Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2017. Том 58, № 3

УДК 517.518.23+517.518.83+519.651

СФЕРИЧЕСКИЕ КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА

В. Л. Васкевич

Аннотация. Изучаются последовательности кубатурных формул на единичной сфере многомерного евклидова пространства. Множества узлов рассматриваемых кубатурных формул последовательно вкладываются друг в друга, образуя в пределе плотное на исходной сфере подмножество. В качестве области действия кубатурных формул, т. е. в качестве класса подынтегральных функций, выступают сферические пространства Соболева. Допускается, что эти пространства могут иметь дробную гладкость. Доказано, что среди всевозможных сферических кубатурных формул с заданной совокупностью узлов существует и единственна формула с наименьшей нормой функционала погрешности — оптимальная. Установлено, что веса оптимальной кубатурной формулы являются решением специальной невырожденной системы линейных уравнений. Доказано, что при неограниченном возрастании числа узлов нормы функционалов погрешности оптимальных кубатурных формул стремятся к нулю.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.305

Ключевые слова: сферическая кубатурная формула, функционал погрешности, пространство Соболева на многомерной сфере, константа и функция вложения, оптимальная формула.

Введение

На сфере S единичного радиуса в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, рассматриваются кубатурные формулы вида

$$\frac{1}{\sigma_{n-1}} \int\limits_S \varphi \, dS \cong \sum_{j=1}^{N} c_j \varphi(\theta^{(j)}), \tag{1}$$

где $\sigma_{n-1} = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ — площадь сферы S, $\theta^{(j)}$ — лежащие на S узлы формулы, а c_j — ее веса, подчиненные условию

$$\sum_{j=1}^{N} c_j = 1. \tag{$1'$}$$

Таким образом, все рассматриваемые здесь кубатурные формулы точны на тождественно постоянных функциях.

Проекция на сферу S произвольной точки x из $\mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, обозначается далее через θ, т. е. полагается, что $\theta = x/\rho$, где $\rho = |x|$. Интегралы по $d\theta$ в дальнейшем — это поверхностные интегралы по dS.

Кубатурная формула (1) рассматривается здесь как некоторый стандарт приближения обобщенной функции $M_S(x)$, действие которой на пробную функцию $\varphi(x)$ представляет собой сферическое среднее по S от этой самой функции:

$$(M_S, \varphi) = \frac{1}{\sigma_{n-1}} \int \varphi(\theta)\, d\theta.$$

В качестве типичных средств для такого стандартного приближения используются линейные комбинации сдвигов хорошо известной дельта-функции Дирака $\delta(x)$. Отметим, что носитель обобщенной функции $M_S(x)$ в точности совпадает с единичной сферой S, т. е. представляет собой множество меры нуль в $\mathbb{R}^n$. Следовательно, обобщенная функция $M_S(x)$ сингулярна. Полезно также ее представление

$$M_S(x) = \frac{1}{\sigma_{n-1}} \int \delta(\theta - \theta')\, d\theta'.$$

В качестве классов H^s подынтегральных функций, на которых в дальнейшем будем сравнивать действие кубатурной суммы в (1) и обобщенной функции $M_S(x)$, рассматриваются сферические пространства Соболева. Параметр s в обозначении класса H^s — число, возможно, дробное, причем $s > (n-1)/2$. Подробнее о классах H^s изложено в § 1.

Сравнивать действие кубатурной суммы в (1) на произвольную пробную функцию φ из H^s с действием на φ обобщенной функции $M_S(x)$ принято с помощью функционала погрешности l_N, определяемого соотношением [1]

$$(l_N, \varphi) \equiv \frac{1}{\sigma_{n-1}} \int \varphi(\theta)\, d\theta - \sum_{j=1}^{N} c_j \varphi(\theta^{(j)}).$$

При $s > (n-1)/2$ этот линейный функционал ограничен на H^s.

Далее нас интересуют разрешимость следующей ассоциированной с совокупностью функционалов l_N экстремальной проблемы, а также способы ее решения и свойства этих решений.

Задача. *Найти среди всех кубатурных формул вида* (1) *с условием* (1′) *ту, функционал погрешности которой имеет минимальную* H^{s*}*-норму.*

В случае, если такая кубатурная формула существует, условимся называть ее H^s-*оптимальной.* Основные результаты статьи относятся к свойствам такого рода оптимальных формул и сформулированы в теоремах 1–3 (см. § 2–4).

§ 1. Классы подынтегральных функций

Напомним определение пространства Соболева H^s на единичной сфере, $s > (n-1)/2$ (см., к примеру, [2]). Пусть сначала φ — сферический полином, заданный в виде линейной комбинации сферических гармоник:

$$\varphi(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\sigma(k)} a_{k,l} Y_{k,l}(\theta), \quad a_{k,l} = a_{k,l}(\varphi). \tag{2}$$

В правой части этого равенства лишь конечное число коэффициентов $a_{k,l}$ отлично от нуля, параметр $\sigma(k)$ определяется соотношением

$$\sigma(k) = (n + 2k - 2)\frac{(n+k-3)!}{k!(n-2)!} \sim \frac{2}{(n-2)!} k^{n-2},$$

функции множества $\{Y_{k,l}(\theta) \mid l = 1, 2, \dots, \sigma(k)\}$ образуют в пространстве сферических гармоник порядка k ортонормированный базис:

$$\int Y_{k,l}(\theta) Y_{k,p}(\theta)\, d\theta = \delta_l^p.$$

Гармоника $Y_{0,1}(\theta)$ тождественно постоянна и равна $1/\sqrt{\sigma_{n-1}}$.

В качестве пространства H^s подынтегральных функций далее рассматривается пополнение совокупности всех сферических полиномов вида (2) по норме

$$\|\varphi \mid H^s(S)\| = \left\{ \left| \frac{1}{\sigma_{n-1}} \int \varphi(\theta)\, d\theta \right|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{n,k}^s \sum_{l=1}^{\sigma(k)} |a_{k,l}(\varphi)|^2 \right\}^{1/2}, \qquad (3)$$

где $\lambda_{n,k} = k(n + k - 2)$. Как известно, величина, противоположная числу $\lambda_{n,k}$, представляет собой собственное число угловой части оператора Лапласа, записанного в сферических координатах. Соответствующая $\lambda_{n,k}$ собственная функция является сферической гармоникой порядка k. Размерность $\sigma(k)$ пространства сферических гармоник порядка k совпадает с кратностью собственного числа.

Отметим, что тождественно единичная функция принадлежит классу H^s, имея здесь единичную норму.

Параметр s в (3), возможно, дробный, характеризует минимально возможную гладкость элементов из H^s, т. е. s — *гладкость класса*.

Любая функция φ из H^s разлагается в сходящийся по норме (3) ряд по сферическим гармоникам. Коэффициенты $a_{k,l} = a_{k,l}(\varphi)$ в разложении (2) представимы в виде

$$a_{0,1}(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_{n-1}}} \int \varphi(\theta)\, d\theta, \quad a_{k,l}(\varphi) = \int \varphi(\theta) Y_{k,l}(\theta)\, d\theta,\ k \ge 1.$$

Пространство H^s гильбертово со скалярным произведением

$$(\varphi, \psi)_s = \frac{1}{\sigma_{n-1}} a_{0,1}(\varphi) a_{0,1}(\psi) + \sum_{k=1}^{\infty} k^s (n + k - 2)^s \sum_{l=1}^{\sigma(k)} a_{k,l}(\varphi) a_{k,l}(\psi).$$

Объединение выбранных сферических гармоник $Y_{k,l}(\theta)$ по всем $k = 0, 1, \dots$ и $l = 1, 2, \dots, \sigma(k)$ представляет собой базис пространства H^s.

Известно [2–5], что при $s > (n - 1)/2$ для любой функции $\varphi(\theta)$ из H^s справедлива оценка

$$\sup_{\theta \in S} |\varphi(\theta)| \le A_n^{(r)} \|\varphi \mid H^s\|, \qquad (4)$$

где $A_n^{(r)}$ — константа вложения [2], определяемая равенством

$$A_n^{(r)} = \left\{ 1 + \frac{1}{\sigma_{n-1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma(k)}{k^s (n + k - 2)^s} \right\}^{1/2}, \quad s = 2r.$$

Известно также [6], что в H^s существует функция вложения, для которой в (4) имеет место равенство. Общий вид функции вложения $G_{\theta_0}(\theta)$ задается с помощью следующего равенства, ряд в правой части которого абсолютно сходится:

$$G_{\theta_0}(\theta) = 1 + \frac{1}{\sigma_{n-1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma(k)}{k^s (n + k - 2)^s} G_k^{(n)}(\theta \cdot \theta_0). \qquad (5)$$

Здесь θ_0 — произвольный узел на сфере S, а $G_k^{(n)}(t)$ — полиномом Гегенбауэра, нормализованный условием $G_k^{(n)}(+1) = 1$. Отметим, что для нормализованного полинома Гегенбауэра $G_k^{(n)}(t)$ справедливо равенство

$$\max_{-1\le t\le 1} \left|G_k^{(n)}(t)\right| = G_k^{(n)}(+1) = 1. \tag{6}$$

Таким образом, константа $A_n^{(r)}$ представляет собой норму действующего из H^s в $C(S)$ оператора вложения.

Классы функций на сфере, близкие к H^s, рассматривались ранее в [7, 8]. В [8] на сфере в трехмерном пространстве введен класс, представляющий собой фактор-пространство H^s по подпространству сферических полиномов нулевой степени.

§ 2. Экстремальные функции кубатурных формул и нормы их функционалов погрешности

Функционал погрешности l_N исходной кубатурной формулы (1), определяемый соотношением

$$(l_N, \varphi) \equiv \frac{1}{\sigma_{n-1}} \int \varphi(\theta)\, d\theta - \sum_{j=1}^{N} c_j \varphi(\theta^{(j)}),$$

линеен и ограничен на $C(S)$, следовательно, в силу (4) линеен и ограничен на H^s при $s > (n-1)/2$, т. е. принадлежит H^{s*}. Исследуем это пространство функционалов более подробно.

Пусть линейный функционал $l(\theta)$ точен на любой постоянной, т. е. такой, что $(l(\theta), 1) = 0$. Тогда $l(\theta)$ принадлежит H^{s*} в том и только том случае, если выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s (n+k-2)^s} \sum_{l=1}^{\sigma(k)} |(l(\theta), Y_{k,l}(\theta))|^2 < +\infty.$$

При этом ряд по сферическим гармоникам $l(\theta) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \sum\limits_{l=1}^{\sigma(k)} (l, Y_{k,l}) Y_{k,l}(\theta)$ сходится к функционалу $l(\theta)$ по норме

$$\|l \mid H^{s*}\| = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s (n+k-2)^s} \sum_{l=1}^{\sigma(k)} |(l(\theta), Y_{k,l}(\theta))|^2 \right\}^{1/2}.$$

Пространству H^{s*} принадлежит, например, обобщенная функция

$$l(\theta \mid \theta^{(j)}) = \delta(\theta - \theta^{(j)}) - \frac{1}{\sigma_{n-1}} \int \delta(\theta - \theta')\, d\theta', \quad |\theta^{(j)}| = 1.$$

Ее разложение в ряд по сферическим гармоникам имеет вид

$$l(\theta \mid \theta^{(j)}) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\sigma(k)} Y_{k,l}(\theta^{(j)}) Y_{k,l}(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma(k)}{\sigma_{n-1}} G_k^{(n)}(\theta^{(j)} \cdot \theta).$$

Последнее равенство справедливо в силу известной теоремы сложения для сферических гармоник [9]:

$$\sum_{l=1}^{\sigma(k)} Y_{k,\,l}(\theta^{(j)}) Y_{k,\,l}(\theta) = \frac{\sigma(k)}{\sigma_{n-1}} G_k^{(n)}(\theta^{(j)} \cdot \theta),$$

где $G_k^{(n)}(t)$ — нормализованный полином Гегенбауэра степени k.

Экстремальная для $l(\theta)$ функция $u(\theta)$ из H^s, определяемая парой равенств

$$\|l \mid H^{s*}\|^2 = (l, u) = \|u \mid H^s\|^2, \tag{7}$$

существует, единственна [6, 10] и ортогональна тождественной постоянной. Ее разложение в ряд по сферическим гармоникам имеет вид [6]

$$u(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s(n+k-2)^s} \sum_{l=1}^{\sigma(k)} (l, Y_{k,l}) Y_{k,l}(\theta). \tag{8}$$

На сфере функция $u(\theta)$ является решением операторного уравнения

$$(-\mathfrak{D})^s u(\theta) = l(\theta), \tag{9}$$

где $\mathfrak{D}$ — оператор Лапласа — Бельтрами (угловая часть оператора Лапласа в сферических координатах [11]). Если $s = m$ — натуральное число, то $(-1)^m \mathfrak{D}^m$ — дифференциальный (полигармонический) оператор на сфере. Если s дробное, то $(-\mathfrak{D})^s$ — псевдодифференциальный оператор, значения которого на элементах из H^s однозначно определяются соотношениями

$$(-\mathfrak{D})^s Y_{k,l}(\theta) = \lambda_{n,k}^s Y_{k,l}(\theta). \tag{10}$$

Оператор $(-\mathfrak{D})^s$ линеен и действует из H^s в H^{s*}.

Теорема 1. *Для любого функционала $l(\theta)$ из H^{s*} с условием $(l, 1) = 0$ задача*

$$(-\mathfrak{D})^s u(\theta) = l(\theta), \quad u(\theta) \in H^s, \quad \int u(\theta)\, d\theta = 0, \tag{11}$$

имеет единственное решение, совпадающее с экстремальной для $l(\theta)$ функцией.

Доказательство. Несложно проверить, что всем трем условиям (11) удовлетворяет функция, задаваемая равенством (8). Тем самым решение задачи (11) существует.

Далее, из операторного уравнения (9) и соотношений (10) следует, что функция $u(\theta)$ из H^s, являясь решением задачи (11), обязана разлагаться в ряд по сферическим гармоникам по формуле (8), т. е. обязана быть экстремальной для $l(\theta)$. В силу единственности экстремальной функции решение задачи (11) также единственно. □

Следствие 1. *Если функционалы $l_q(\theta)$ из H^{s*}, $(l_q, 1) = 0$, при $q \to \infty$ сходятся по норме $\|\cdot \mid H^{s*}\|$ к функционалу $l_\infty(\theta)$ из H^{s*}, то функции $u_q(\theta)$, удовлетворяющие условиям*

$$(-\mathfrak{D})^s u_q(\theta) = l_q(\theta), \quad u_q(\theta) \in H^s, \quad \int u_q(\theta)\, d\theta = 0,$$

при $q \to \infty$ сходятся по норме $\|\cdot \mid H^s\|$ к решению $u_\infty(\theta)$ задачи

$$(-\mathfrak{D})^s u_\infty(\theta) = l_\infty(\theta), \quad u_\infty(\theta) \in H^s, \quad \int u_\infty(\theta)\, d\theta = 0.$$

Доказательство. Переходя в равенстве $(l_q, 1) = 0$ к пределу при неограниченном увеличении q, получаем $(l_\infty, 1) = 0$. По теореме 1 заключаем, что функции $u_q(\theta)$ и $u_\infty(\theta)$ экстремальные для функционалов $l_q(\theta)$ и $l_\infty(\theta)$ соответственно. Следовательно, имеют место равенства

$$\|u_q - u_\infty \mid H^s\|^2 = \|l_q - l_\infty \mid H^{s*}\|^2.$$

Переходя здесь к пределу при $q \to \infty$ и пользуясь сходимостью $l_q(\theta)$ по норме, получаем требуемое. $\square$

Рассмотрим следующую функцию переменной t, $-1 \le t \le 1$:

$$u(t) = -\frac{1}{\sigma_{n-1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma(k)}{k^s (n+k-2)^s} G_k^{(n)}(t). \tag{12}$$

Здесь функция $G_k^{(n)}(t)$ — нормализованный полином Гегенбауэра тот же, что и в равенстве (5). Ряд в правой части (12) сходится абсолютно и равномерно. Из соотношений (7), (8) следует, что соответствующая функционалу погрешности l_N экстремальная функция $u_N(\theta)$ представима в виде следующей линейной комбинации [6]:

$$u_N(\theta) = \sum_{j=1}^{N} c_j u(\theta \cdot \theta^{(j)}), \tag{13}$$

где $\theta \cdot \theta^{(j)} = \cos\omega_j$, т. е. ω_j — угол между векторами θ и $\theta^{(j)}$, а функция $u(\theta \cdot \theta^{(j)}) = u(\cos\omega_j)$ определяется равенством (12).

Из определения экстремальной функции и равенства (13) получаем для квадрата нормы функционала погрешности следующее представление в виде положительно определенной квадратичной формы [2]:

$$\|l_N \mid H^{s*}\|^2 = \sum_{i,j=1}^{N} c_i c_j G(\theta^{(i)} \cdot \theta^{(j)}) = \sum_{i,j=1}^{N} c_i c_j G(\cos\omega_{ij}). \tag{14}$$

Здесь ω_{ij} обозначает угол между векторами $\theta^{(i)}$ и $\theta^{(j)}$ на единичной сфере, а функция $G(t)$, значения которой определяют матрицу квадратичной формы (14), задается соотношением

$$G(t) = \frac{1}{\sigma_{n-1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma(k)}{k^s (n+k-2)^s} G_k^{(n)}(t) = -u(t). \tag{15}$$

Функция $G(\theta \cdot \theta^{(j)})$ известна также как *функция Грина* оператора $(-\mathfrak{D})^s$. Имеет место равенство

$$(-\mathfrak{D})^s G(\theta \cdot \theta^{(j)}) = \delta(\theta - \theta^{(j)}) - \frac{1}{\sigma_{n-1}} \int \delta(\theta - \theta')\, d\theta'.$$

Значение функционала в правой части на тождественно постоянной функции равно нулю, а сам этот функционал принадлежит H^{s*}. По переменной θ функция $G(\theta \cdot \theta^{(j)})$ принадлежит H^s и ортогональна тождественно постоянной функции. Отметим, что диагональные значения $G(\theta \cdot \theta)$ функции Грина связаны с константой вложения $A_n^{(r)}$, $r = s/2$, соотношением

$$G(\theta \cdot \theta) = G(+1) = \frac{1}{\sigma_{n-1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma(k)}{k^s (n+k-2)^s} = \left(A_n^{(r)}\right)^2 - 1.$$

Соответствующую функционалу l_N экстремальную функцию $u_N(\theta)$ можно выразить через функцию Грина $G(\cdot)$ следующим образом:

$$u_N(\theta) = -\sum_{j=1}^{N} c_j G(\theta\cdot\theta^{(j)}). \tag{13'}$$

Применив (8), получаем разложение функции $u_N(\theta)$ в ряд по сферическим гармоникам:

$$u_N(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\sigma(k)} \frac{(l_N, Y_{k,l}(\theta))}{\lambda_{n,k}^{s}}\, Y_{k,l}(\theta).$$

Взяв от обеих частей этого равенства функционал погрешности l_N, получаем выражение квадрата нормы функционала погрешности через его коэффициенты Фурье [12]:

$$\|l_N \mid H^{s*}\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_{n,k}^{s}}\sum_{l=1}^{\sigma(k)} (l_N, Y_{k,l}(\theta))^2.$$

Из этого равенства заключаем, что норма $\|l_N \mid H^{s*}\|$ представляет собой монотонно убывающую функцию гладкости s рассматриваемого класса.

§ 3. Оптимальная сферическая кубатурная формула: существование и единственность

Перейдем к экстремальной задаче, сформулированной во введении, и докажем для нее теорему существования и единственности. Попутно выпишем невырожденную систему линейных уравнений, решением которой является вектор весов оптимальной сферической кубатурной формулы.

Теорема 2. *Среди всех кубатурных формул вида (1) с заданным множеством узлов $\{\theta^{(j)} \mid j = 1, 2, \dots, N\}$ на единичной сфере и весами, удовлетворяющими условию $\sum\limits_{j=1}^{N} c_j = 1$, существует в точности одна, для которой H^{s*}-норма функционала погрешности, $s > (n-1)/2$, принимает минимально возможное значение.*

Доказательство. Зафиксировав множество узлов $\{\theta^{(j)} \mid j = 1, 2, \dots, N\}$ на единичной сфере, введем в рассмотрение следующий числовой параметр:

$$d_N = d_N(s) = \inf\left\{ \|l_N \mid H^{s*}\| \mid \sum_{j=1}^{N} c_j = 1 \right\}.$$

Здесь l_N — функционал погрешности кубатурной формулы с узлами в $\theta^{(j)}$, $j = 1, \dots, N$, и весами $c_1, \dots, c_N$. Ясно, что число d_N неотрицательно и конечно.

Функционал погрешности l_N^0 имеет в H^{s*} минимальную норму тогда и только тогда, когда он обладает свойством $\left\|l_N^0 \mid H^{s*}\right\| = d_N$. Это означает в силу (14), что весовой вектор $c^0 = \left(c_1^0, \dots, c_N^0\right)$ соответствует оптимальному в H^s функционалу l_N^0 в том и только том случае, если c^0 доставляет минимум квадратичной форме $\psi(c) = \sum\limits_{i,j=1}^{N} c_i c_j G(\theta^{(i)}\cdot\theta^{(j)})$ на многообразии $\sum\limits_{j=1}^{N} c_j = 1$:

$$c^0 = \arg\inf\left\{ \sum_{i,j=1}^{N} c_i c_j G(\theta^{(i)}\cdot\theta^{(j)}) \mid \sum_{j=1}^{N} c_j = 1 \right\}.$$

Исходная экстремальная задача сведена, таким образом, к стандартной задаче на условный экстремум, для решения которой применим метод неопределенных множителей Лагранжа.

Приравняв нулю частные производные от вспомогательной функции $\psi_1(c,\lambda) = \psi(c) + 2\lambda\left(1 - \sum\limits_{j=1}^{N} c_j\right)$, получим следующую сопутствующую задаче на условный экстремум систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{N} G(\theta^{(i)} \cdot \theta^{(j)}) c_j - \lambda = 0, \quad i = 1, \dots, N, \\ \sum\limits_{j=1}^{N} c_j = 1. \end{cases} \tag{16}$$

Обозначив через $G = (g_{ij})$ квадратную матрицу с элементами $g_{ij} = G(\theta^{(i)} \cdot \theta^{(j)})$, а через P — вектор-строку длины N с единичными элементами, перепишем систему (16) в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} G & P^* \\ P & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ -\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} G & P^* \\ P & 0 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Проверим, что матрица Q этой системы невырожденна.

Предположим противное, тогда соответствующая (17) однородная система

$$Q \begin{pmatrix} c \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G & P^* \\ P & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ \mu \end{pmatrix} = 0 \tag{18}$$

имеет нетривиальное решение $\begin{pmatrix} c_* \\ \mu_* \end{pmatrix}$. При этом $c_* = (c_1, \dots, c_N) \neq 0$ (иначе, как вытекает из первого уравнения системы (16), $\mu_* = 0$, т. е. решение тривиально).

Рассмотрим соответствующий ненулевому вектору весов c_* и сосредоточенный на единичной сфере S функционал погрешности нуля

$$m_N(x) = \sum_{j=1}^{N} c_j \delta(x - \theta^{(j)}), \quad (c_1, \dots, c_N) = c_* \neq 0.$$

Функционал m_N линеен и ограничен на $C(S)$, а в силу (4) он линеен и ограничен на H^s, $s > (n-1)/2$. Учитывая, что $Pc_* = 0$ или, что то же самое, $\sum\limits_{j=1}^{N} c_j = 0$, приходим к выводу, что действие функционала $m_N(x)$ на тождественно единичную функцию равно нулю. Таким образом, в пространстве H^s экстремальная для m_N функция $u_N(\theta)$ задается следующим аналогичным $(13')$ равенством:

$$u_N(\theta) = \sum_{i=1}^{N} c_i G(\theta^{(i)} \cdot \theta).$$

В силу первых N уравнений системы (16) значения функции $u_N(\theta)$ в узлах $\theta^{(j)}$ совпадают друг с другом:

$$u_N(\theta^{(i)}) = u_N(\theta^{(j)}) = -\mu_*, \quad i, j = 1, \dots, N.$$

Следовательно, справедлива цепочка равенств

$$\|u_N \mid H^s\|^2 = (m_N, u_N) = \sum_{j=1}^{N} c_j u_N(\theta^{(j)}) = -\mu_* \sum_{j=1}^{N} c_j = 0.$$

Это возможно лишь в случае, если экстремальная функция $u_N(\theta)$ тождественно нулевая, что противоречит предположению о нетривиальности вектора c_*.

Таким образом, решение сопутствующей задаче на условный экстремум системы (16) существует и единственно. Обозначим его через $(c^{(0)}, \lambda^{(0)})$.

По определению точка $(c^{(0)}, \lambda^{(0)})$ стационарная для функции $\psi_1(c, \lambda)$. Из теории условного экстремума известно, что соответствующая компонента $c^{(0)}$ доставляет минимум функции $\psi(c)$ на многообразии $\sum\limits_{j=1}^{N} c_j = 1$, если квадратичная форма

$$\Phi(c) = \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial c_i \partial c_j} c_i c_j = 2 \sum_{i,j=1}^{N} G(\theta^{(i)} \cdot \theta^{(j)}) c_i c_j$$

положительно определена на подпространстве векторов c, задаваемом равенством $\sum\limits_{j=1}^{N} c_j = 0$. Но положительность функции $\Phi(c)$ при любом ненулевом $c = (c_1, \dots, c_N)$ с условием $\sum\limits_{j=1}^{N} c_j = 0$ сразу вытекает из следующей цепочки равенств:

$$\sum_{i,j=1}^{N} c_i c_j G(\theta^{(i)} \cdot \theta^{(j)}) = (m_N, u_N) = \|m_N \mid H^{s*}\|^2 > 0.$$

Таким образом, существование оптимальной кубатурной формулы доказано. Установим ее единственность. Предположим, что существуют две различные кубатурные формулы с одинаковыми узлами $\theta^{(j)}$, $j = 1, \dots, N$, функционалы погрешности $l_N^{(1)}(x)$ и $l_N^{(2)}(x)$ которых не совпадают и имеют в H^{s*} минимальную норму:

$$\left\| l_N^{(1)} \mid H^{s*} \right\| = \left\| l_N^{(2)} \mid H^{s*} \right\| = d_N.$$

Нормы соответствующих этим функционалам в H^s экстремальных функций $u_N^{(1)}(\theta)$ и $u_N^{(2)}(\theta)$ по определению равны той же самой величине:

$$\left\| u_N^{(1)} \mid H^s \right\| = \left\| u_N^{(2)} \mid H^s \right\| = d_N.$$

Воспользовавшись известным для гильбертова пространства H^s тождеством параллелограмма

$$\left\| \frac{u_N^{(1)} + u_N^{(2)}}{2} \mid H^s \right\|^2 + \left\| \frac{u_N^{(1)} - u_N^{(2)}}{2} \mid H^s \right\|^2 = \frac{\left\| u_N^{(1)} \mid H^s \right\|^2}{2} + \frac{\left\| u_N^{(2)} \mid H^s \right\|^2}{2},$$

получим

$$\left\| \frac{u_N^{(1)} + u_N^{(2)}}{2} \mid H^s \right\|^2 = d_N^2 - \left\| \frac{u_N^{(1)} - u_N^{(2)}}{2} \mid H^s \right\|^2 < d_N^2.$$

Но полусумме $\frac{u_N^{(1)} + u_N^{(2)}}{2}$ соответствует функционал погрешности l_N вида

$$(l_N, \varphi) \equiv \frac{1}{\sigma_{n-1}} \int \varphi(\theta)\, d\theta - \sum_{j=1}^{N} c_j \varphi(\theta^{(j)}).$$

Норма этого функционала при $u_N^{(1)}(\theta) \neq u_N^{(2)}(\theta)$ обязана быть строго меньше d_N:

$$\|l_N \mid H^{s*}\| = \left\| \frac{u_N^{(1)} + u_N^{(2)}}{2} \mid H^s \right\| < d_N.$$

Это противоречит определению d_N как точной нижней грани совокупности норм оптимальных функционалов. Следовательно, $l_N^{(1)}$ и $l_N^{(2)}$ обязаны совпадать. $\square$

Следствие 2. *Экстремальная функция* $u_N^{\mathrm{opt}}(\theta)$ *оптимальной кубатурной формулы во всех узлах* $\theta^{(i)}$ *этой формулы принимает одно и то же отрицательное значение.*

Доказательство. Перепишем первые N уравнений системы (16) в виде

$$\lambda = \sum_{j=1}^{N} G(\theta^{(i)} \cdot \theta^{(j)}) c_j, \quad i = 1, \dots, N, \tag{19}$$

или, что в силу (13′) то же самое:

$$u_N^{\mathrm{opt}}(\theta^{(i)}) = -\lambda, \quad i = 1, \dots, N. \tag{19′}$$

Чтобы найти соответствующее значение λ, сначала воспользуемся последним из уравнений системы (16), а затем (19). Тогда получим

$$\lambda = \left(\sum_{i=1}^{N} c_i\right)\lambda = \sum_{i,j=1}^{N} G(\theta^{(i)} \cdot \theta^{(j)}) c_i c_j = \left\| l_N^{\mathrm{opt}} \mid H^{s*} \right\|^2 > 0. \tag{20}$$

Последнее равенство справедливо в силу (14). $\square$

§ 4. Сходимость оптимальных сферических кубатурных формул по норме

Рассмотрим какую-нибудь последовательность $\Theta = \{\Theta_k\}_{k=0}^{\infty}$ конечных подмножеств сферы S с тем условием, что объединение всех Θ_k образует в S плотное подмножество. Пусть первый элемент рассматриваемой последовательности (ее нулевой уровень) задается равенством

$$\Theta_0 = \left\{\theta_0^{(j)} \mid j = 1, 2, \dots, N(0)\right\}, \quad \left|\theta_0^{(j)}\right| = 1,$$

а каждый ее последующий уровень получается из предыдущего добавлением нескольких новых точек сферы S:

$$\Theta_k = \Theta_{k-1} \cup \left\{\theta_k^{(j)} \mid j = 1, 2, \dots, \mu(k)\right\}, \quad k = 1, 2, \dots.$$

Здесь $\theta_k^{(j)}$ не принадлежит Θ_{k-1}, $\left|\theta_k^{(j)}\right| = 1$ и $\mu(k) \geq 1$. Последовательность Θ — *мультисеть* на сфере S, множество Θ_k — k-*уровень* мультисети Θ.

Совокупность узловых точек мультисети Θ определим по рекурсии: в качестве узлов нулевого уровня возьмем векторы $\theta_0^{(j)}$, узлы k-уровня получаются добавлением к узлам $(k-1)$-уровня всех точек вида $\theta_k^{(j)}$, где $j = 1, \dots, \mu(k)$. Таким образом, число $N(k)$ узлов уровня Θ_k определяется соотношением

$$N(k) = N(k-1) + \mu(k), \quad k = 1, 2, \dots.$$

По условию $\mu(k) \geq 1$ и, следовательно, $N(k) \geq k + N(0)$, т. е. $N(k)$ с увеличением k монотонно возрастает до бесконечности.

Зафиксировав на сфере множество узлов, совпадающее с k-уровнем Θ_k рассматриваемой мультисети, построим соответствующую этим узлам H^s-оптимальную сферическую кубатурную формулу. По теореме 1 такая формула существует и единственна. Ее функционал погрешности $l_{N(k)}^{\mathrm{opt}} = l_{N(k)}^{\mathrm{opt}}(\theta \mid \Theta_k)$ действует на H^s ограниченно, т. е. имеет в H^{s*} конечную норму.

Теорема 3. *Нормы функционалов погрешности $l^{\mathrm{opt}}_{N(k)}$, соответствующих H^s-оптимальным сферическим кубатурным формулам, монотонно стремятся к нулю при неограниченном увеличении числа узлов $N(k)$ кубатурной формулы.*

Доказательство. Обобщенную функцию $l^{\mathrm{opt}}_{N(k)}(\theta)$ можно рассматривать как функционал погрешности с узлами в точках уровня Θ_{k+1} и нулевыми весами в узлах из разности $\Theta_{k+1} \setminus \Theta_k$. Это замечание и определение оптимальной кубатурной формулы приводят к неравенствам

$$\big\|l^{\mathrm{opt}}_{N(k+1)} \mid H^{s*}\big\| \le \big\|l^{\mathrm{opt}}_{N(k)} \mid H^{s*}\big\| \le \big\|l^{\mathrm{opt}}_{N(0)} \mid H^{s*}\big\| = d_{N(0)}.$$

Таким образом, рассматриваемая последовательность норм монотонно убывает и при этом ограничена. Следовательно, существует ее предел, совпадающий с ее же точной нижней гранью:

$$d = \lim_{k\to\infty} \big\|l^{\mathrm{opt}}_{N(k)} \mid H^{s*}\big\| = \inf_{k\ge 0} \big\|l^{\mathrm{opt}}_{N(k)} \mid H^{s*}\big\|, \quad 0 \le d < \infty.$$

В случае, если $d = 0$, заключение теоремы, очевидно, выполнено. Поэтому будем предполагать, что $d > 0$.

В гильбертовом пространстве H^s любой шар слабо компактен. Следовательно, в последовательности $u^{\mathrm{opt}}_{N(k)}(\theta)$, лежащей в шаре положительного радиуса $d_{N(0)}$, найдется подпоследовательность $\big\{u^{\mathrm{opt}}_{N(k_q)}\big\}_{q=1}^{\infty}$, слабо сходящаяся при $q \to \infty$ к некоторому элементу $u_\infty(\theta)$ из H^s. Пусть

$$l_\infty(\theta) = (-\mathfrak{D})^s u_\infty(\theta), \quad l^{\mathrm{opt}}_{N(k_q)}(\theta) = (-\mathfrak{D})^s u^{\mathrm{opt}}_{N(k_q)}(\theta).$$

Тогда $l_\infty(\theta)$ и $l^{\mathrm{opt}}_{N(k_q)}(\theta)$ принадлежат H^{s*}. Учитывая, что сумма весов любой рассматриваемой здесь кубатурной формулы равна единице, заключаем, что слабый предел $l_\infty(\theta)$ точен на любой тождественно постоянной функции:

$$(l_\infty(\theta), 1) = \lim_{q\to\infty} \big(l^{\mathrm{opt}}_{N(k_q)}, 1\big) = 0.$$

Предполагая далее, что $k_j < k_{j+1}$, докажем, что при $q \to \infty$ подпоследовательность $l^{\mathrm{opt}}_{N(k_q)}$ сходится к l_∞ по норме $\|\cdot \mid H^{s*}\|$. С этой целью прежде всего установим равенство $\|l_\infty \mid H^{s*}\| = d$.

Для любой функции φ из H^s имеем

$$|(l_\infty, \varphi)| \le \lim_{q\to\infty} \big\|l^{\mathrm{opt}}_{N(k_q)} \mid H^{s*}\| \cdot \|\varphi \mid H^s\big\| = d\|\varphi \mid H^s\|.$$

Следовательно, $\|l_\infty \mid H^{s*}\| \le d$. Далее, по теореме Мазура [13] для любого $\varepsilon > 0$ найдется выпуклая комбинация

$$\sum_{q=1}^{p} \alpha_q l^{\mathrm{opt}}_{N(k_q)}, \quad \alpha_q \ge 0, \ \sum_{q=1}^{p} \alpha_q = 1,$$

обладающая тем свойством, что $\Big\|l_\infty - \sum\limits_{q=1}^{p} \alpha_q l^{\mathrm{opt}}_{N(k_q)} \mid H^{s*}\Big\| \le \varepsilon$. Заметив, что $k_q \le k_p$ при $q \le p$, получаем вложения $\Theta_{k_q} \subset \Theta_{k_p}$ и равенство

$$\sum_{q=1}^{p} \alpha_q l^{\mathrm{opt}}_{N(k_q)}(\theta) = M_S(x) - \sum_{j=1}^{N(k_p)} c_j \delta\big(\theta - \theta^{(j)}_{k_p}\big), \quad \sum_{j=1}^{N(k_p)} c_j = 1.$$

Из определения оптимальной кубатурной формулы получаем теперь следующую оценку снизу:

$$\left\| \sum_{q=1}^{p} \alpha_q l_{N(k_q)}^{\mathrm{opt}} \mid H^{s*} \right\| \geq \left\| l_{N(k_p)}^{\mathrm{opt}} \mid H^{s*} \right\| \geq d > 0.$$

Учитывая ее и выбирая $\varepsilon < d/2$, из неравенства треугольника имеем

$$\|l_\infty \mid H^{s*}\| \geq \left\| \sum_{q=1}^{p} \alpha_q l_{N(k_q)}^{\mathrm{opt}} \mid H^{s*} \right\| - \left\| l_\infty - \sum_{q=1}^{p} \alpha_q l_{N(k_q)}^{\mathrm{opt}} \mid H^{s*} \right\| \\ \geq \left\| l_{N(k_p)}^{\mathrm{opt}} \mid H^{s*} \right\| - \varepsilon \geq d - \varepsilon > 0.$$

Переходя в неравенстве $\|l_\infty \mid H^{s*}\| \geq d - \varepsilon$ к пределу по $\varepsilon \to 0$, получаем $\|l_\infty \mid H^{s*}\| \geq d$ и окончательно выводим $\|l_\infty \mid H^{s*}\| = d$.

В соответствии с выбором подпоследовательности $l_{N(k_q)}^{\mathrm{opt}}$ обобщенные функции $m_q(\theta) = \frac{1}{\|l_{N(k_q)}^{\mathrm{opt}} | H^{s*}\|} l_{N(k_q)}^{\mathrm{opt}}(\theta)$ при $q \to \infty$ слабо сходятся к обобщенной функции $\frac{1}{d} l_\infty(\theta)$. При этом $\|m_q \mid H^{s*}\| = 1$ и имеет место предельное равенство

$$\lim_{q\to\infty} \left(m_q, \frac{1}{d} u_\infty \right) = \frac{1}{d^2}(l_\infty, u_\infty) = 1,$$

где $u_\infty(\theta)$ — экстремальная функция для $l_\infty(\theta)$ в пространстве H^s. Норма $N(\cdot) = \|\cdot \mid H^s\|$ имеет в точке $\frac{1}{d} u_\infty(\theta)$ единичной сферы производную Фреше. Учитывая это и пользуясь критерием Шмульяна [14], заключаем, что m_q сходится в H^{s*} сильно. Ее сильный предел обязан совпадать со слабым, что и означает, как легко видеть, сходимость $l_{N(k_q)}^{\mathrm{opt}}$ к l_∞ по норме пространства H^{s*}.

По следствию 1 к теореме 1 функции $u_{N(k_q)}^{\mathrm{opt}}(\theta)$ как решения из H^s псевдодифференциального уравнения $(-\mathfrak{D})^s u_{N(k_q)}^{\mathrm{opt}}(\theta) = l_{N(k_q)}^{\mathrm{opt}}(\theta)$ при $q \to \infty$ сходятся по норме H^s к решению $u_\infty(\theta)$ аналогичного уравнения

$$(-\mathfrak{D})^s u_\infty(\theta) = l_\infty(\theta).$$

В частности, для произвольного узла $\theta_{k_p}^{(j)}$ исходной мультисети справедливы равенства

$$u_\infty\big(\theta_{k_p}^{(j)}\big) = \lim_{q\to\infty} u_{N(k_q)}^{\mathrm{opt}}\big(\theta_{k_p}^{(j)}\big), \quad j = 1, 2, \ldots, N(k_p). \tag{21}$$

Для фиксированного узла $\theta_{k_p}^{(j)}$ при всех $q \geq p$ уровни Θ_{k_q} исходной мультисети содержат $\theta_{k_p}^{(j)}$ в себе. Это замечание вместе с доказанным ранее следствием 2 из теоремы 2 о постоянстве значений оптимальной экстремальной функции в узлах соответствующего уровня мультисети приводят к заключению, что при всех $q \geq p$ значения $u_{N(k_q)}^{\mathrm{opt}}\big(\theta_{k_p}^{(j)}\big)$ ни от j, ни от p не зависят:

$$u_{N(k_q)}^{\mathrm{opt}}\big(\theta_{k_p}^{(j)}\big) = \mu(q) = -\left\| l_{N(k_q)}^{\mathrm{opt}} \mid H^{s*} \right\|^2, \quad q \geq p. \tag{22}$$

Последнее равенство справедливо в силу (20). Переходя в полученных соотношениях (22) к пределу при $q \to \infty$, пользуясь (21) и учитывая, что предел значений $\mu(q)$ равен $-d^2$, заключаем, что $u_\infty\big(\theta_{k_p}^{(j)}\big) = -d^2$. Таким образом, предельная функция $u_\infty(\theta)$ из H^s во всех точках плотного в S множества узлов исходной мультисети Θ принимает одно и то же значение, равное $-d^2$. Учитывая еще, что $u_\infty(\theta)$ непрерывна на S, заключаем, что она тождественно постоянна. В частности, имеют место равенства

$$\|u_\infty \mid H^s\|^2 = (l_\infty, u_\infty) = -d^2(l_\infty, 1) = 0.$$

Следовательно, функция $u_\infty(\theta)$ тождественно нулевая и $d = 0$, что противоречит предположению. □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л., Васкевич В. Л.* Кубатурные формулы. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1996.

2. *Васкевич В. Л.* Погрешность, обусловленность и гарантированная точность многомерных сферических кубатур // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 6. С. 1245–1262.

3. *Triebel H.* Sampling numbers and embedding constants // Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 2005. V. 248. P. 275–284.

4. *Васкевич В. Л.* Константы и функции вложения пространств соболевского типа на единичной сфере // Докл. АН. 2010. Т. 433, № 4. С. 441–446.

5. *Васкевич В. Л.* Константы вложения периодических пространств Соболева дробного порядка // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 5. С. 1019–1027.

6. *Васкевич В. Л.* Экстремальные функции кубатурных формул на многомерной сфере и сферические сплайны // Мат. труды. 2011. Т. 14, № 2. С. 14–27.

7. *Игнатов М. И., Певный А. Б.* Натуральные сплайны многих переменных. Л.: Наука, 1991.

8. *Михлин С. Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962.

9. *Müller C.* Spherical harmonics. Berlin: Springer-Verl., 1966.

10. *Соболев С. Л.* Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974.

11. *Никольский С. М., Лизоркин П. И.* Приближение сферическими функциями // Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1986. Т. 173. С. 181–189.

12. *Салихов Г. Н.* Кубатурные формулы для многомерных сфер. Ташкент: ФАН, 1985.

13. *Иосида К.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.

14. *Holmes R.* A course on optimization and best approximation. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1972. (Lect. Notes Math.; V. 257).

Статья поступила 24 июня 2016 г.

Васкевич Владимир Леонтьевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
vask@math.nsc.ru