1}{2}; x^2\bigg)$$
$$+ \frac{2\cos^2\big(\frac{\pi}{2}(\nu+\mu)\big)}{\Gamma\big(\frac{1+\nu-\mu}{2}\big)\Gamma\big(-\frac{\nu+\mu}{2}\big)}xF\bigg(\frac{1-\nu-\mu}{2}, 1+\frac{\nu-\mu}{2}; \frac{3}{2}; x^2\bigg)\Bigg). \quad (8)$$

В частности,

$$P_\nu^\mu(-x) = (-1)^{\nu+\mu}P_\nu^\mu(x) \quad \text{при } \nu+\mu \in \mathbb{Z}_+. \quad (9)$$

Кроме того, если $x \in (-1, 0)$ и $\mu \notin \mathbb{Z}$, то

$$P_\nu^\mu(x) = \left(\frac{\cos(\pi(\nu+\mu))}{\Gamma(1-\mu)} - \frac{\Gamma(\mu)\cos(\pi\mu)\sin(\pi(\nu+\mu))}{\pi}\right)\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\mu/2}$$
$$\times F\left(-\nu, \nu+1; 1-\mu; \frac{1+x}{2}\right)$$
$$+ \frac{\Gamma(-\mu)}{\Gamma(1+\nu-\mu)\Gamma(-\nu-\mu)}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\mu/2} F\left(-\nu, \nu+1; 1+\mu; \frac{1+x}{2}\right) \quad (10)$$

(см. (6), (7) и [14, гл. 3, формула 3.4(14)]).

Функции P_ν^μ имеют следующее асимптотическое поведение вблизи особых точек (см. [14, гл. 3, формулы 3.9.2(8) и 3.9.2(14)]):

$$P_\nu^\mu(x) \sim \frac{2^{\mu/2}}{\Gamma(1-\mu)}(1-x)^{-\mu/2}, \quad x \to 1-0, \ \mu \notin \mathbb{N}, \quad (11)$$

$$P_\nu^\mu(x) \sim 2^{-\mu/2}\frac{\Gamma(-\mu)}{\Gamma(1+\nu-\mu)\Gamma(-\nu-\mu)}(1+x)^{\mu/2}, \quad x \to -1+0, \ \operatorname{Re}\mu < 0. \quad (12)$$

Положим $\frac{1}{2} + \mathbb{Z}_+ = \{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots\}$.

Лемма 1. *Пусть* $M, N \in \frac{1}{2}+\mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$, $N > M+2m$. *Тогда при* $x \to -1+0$

$$P^{-N}_{2m+M}(x) = (1-x)^{N/2} \sum_{0\le p\le N/2} \gamma_{M,N,m,p}(1+x)^{p-N/2} + o(1),$$

где

$$\gamma_{M,N,m,p} = \frac{(N-M-2m)_{2m+M}}{(M+N+2m)!}\frac{(-1)^p(2m+M+1-p)_p(2m+M+1)_p}{(1-N)_p p! 2^p}. \quad (13)$$

Доказательство. Учитывая, что $2m+M-N \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{Z}_+$, из (10) и (4) находим

$$\begin{aligned} P^{-N}_{2m+M}(x) &= \frac{(-1)^{M-N}}{\Gamma(N+1)}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{N/2} F\left(-2m-M, 2m+M+1; 1+N; \frac{1+x}{2}\right) \\ &+ \frac{\Gamma(N)}{\Gamma(2m+M+N+1)\Gamma(N-M-2m)}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{N/2} \\ &\times F\left(-2m-M, 2m+M+1; 1-N; \frac{1+x}{2}\right) \\ &= \frac{\Gamma(N)(1-x)^{N/2}}{\Gamma(2m+M+N+1)\Gamma(N-M-2m)} \\ &\times \sum_{0\le p\le N/2} \frac{(-2m-M)_p(2m+M+1)_p}{(1-N)_p p! 2^p}(1+x)^{p-N/2} + o(1), \quad x \to -1+0. \end{aligned}$$

Используя равенство (3) и формулу

$$(z)_j = (-1)^j(1-z-j)_j, \quad (14)$$

получаем требуемое разложение. $\square$

Лемма 2. *Пусть* $M, N \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$, $N > M+2m$. *Тогда*

$$P^{-N}_{2m+M}(x) = (1-x)^{N/2} \sum_{p=0}^{2m+M} \gamma_{M,N,m,p}(1+x)^{p-N/2}, \quad (15)$$

где константы $\gamma_{M,N,m,p}$ *определены в лемме* 1.

Доказательство. Согласно (6) и (4) имеем

$$\begin{aligned} P^{-N}_{2m+M}(x) &= \frac{1}{N!}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{N/2} F\left(-2m-M, 2m+M+1; N+1; \frac{1-x}{2}\right) \\ &= \frac{1}{N!}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{N/2} \sum_{j=0}^{2m+M} \frac{(-1)^j(-2m-M)_j(2m+M+1)_j}{(N+1)_j j! 2^j}(x-1)^j \\ &= \frac{(1-x)^{N/2}}{N!} \sum_{p=0}^{2m+M}\left(\sum_{j=p}^{2m+M} \frac{(-2m-M)_j(2m+M+1)_j}{(N+1)_j j!}\binom{j}{p}\right)\frac{(-1)^p}{2^p}(1+x)^{p-N/2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Поскольку $(z)_{p+q} = (z)_p(z+p)_q$ и $(-2m-M+p)_q = 0$ при $q > 2m+M-p$, внутренняя сумма в (16) преобразуется к виду

$$\sum_{j=p}^{2m+M} \frac{(-2m-M)_j(2m+M+1)_j}{(N+1)_j j!}\binom{j}{p}$$

$$= \sum_{q=0}^{2m+M-p} \frac{(-2m-M)_{p+q}(2m+M+1)_{p+q}}{(N+1)_{p+q}p!q!}$$

$$= \frac{(-2m-M)_p(2m+M+1)_p}{(N+1)_p p!} \sum_{q=0}^{2m+M-p} \frac{(-2m-M+p)_q(2m+M+1+p)_q}{(N+1+p)_q q!}$$

$$= \frac{(-2m-M)_p(2m+M+1)_p}{(N+1)_p p!} F(-2m-M+p, 2m+M+1+p; N+1+p; 1).$$

Используя равенство

$$F(a,b;c;1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \quad c \notin \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N},\ \mathrm{Re}\, c > \mathrm{Re}(a+b),$$

(см. [14, гл. 2, формула 2.8(46)]), получаем

$$\sum_{j=p}^{2m+M} \frac{(-2m-M)_j(2m+M+1)_j}{(N+1)_j j!}\binom{j}{p}$$

$$= \frac{(-2m-M)_p(2m+M+1)_p}{(N+1)_p p!} \frac{\Gamma(N+1+p)\Gamma(N-p)}{\Gamma(2m+M+N+1)\Gamma(N-M-2m)}.$$

Учитывая (14), отсюда находим

$$\sum_{j=p}^{2m+M} \frac{(-2m-M)_j(2m+M+1)_j}{(N+1)_j j!}\binom{j}{p}$$

$$= \frac{(2m+M+1-p)_p(2m+M+1)_p N!}{p!(1-N)_p} \frac{\Gamma(N)}{\Gamma(2m+M+N+1)\Gamma(N-M-2m)}$$

$$= \frac{(2m+M+1-p)_p(2m+M+1)_p N!}{p!(1-N)_p} \frac{(N-M-2m)_{2m+M}}{(M+N+2m)!}. \quad (17)$$

Комбинируя (16) и (17), приходим к (15). $\square$

Лемма 3. *Пусть*

$$a_{m,n}(x) = (x+2n-m)_{m-1}(x+2n-1)_{m-1}, \quad m,n = 1,\dots,p,\ p \geq 2,$$

$$\Delta_p(x) = \begin{vmatrix} a_{1,1}(x) & a_{1,2}(x) & \dots & a_{1,p}(x) \\ a_{2,1}(x) & a_{2,2}(x) & \dots & a_{2,p}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p,1}(x) & a_{p,2}(x) & \dots & a_{p,p}(x) \end{vmatrix}.$$

Тогда

$$\Delta_p(x) = \prod_{j=1}^{p-1}\left(\prod_{n=2}^{p-j+1} \gamma_n(x+2j-2)\right), \quad (18)$$

где $\gamma_n(x) = 2(n-1)(2x+2n-1)$.

Доказательство. Вычтем из $(j+1)$-й строки определителя $\Delta_p(x)$ его j-ю строку, умноженную на $(x-j+1)(x+j)$, где $j = p-1, p-2, \dots, 1$. Учитывая, что

$$a_{j+1,n}(x) - a_{j,n}(x)(x-j+1)(x+j) = a_{j,n}(x)\gamma_n(x),$$

имеем

$$\Delta_p(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \gamma_2(x) & \gamma_3(x) & \dots & \gamma_p(x) \\ 0 & a_{2,2}(x)\gamma_2(x) & a_{2,3}(x)\gamma_3(x) & \dots & a_{2,p}(x)\gamma_p(x) \\ 0 & a_{3,2}(x)\gamma_2(x) & a_{3,3}(x)\gamma_3(x) & \dots & a_{3,p}(x)\gamma_p(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{p-1,2}(x)\gamma_2(x) & a_{p-1,3}(x)\gamma_3(x) & \dots & a_{p-1,p}(x)\gamma_p(x) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_{2,2}(x) & a_{2,3}(x) & \dots & a_{2,p}(x) \\ a_{3,2}(x) & a_{3,3}(x) & \dots & a_{3,p}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p-1,2}(x) & a_{p-1,3}(x) & \dots & a_{p-1,p}(x) \end{vmatrix} \cdot \prod_{n=2}^{p} \gamma_n(x).$$

Поскольку $a_{m,n}(x+2) = a_{m,n+1}(x)$, отсюда получаем соотношение

$$\Delta_p(x) = \Delta_{p-1}(x+2) \prod_{n=2}^{p} \gamma_n(x),$$

которое влечет равенство (18). $\square$

Обозначим через $[x]$ целую часть числа $x \in \mathbb{R}$.

Лемма 4. *Пусть $M, N \in \mathbb{Z}_+$ или $M, N \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}_+$, $N \geq M+3$ и*

$$\lim_{x \to -1+0} (1+x)^{(M+3)/2} \sum_{m=1}^{[\frac{N-M-1}{2}]} c_m P_{2m+M}^{-N}(x) = 0 \tag{19}$$

для некоторых констант $c_m \in \mathbb{C}$. Тогда все c_m равны нулю.

Доказательство. Предположим сначала, что $M, N \in \mathbb{Z}_+$. В этом случае по лемме 2 имеем

$$(1+x)^{(M+3)/2} \sum_{m=1}^{[\frac{N-M-1}{2}]} c_m P_{2m+M}^{-N}(x)$$

$$= (1-x)^{N/2} \sum_{m=1}^{[\frac{N-M-1}{2}]} \sum_{p=0}^{2m+M} c_m \gamma_{M,N,m,p} (1+x)^{p+\frac{M-N+3}{2}}$$

$$= (1-x)^{N/2} \left(\sum_{p=M+1}^{2[\frac{N-M-1}{2}]+M} \left(\sum_{m \geq \frac{p-M}{2}}^{[\frac{N-M-1}{2}]} c_m \gamma_{M,N,m,p} \right) \frac{1}{(1+x)^{\frac{N-M-3}{2}-p}} \right.$$

$$\left. + \sum_{p=0}^{M} \left(\sum_{m=1}^{[\frac{N-M-1}{2}]} c_m \gamma_{M,N,m,p} \right) \frac{1}{(1+x)^{\frac{N-M-3}{2}-p}} \right).$$

Учитывая, что $(2m+M+1-p)_p = 0$ при $1 \le m < \frac{p-M}{2}$, отсюда и из (13) получаем

$$(1+x)^{(M+3)/2} \sum_{m=1}^{[\frac{N-M-1}{2}]} c_m P_{2m+M}^{-N}(x)$$
$$= (1-x)^{N/2} \sum_{p=0}^{2[\frac{N-M-1}{2}]+M} \left(\sum_{m=1}^{[\frac{N-M-1}{2}]} c_m \gamma_{M,N,m,p} \right) \frac{1}{(1+x)^{\frac{N-M-3}{2}-p}}.$$

Тогда из условия (19) делаем вывод, что числа c_m удовлетворяют системе линейных уравнений

$$\sum_{m=1}^{[\frac{N-M-1}{2}]} c_m \gamma_{M,N,m,p} = 0, \quad 0 \le p \le \left[\frac{N-M-3}{2} \right].$$

Полагая

$$\eta_{N,p} = \frac{(-1)^p}{(1-N)_p p! 2^p},$$

видим, что определитель этой системы равен

$$\gamma_{M,N,1,0}\gamma_{M,N,2,0} \dots \gamma_{M,N,[\frac{N-M-1}{2}],0} \eta_{N,0}\eta_{N,1} \dots \eta_{N,[\frac{N-M-3}{2}]} \Delta_{[\frac{N-M-1}{2}]}(M+2).$$

Указанное произведение отлично от нуля на основании леммы 3. Отсюда $c_m = 0$ для любого $m = 1, \dots, \left[\frac{N-M-1}{2}\right]$. Таким образом, лемма 4 доказана, если $M, N \in \mathbb{Z}_+$.

Аналогично, используя лемму 1, получаем требуемое утверждение в случае, когда $M, N \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}_+$. $\square$

Пусть

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n+1}) \in \mathbb{S}^n, \quad \xi' = (\xi_1, \dots, \xi_n) \ne 0, \quad \sigma = \xi'/|\xi'| \in \mathbb{S}^{n-1},$$

$\theta_1, \dots, \theta_n$ — сферические координаты точки ξ, т. е. $0 \le \theta_1 \le 2\pi$, $0 \le \theta_k \le \pi$, $k \ne 1$ и

$$\xi_1 = \sin\theta_n \dots \sin\theta_1, \quad \xi_2 = \sin\theta_n \dots \sin\theta_2 \cos\theta_1, \quad \dots, \quad \xi_{n+1} = \cos\theta_n.$$

Обозначим через $\mathscr{H}_k$ пространство сферических гармоник степени k на $\mathbb{S}^{n-1}$, рассматриваемое как подпространство $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ (см. [15, гл. 4, § 2]), a_k — размерность $\mathscr{H}_k$, $\{Y_l^{(k)}\}$ $(1 \le l \le a_k)$ — фиксированный ортонормированный базис в $\mathscr{H}_k$. Всякой функции $f(\xi) = f(\sigma \sin\theta_n, \cos\theta_n) \in C(\mathscr{S})$ соответствует ряд Фурье

$$f(\xi) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{a_k} f^{k,l}(\xi), \tag{20}$$

где

$$f^{k,l}(\xi) = f_{k,l}(\theta_n) Y_l^{(k)}(\sigma),$$
$$f_{k,l}(\theta_n) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(\zeta \sin\theta_n, \cos\theta_n) \overline{Y_l^{(k)}(\zeta)}\, d\zeta, \tag{21}$$

$d\zeta$ — поверхностная мера на $\mathbb{S}^{n-1}$.

Далее будем рассматривать $SO(n)$ как подгруппу группы $SO(n+1)$, оставляющей неподвижной точку $(0,\dots,0,1)$. Пусть $d\tau$ — нормированная мера Хаара на $SO(n)$, $T^k(\tau)$ — сужение квазирегулярного представления группы $SO(n)$ на пространство $\mathscr{H}_k$ (см. [16, гл. 9, § 2, п. 7)]), $\{t^k_{l,p}\}$ $(1\le l,p\le a_k)$ — матрица представления $T^k(\tau)$ в базисе $\{Y^{(k)}_l\}$, т. е.

$$\big(T^k(\tau)Y^{(k)}_l\big)(\zeta)=Y^{(k)}_l(\tau^{-1}\zeta)=\sum_{p=1}^{a_k}t^k_{l,p}(\tau)Y^{(k)}_p(\zeta),\quad \tau\in SO(n),\ \zeta\in\mathbb{S}^{n-1}.$$

В частности, при $k=0$ имеем $a_0=1$, $Y^{(0)}_1(\zeta)=\omega^{-1/2}_{n-1}$, $t^0_{1,1}(\tau)=1$ для всех $\zeta\in\mathbb{S}^{n-1}$, $\tau\in SO(n)$, где ω_{n-1} — площадь сферы $\mathbb{S}^{n-1}$. При $n=2$ и $k\ge1$ удобно использовать следующий базис в $\mathscr{H}_k$:

$$Y^{(k)}_1(\zeta)=\zeta^k/\sqrt{2\pi},\quad Y^{(k)}_2(\zeta)=\bar{\zeta}^k/\sqrt{2\pi}$$

(в этом случае $a_k=2$ при всех $k\ge1$). Если τ — вращение на угол θ в $\mathbb{R}^2$, то для этого базиса

$$t^k_{1,1}(\tau)=\overline{t^k_{2,2}(\tau)}=e^{-ik\theta},\quad t^k_{1,2}(\tau)=t^k_{2,1}(\tau)=0.$$

При этом для членов ряда (20) из формулы (21) имеем равенство

$$f^{k,l}(\xi)=\int\limits_{SO(2)}f(\tau^{-1}\xi)\overline{t^k_{l,l}(\tau)}\,d\tau. \tag{22}$$

При $n\ge3$ из неприводимости $T^k(\tau)$ (см. [16, гл. 9, § 2, п. 10)]) следует, что при всех $1\le l,p\le a_k$

$$f_{k,l}(\theta_n)Y^{(k)}_p(\sigma)=a_k\int\limits_{SO(n)}f(\tau^{-1}\xi)\overline{t^k_{l,p}(\tau)}\,d\tau \tag{23}$$

(см. [17, доказательство формулы (6)]).

Обозначим через $\mathscr{D}'(\mathscr{S})$ пространство распределений на подобласти $\mathscr{S}\subset\mathbb{S}^n$ (см., например, [18, гл. 6, § 4]).

Лемма 5. *Пусть $f\in C(\mathscr{S})$. Тогда для того чтобы $f\in\mathscr{F}$, необходимо и достаточно, чтобы при всех $k\in\mathbb{Z}_+$, $1\le l\le a_k$ имело место равенство*

$$f^{k,l}(\xi)=\sum_{m=1}^{\infty}c_{m,k,l}(\sin\theta_n)^{1-n/2}P^{-n/2-k+1}_{2m+n/2-1}(\cos\theta_n)Y^{(k)}_l(\sigma),\quad c_{m,k,l}\in\mathbb{C}, \tag{24}$$

где ряд (24) сходится в пространстве распределений $\mathscr{D}'(\mathscr{S})$.

Доказательство. Из [19, теорема 9.1] следует, что $f\in\mathscr{F}$ в том и только том случае, когда для любых $k\in\mathbb{Z}_+$, $1\le l\le a_k$

$$f^{k,l}(\xi)=\sum_{\nu\in\mathscr{Z}}c_{\nu,k,l}(\sin\theta_n)^{1-n/2}P^{-n/2-k+1}_{\nu+n/2-1}(\cos\theta_n)Y^{(k)}_l(\sigma),\quad c_{\nu,k,l}\in\mathbb{C}, \tag{25}$$

где $\mathscr{Z}=\{\nu>1: P^{-n/2}_{\nu+n/2-1}(0)=0\}$ и ряд (25) сходится в $\mathscr{D}'(\mathscr{S})$. Учитывая, что

$$P^{-n/2}_{\nu+n/2-1}(0)=\frac{1}{2^{n/2}\sqrt{\pi}}\sin\Big(\frac{\pi}{2}\nu\Big)\frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+n+1}{2}\right)}$$

(см. [14, гл. 3, формула 3.4(20)]), отсюда получаем требуемое. □

§ 4. Доказательство теоремы 1

Пусть $f \in \mathscr{F}$ и выполнено условие (1). Используя формулы (22) и (23), для любых фиксированных $k \in \mathbb{Z}_+$, $1 \le l \le a_k$ получаем

$$(1+\xi_{n+1})^{(n+1)/2}|f^{k,l}(\xi)| \le a_k \sup_{\tau \in SO(n)} (1+(\tau\xi)_{n+1})^{(n+1)/2}|f(\tau\xi)|,$$

откуда

$$\lim_{\xi_{n+1}\to -1}(1+\xi_{n+1})^{(n+1)/2} f^{k,l}(\xi) = 0. \tag{26}$$

Далее, лемма 5 и равенства (9), (22), (23) показывают, что $f^{k,l} \in C_{\mathrm{even}}(\mathscr{S}')$ при $0 \le k \le 2$. Аналогично если $k \ge 3$, то для некоторых констант c_m функция

$$\Phi(\xi) = f^{k,l}(\xi) - \sum_{1 \le m < k/2} c_m (\sin\theta_n)^{1-n/2} P^{-n/2-k+1}_{2m+n/2-1}(\cos\theta_n) Y_l^{(k)}(\sigma)$$

четная в $\mathscr{S}'$. Тогда

$$\lim_{\xi_{n+1}\to -1}\Phi(\xi)\bigl(1-\xi_{n+1}^2\bigr)^{(n+1)/2} = \lim_{\xi_{n+1}\to 1}\Phi(\xi)\bigl(1-\xi_{n+1}^2\bigr)^{(n+1)/2} = 0$$

(см. (11), (22), (23)). Отсюда и из (26) делаем вывод, что

$$\lim_{\xi_{n+1}\to -1}(1+\xi_{n+1})^{1+n/4} \sum_{1 \le m < k/2} c_m P^{-n/2-k+1}_{2m+n/2-1}(\xi_{n+1}) = 0.$$

Теперь по лемме 4 все c_m равны нулю и $f^{k,l} \in C_{\mathrm{even}}(\mathscr{S}')$ для любых $k \in \mathbb{Z}_+$, $1 \le l \le a_k$. Это влечет утверждение (i).

Докажем утверждение (ii). Положим

$$f(\xi) = (\sin\theta_n)^{1-n/2} P^{-n/2-2}_{n/2+1}(\cos\theta_n) Y_1^{(3)}(\sigma).$$

Из леммы 5 следует, что функция f принадлежит классу $\mathscr{F}$. Кроме того, функция f не является четной и удовлетворяет (2), поскольку

$$P^{-n/2-2}_{n/2+1}(x) \sim 2^{1+n/4}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+2\right)}{\Gamma(n+4)}\frac{1}{(1+x)^{1+n/4}}, \quad x \to -1+0,$$

$$P^{-n/2-2}_{n/2+1}(x) + P^{-n/2-2}_{n/2+1}(-x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{n/2+1}\Gamma\left(\frac{n+5}{2}\right)}\frac{1}{(1-x^2)^{n/4+1}}$$

(см. (12), (8), а также [14, гл. 2, формула 2.8(4)]). Таким образом, теорема 1 полностью доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1985. Т. 2.
2. *Сычев А. В.* Модули и пространственные квазиконформные отображения. Новосибирск: Наука, 1983.
3. *Axler S., Bourdon P., Ramey W.* Harmonic function theory. New York: Springer-Verl., 1992.
4. *Маркушевич А. И.* Избранные главы теории аналитических функций. М.: Наука, 1976.
5. *Трохимчук Ю. Ю.* Непрерывные отображения и условия моногенности. М.: Физматгиз, 1963.
6. *Helgason S.* Integral geometry and Radon transforms. New York: Springer-Verl., 2010.
7. *Volchkov V. V.* Integral geometry and convolution equations. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2003.

8. *Volchkov V. V., Volchkov Vit. V.* Harmonic analysis of mean periodic functions on symmetric spaces and the Heisenberg group. London: Springer-Verl., 2009.
9. *Volchkov V. V., Volchkov Vit. V.* Offbeat integral geometry on symmetric spaces. Basel: Birkhäuser, 2013.
10. *Волчков В. В.* Решение проблемы носителя для некоторых классов функций // Мат. сб. 1997. Т. 188, № 9. С. 13–30.
11. *Funk P.* Über eine geometrische Anwendung der Abelschen Integralgleichung // Math. Ann. 1916. Bd 77. S. 129–135.
12. *Rubin B.* Inversion and characterization of the hemispherical transform // J. Anal. Math. 1999. V. 77. P. 105–128.
13. *Campi S.* On the reconstruction of a star-shaped body from its "half-volumes" // J. Austral. Math. Soc. (Ser. A). 1994. V. 37. P. 243–257.
14. *Бейтмен Г., Эрдейн А.* Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1973. Т. 1.
15. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.
16. *Виленкин Н. Я.* Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1991.
17. *Волчков В. В.* Новые теоремы о среднем для решений уравнения Гельмгольца // Мат. сб. 1993. Т. 184, № 7. С. 71–78.
18. *Лопатинский Я. Б.* Введение в современную теорию дифференциальных уравнений в частных производных. Киев: Наук. думка, 1980.
19. *Волчков Вит. В.* Локальная теорема о двух радиусах на сфере // Алгебра и анализ. 2004. Т. 16, № 3. С. 60–91.

Статья поступила 18 марта 2016 г.

Волчков Виталий Владимирович
Донецкий национальный университет,
ул. Университетская, 24, Донецк 83001, Украина
volna936@gmail.com

Волчкова Наталья Петровна
Донецкий национальный технический университет,
ул. Артема, 58, Донецк 83000, Украина
volna936@gmail.com