Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2017. Том 58, № 3

УДК 512.5

СРАВНЕНИЕ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ТЕОРИЙ ЧАСТИЧНО КОММУТАТИВНЫХ МЕТАБЕЛЕВЫХ ГРУПП

В. Я. Блощицын, Е. И. Тимошенко

Аннотация. Найдены необходимые и достаточные условия для совпадения универсальных теорий частично коммутативных групп метабелевых многообразий, определенных ациклическими графами.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.302

Ключевые слова: метабелева группа, частично коммутативная группа, ациклический граф, универсальная теория.

Введение

Под графом всюду в дальнейшем будем понимать непустое конечное множество вершин, на котором задано бинарное отношение смежности. Таким образом, без дополнительных оговорок *граф* — это конечный неориентированный граф без петель и кратных ребер. Множество вершин графа Γ обозначим через $V(\Gamma)$, а множество ребер — через $E(\Gamma)$. Ребро (v_1, v_2) — это пара смежных вершин v_1 и v_2 графа.

Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторое многообразие групп, $F(\mathfrak{M})$ — свободная группа этого многообразия с базисом $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, Γ — граф, $V(\Gamma) = X$. *Частично коммутативная группа из многообразия* $\mathfrak{M}$ с определяющим графом Γ — это фактор-группа $F(\mathfrak{M})/R$, где R — нормальная подгруппа из $F(\mathfrak{M})$, порожденная теми коммутаторами $[x_i, x_j] = x_i^{-1}x_j^{-1}x_ix_j$, для которых $(x_i, x_j) \in E(\Gamma)$. *Частично коммутативная группа из многообразия* $\mathfrak{M}$ имеет представление

$$\langle x_1, \dots, x_n \mid [x_i, x_j] = 1, \text{ если } (x_i, x_j) \in E(\Gamma)\rangle$$

в многообразии $\mathfrak{M}$, т. е. она удовлетворяет всем тождествам многообразия $\mathfrak{M}$.

Пусть $\mathfrak{A}_m$ — многообразие абелевых групп, экспонента которых делит натуральное число m, и $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}$ — многообразие всех абелевых групп. Нас интересуют частично коммутативные группы многообразия $\mathfrak{A}_m\mathfrak{A}$. Обозначим свободную группу многообразия $\mathfrak{A}_m\mathfrak{A}$ через $M(m)$, а частично коммутативную группу этого многообразия с определяющим графам Γ — через $M(m,\Gamma)$. Значит, $M(0)$ — свободная метабелева группа, а $M(0,\Gamma)$ — частично коммутативная метабелева группа, которая в работах [1–3] обозначалась через S_Γ.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 15–01–01485) и Министерства образования и науки (гос. задание №2014/138, проект 1052).

Универсальной теорией или *$\forall$-теорией группы G* называется множество $\forall$-предложений групповой сигнатуры (без констант), истинных на группе G. Аналогично определяется $\exists$-теория группы G. Две группы G и H называются *универсально эквивалентными*, если их $\forall$-теории совпадают. Ясно, что $\forall$-теории групп G и H совпадают тогда и только тогда, когда совпадают их $\exists$-теории. Для обозначения универсальной эквивалентности используем запись $G \overset{\forall}{\equiv} H$.

В [2] доказаны необходимые и достаточные условия для совпадения универсальных теорий двух групп S_Γ и S_Δ, определяющие графы которых Γ и Δ являются деревьями.

Чтобы сформулировать эту теорему, напомним, что вершина графа называется *висячей*, если ее степень равна единице.

Пусть $W = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_n}\} \subseteq V(\Gamma)$ — множество всех висячих вершин графа Γ. Удалим из Γ все вершины W вместе с инцидентными им ребрами. Полученный граф обозначаем через Γ'.

Теорема A [2]. *Пусть Γ и Δ — деревья, число вершин каждого из которых не менее трех. Тогда*

$$S_\Gamma \overset{\forall}{\equiv} S_\Delta \Leftrightarrow \Gamma' \simeq \Delta'.$$

Ограничение на количество вершин связано с тем, что для дерева Γ с двумя вершинами граф Γ' не определен, так как $V(\Gamma') = \varnothing$.

Заметим, что приведенная выше теорема неверна, если один из графов Γ или Δ содержит цикл. Соответствующий пример можно легко получить, используя теорему 4 из [3]. Возьмем, например,

$$V(\Gamma) = \{x_1, x_2, x_3\}, \quad E(\Gamma) = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3)\}, \quad V(\Delta) = \{y_1, y_2, y_3, y_4\},$$

$$E(\Delta) = \{(y_1, y_2), (y_2, y_3), (y_3, y_4), (y_1, y_4), (y_2, y_4)\}.$$

Тогда $S_\Gamma \overset{\forall}{\equiv} S_\Delta$, но $\Gamma' \not\simeq \Delta'$.

Основной результат работы — обобщение теоремы A в двух направлениях. Во-первых, в качестве определяющего графа рассматриваем лес, т. е. объединение конечного числа деревьев. Во-вторых, помимо многообразия всех метабелевых групп рассматриваются частично коммутативные группы и в других многообразиях метабелевых групп.

Теорема B. *Пусть Γ и Δ — леса, причем каждая компонента связности графов Γ и Δ содержит не менее трех вершин, p_0 обозначает простое число или 0. Тогда*

$$M(p_0, \Gamma) \overset{\forall}{\equiv} M(p_0, \Delta) \Leftrightarrow \Gamma' \simeq \Delta'.$$

Работа состоит из введения и трех параграфов. В § 1 приведены предварительные сведения, а также собраны утверждения, не требующие отдельных доказательств. Их доказательства практически совпадают с доказательствами соответствующих теорем из [1–3]. Если различия есть, мы указываем на них. В § 2 доказаны некоторые вспомогательные утверждения, в § 3 содержатся доказательство теоремы B.

§ 1. Предварительные сведения

1. Будем постоянно использовать следующее соглашение, что позволит избежать громоздких обозначений.

Пусть $\varphi : G \to G/R = H$ — естественный гомоморфизм группы G на фактор-группу H и g — некоторый элемент из G. За его образом gR сохраним обозначение g, поясняя при необходимости в тексте , что g рассматривается в H.

Например, вершины $x_1, \dots, x_n$ графа Γ являются не только элементами свободной группы $M(m)$, но и группы $M(m, \Gamma)$ и также свободной абелевой группы $M(m, \Gamma)/M'(m, \Gamma)$, где $M'(m, \Gamma)$ — коммутант группы $M(m, \Gamma)$. Нужно лишь уточнять, в какой группе элементы x_i рассматриваются. Эти же элементы будут порождающими кольца коммутативных лорановых многочленов $\mathbb{Z}_m\left[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}\right]$.

2. Пусть G — разрешимая группа ступени 2. Ее коммутант G' — нетривиальная абелева группа. На нем сопряжениями действует группа G: $c \in G'$, $g \in G$, $c^g = g^{-1}cg$. Относительно этого действия коммутант G' является правым $\mathbb{Z}[G]$-модулем. Так как G' действует на G' тождественно, фактически G' есть правый $\mathbb{Z}[G/G']$-модуль.

Предположим, что $m \geq 0$ и $(G')^m = 1$. Тогда G' превращается в правый $\mathbb{Z}_m[G/G']$-модуль.

Для $\gamma = l_1 g_1 + \dots + l_s g_s$, $l_i \in \mathbb{Z}_m$, $g_i \in G/G'$, и $c \in G'$ положим $c^\gamma = (c^{l_1})^{g_1} \dots (c^{l_s})^{g_s}$.

3. Производные Фокса. Пусть $\{x_1, \dots, x_n\}$ — базис свободной группы многообразия $\mathfrak{A}_m\mathfrak{A}$, $m \geq 0$, которую обозначили через $M(m)$. Естественный гомоморфизм
$$\varphi : M(m) \to M(m)/M'(m)$$
продолжается до гомоморфизма групповых колец
$$\mathbb{Z}_m[M(m)] \to \mathbb{Z}_m[M(m)/M'(m)] = \mathbb{Z}_m\left[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}\right].$$
Для $1 \leq i \leq n$ определим отображения
$$\partial_i^{(m)} : M(m) \to \mathbb{Z}_m\left[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}\right]$$
следующим образом. Пусть $u, v \in M(m)$. Тогда полагаем
$$\partial_i^{(m)}(x_j) = \delta_{ij}, \quad \text{где } \delta_{ij} \text{ — символ Кронекера,}$$
$$\partial_i^{(m)}(uv) = \partial_i^{(m)}(u) \cdot \varphi(v) + \partial_i^{(m)}(v).$$
Определение корректно. Продолжим $\partial_i^{(m)}$ по линейности на кольцо $\mathbb{Z}_m[M(m)]$. Отображение $\partial_i^{(m)}$ называется *дифференцированием Фокса.* Результат применения дифференцирования к элементу кольца $\mathbb{Z}_m[M(m)]$ принято называть *i-й правой производной Фокса* от данного элемента.

Кроме правых производных Фокса определим *обобщенные правые производные Фокса* $D_i^{(m)}$. Они возникают в следующей ситуации.

Пусть $A_1, \dots, A_n$ — свободные абелевы группы, $M_m(A_1, \dots, A_n)$ — их произведение в многообразии $\mathfrak{A}_m\mathfrak{A}$. Группа $M_m(A_1, \dots, A_n)$ является фактор-группой свободного произведения $F = A_1 * \dots * A_n$ по подгруппе $F''(F')^m$. Группы A_i вкладываются в группу $M_m(A_1, \dots, A_n)$. Будем отождествлять группы A_i с их образами. Пусть $\varepsilon : \mathbb{Z}_m[M_m(A_1, \dots, A_n)] \to \mathbb{Z}_m$ — отображение тривиализации. Обобщенные правые производные Фокса $D_i^{(m)}$, $i = 1, \dots, n$, являются отображениями
$$D_i^{(m)} : \mathbb{Z}_m[M_m(A_1, \dots, A_n)] \to \mathbb{Z}_m[A_1 \times \dots \times A_n],$$

которые корректно определены следующими условиями:

$$D_i^{(m)}(a_j) = 0, \text{ если } i \neq j, \ a_j \in A_j; \quad D_i^{(m)}(a_i) = a_i - 1;$$

$$D_i^{(m)}(u+v) = D_i^{(m)}(u) + D_i^{(m)}(v), \quad D_i^{(m)}(uv) = D_i^{(m)}(u)v + \varepsilon(u)D_i^{(m)}(v)$$

для $u, v \in \mathbb{Z}_m[M_m(A_1, \dots, A_n)]$.

Заметим, что в последней формуле воспользовались соглашением для обозначения образа элемента v в кольце $\mathbb{Z}_m[A_1 \times \dots \times A_n]$.

Для $\partial_i^{(0)}$ и $D_i^{(0)}$, как в [1–3], будем использовать обозначения ∂_i и D_i.

4. Вложение Магнуса. Пусть T_m — свободный правый модуль с базисом $\{t_1, \dots, t_n\}$ над кольцом $\mathbb{Z}_m\big[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}\big]$. Группа $M(m)$ ранга n вкладывается в группу матриц $\begin{pmatrix} B_m & 0 \\ T_m & 1 \end{pmatrix}$, где B_m — свободная группа многообразия $\mathfrak{A}_m$ с базисом $\{x_1, \dots, x_n\}$. Вложение задается отображением

$$x_i \to \begin{pmatrix} x_i & 0 \\ t_i & 1 \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots n,$$

где x_i в левой части — элемент базиса группы $M(m)$, а x_i в матрице — элемент базиса группы B_m. Это вложение называется *вложением Магнуса.* Для нас важно, что матрица

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ t_1\alpha_1 + \dots + t_n\alpha_n & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_i \in \mathbb{Z}_m[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}], \ a \in B_m,$$

лежит в образе группы $M(m)$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x_i - 1) = a - 1$$

в кольце $\mathbb{Z}_m\big[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}\big]$.

Отметим, что элемент v из $M(m)$ равен единице тогда и только тогда, когда $\partial_1^{(m)}(v) = \dots = \partial_n^{(m)}(v) = 0$.

Более подробную информацию о вложении Магнуса и производных Фокса, а также об обобщенном вложении Магнуса, которое принято называть *вложением Шмелькина*, можно найти в [4].

Из вложения Шмелькина следует, что элемент $v \in M_m(A_1, \dots, A_n)$ равен единице тогда и только тогда, когда

$$D_1^{(m)}(v) = \dots = D_n^{(m)}(v) = 0.$$

5. Запись элементов. В [3] доказана теорема 1 об однозначной записи степеней элементов из коммутанта частично коммутативной метабелевой группы. Первый случай этой теоремы справедлив для группы $M(p, \Gamma)$, p — простое число. Сформулируем его как

Утверждение 1. *Пусть Γ — граф, $V(\Gamma) = \{x_1, \dots, x_n\}$, $n \geq 2$, p_0 простое или 0 и c — элемент из коммутанта группы $M(p_0, \Gamma)$. Если $c^{(x_1-1)\dots(x_n-1)} \neq 1$, то в каждой компоненте связности Γ_i, $i = 1, \dots, q$, графа Γ можно зафиксировать произвольную вершину z_i так, что для некоторого $\gamma \in \mathbb{Z}_m\big[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}\big]$*

$$1 \neq c^{\gamma} = \prod_{1 \leq i < j \leq q} [z_i, z_j]^{\alpha_{ij}}, \quad \alpha_{ij} \in \mathbb{Z}_{p_0}\big[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}\big], \tag{1}$$

причем в запись элемента α_{ij} не входят зафиксированные вершины z_t при $t < i$. Кроме того, запись c^γ в виде (1) *с указанными ограничениями на α_{ij} единственна для фиксированного множества вершин $Z = \{z_1, \dots, z_q\}$.*

Нетрудно также проверить, что доказательство теоремы 3 из [2] переносится на группы $M(p, \Gamma)$, p — простое число.

Пусть $U(x)$ — множество вершин графа, смежных с вершиной x. Сформулируем обобщение теоремы 3 из [2] как

Утверждение 2. *Пусть Γ — граф, $V(\Gamma) = \{x_1, \dots, x_n\}$, $n \geq 2$, p_0 простое или* 0, *c — неединичный элемент из коммутанта $M'(p_0, \Gamma)$. Если $c^{(x_1-1)\dots(x_n-1)} = 1$, то*

(1) *найдется $\gamma \in \mathbb{Z}_m\big[x_1^{\pm1}, \dots, x_n^{\pm1}\big]$ такое, что $c^\gamma \neq 1$;*

(2) *элемент c^γ принадлежит централизатору некоторой вершины $x_{i_0} \in V(\Gamma)$;*

(3) *элемент c^γ можно записать в виде*

$$c^\gamma = \prod [x_i, x_j]^{\alpha_{ij}}, \quad \alpha_{ij} \in \mathbb{Z}_m\big[x_1^{\pm1}, \dots, x_n^{\pm1}\big], \tag{2}$$

где $i < j$, все вершины x_i и x_j лежат в $U(x_{i_0})$, элементы α_{ij} не зависят от x_{i_0} и тех элементов x_t из $U(x_{i_0})$, для которых $t < i$;

(4) *запись элемента c^γ в виде* (2) *с указанными ограничениями единственна.*

6. Централизаторы элементов. В [1] доказана теорема 4 о централизаторах вершин графа, определяющего частично коммутативную метабелеву группу. Эта теорема верна и для групп $M(p, \Gamma)$, где p — любое простое число. Сформулируем обобщение указанной теоремы как

Утверждение 3. *Пусть Γ — граф, $V(\Gamma) = \{x_1, \dots, x_n\}$, p_0 простое или* 0. *Элемент g из группы $M(p_0, \Gamma)$ лежит в централизаторе $C(x_1)$ вершины x_1 тогда и только тогда, когда*

$$g = x_1^{l_1} \dots x_m^{l_m} \prod_{2 \leq i < j \leq m} [x_i, x_j]^{\alpha_{ij}},$$

где $x_2, \dots, x_m$ — все вершины, смежные с x_1, $l_1, \dots, l_m$ — целые числа, α_{ij} — любые элементы из $\mathbb{Z}_{p_0}\big[x_1^{\pm1}, \dots, x_n^{\pm1}\big]$.

Доказательство этого утверждения отличается от доказательства теоремы 4 из [1] только тем, что обобщенные производные D_i нужно заменить на $D_i^{(p_0)}$.

Будем использовать теорему 2 из [2]. Ее доказательство без всяких изменений верно для групп $M(p, \Gamma)$. Поэтому справедливо

Утверждение 4. *Пусть Γ — граф, $V(\Gamma) = \{x_1, \dots, x_n\}$, p_0 простое или* 0 *и $\mathscr{C}(g) = C(g) \cap M'(p_0, \Gamma)$ — централизатор элемента $g \in M(p_0, \Gamma)$ в коммутанте $M'(p_0, \Gamma)$. Тогда для любых $m \leq n$, $1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n$ и ненулевых целых $q_1, \dots, q_m$ имеет место*

$$\mathscr{C}\big(x_{i_1}^{q_1} \dots x_{i_m}^{q_m}\big) = \mathscr{C}(x_{i_1}) \cap \dots \cap \mathscr{C}(x_{i_m}).$$

7. Аннуляторы коммутаторов. Пусть c — элемент из $M'(p_0, \Gamma)$, где p_0 — простое число или 0. *Аннулятором* $\mathrm{Ann}(c)$ элемента c называется идеал кольца $\mathbb{Z}_{p_0}\big[x_1^{\pm1}, \dots, x_n^{\pm1}\big]$, состоящий из элементов γ, для которых $c^\gamma = 1$.

Определим для любых несмежных вершин x_i, x_j графа Γ идеал $\mathbb{A}_{i,j}^\Gamma$ кольца $\mathbb{Z}_{p_0}\big[x_1^{\pm1}, \dots, x_n^{\pm1}\big]$. Если вершины x_i и x_j лежат в разных компонентах связности определяющего графа Γ, то полагаем $\mathbb{A}^{\Gamma}_{i,j}=0$. В противном случае рассмотрим все пути $\{x_i, x_{i1}, \dots, x_{im}, x_j\}$ между вершинами x_i, x_j. Каждому пути поставим в соответствие элемент

$$(1-x_{i1})\dots(1-x_{im})$$

кольца $\mathbb{Z}_{p_0}\big[x_1^{\pm1},\dots,x_n^{\pm1}\big]$. Идеал $\mathbb{A}^{\Gamma}_{i,j}$ порожден всеми такими элементами.

Утверждение 5. *Пусть Γ — граф, $V(\Gamma)=\{x_1,\dots,x_n\}$ и p_0 — простое число или 0. Если $1\le i\ne j\le n$ и $(x_i,x_j)\notin E(\Gamma)$, то аннулятор коммутатора $[x_i,x_j]$ в группе $M(p_0,\Gamma)$ совпадает с $\mathbb{A}^{\Gamma}_{i,j}$.*

8. Универсальная эквивалентность и дискриминируемость. Говорят, что группа G *дискриминируется группой* H, если для любого конечного множества неединичных элементов $\{g_1,\dots,g_n\}$ из G найдется гомоморфизм $\varphi: G\to H$ такой, что $\varphi(g_i)\ne 1$ для $i=1,\dots,n$.

Отметим следующий простой, но полезный факт: если группа G дискриминируется группой H, а группа H — группой G, то универсальные теории групп G и H совпадают.

§ 2. Вспомогательные утверждения

Утверждение 6. *Пусть Γ — лес, $V(\Gamma)=\{x_1,\dots,x_n\}$, $n\ge 2$, p_0 простое или 0 и $\mathscr{C}(g)$ — централизатор элемента g из $M(p_0,\Gamma)$ в коммутанте $M'(p_0,\Gamma)$. Тогда при $i\ne j$ имеет место равенство $\mathscr{C}(x_ix_j)=1$.*

Доказательство индукцией по числу ребер m графа Γ. Не уменьшая общности, положим $i=1$, $j=2$. Если $m=0$, то $M(p_0,\Gamma)=M(p_0)$ — свободная группа многообразия $\mathfrak{A}_{p_0}\mathfrak{A}$. Пусть c — некоторый элемент из коммутанта, перестановочный с элементом x_1x_2, т. е. $c^{1-x_1x_2}=1$ в группе $M(p_0)$. Вычислим производные Фокса $\partial_1^{(p_0)},\dots,\partial_n^{(p_0)}$ от этого равенства. Получим в кольце $\mathbb{Z}_{p_0}\big[x_1^{\pm1},\dots,x_n^{\pm1}\big]$ систему равенств

$$(1-x_1x_2)\partial_i^{(p_0)}c=0,\quad i=1,\dots,n.$$

Так как $\mathbb{Z}_{p_0}\big[x_1^{\pm1},\dots,x_n^{\pm1}\big]$ — область целостности, $\partial_i^{(p_0)}c=0$ в $\mathbb{Z}_{p_0}\big[x_1^{\pm1},\dots,x_n^{\pm1}\big]$. Значит, $c=1$ (см. § 1, п. 4).

Предположим, что утверждение справедливо для графа с $(m-1)$-м ребром.

Если хотя бы одна из вершин x_1 или x_2 висячая, то по утверждению 3 имеем $\mathscr{C}(x_1)=1$ или $\mathscr{C}(x_2)=1$. Далее, по утверждению 4 получаем $\mathscr{C}(x_1x_2)=\mathscr{C}(x_1)\cap\mathscr{C}(x_2)=1$.

Предположим, что обе вершины x_1 и x_2 не висячие. Пусть x_3 — висячая вершина графа Γ. Так как $c^{1-x_1x_2}=1$ в $M(p_0,\Gamma)$, в группе $M(p_0)$ имеет место равенство

$$c^{1-x_1x_2}=[x_3,x_t]^{\beta_{3t}}\prod_{(x_r,x_q)\in E(\Gamma)}[x_r,x_q]^{\beta_{rq}},\tag{3}$$

где x_t — смежная с x_3 вершина, $r\ne 3$, $q\ne 3$, $\beta_{rq}\in\mathbb{Z}_{p_0}\big[x_1^{\pm1},\dots,x_n^{\pm1}\big]$. Вычисляя производную $\partial_3^{(p_0)}$ от левой и правой частей равенства (3), получаем

$$(1-x_1x_2)\partial_3^{(p_0)}c=\beta_{3t}(1-x_t),\tag{4}$$

откуда $\beta_{3t}=\beta'_{3t}(1-x_1x_2)$ для некоторого β'_{3t} из $\mathbb{Z}_{p_0}\big[x_1^{\pm1},\dots,x_n^{\pm1}\big]$. Из равенств (3) и (4) следует, что

$$\big(c[x_3,x_t]^{-\beta'_{3t}}\big)^{1-x_1x_2}=\prod_{(x_r,x_q)\in E(\Gamma)}[x_r,x_q]^{\beta_{rq}},\quad r\ne 3,\ q\ne 3.\tag{5}$$

Обозначим через Γ_3 граф, полученный из Γ удалением вершины x_3 и ребра (x_3, x_t). Граф Γ_3 по-прежнему является лесом, но имеющим на одно ребро меньше, чем Γ. Равенство (5) означает, что в группе $M(p_0, \Gamma_3)$ имеет место включение

$$c[x_3, x_t]^{-\beta'_{3t}} \in \mathscr{C}(x_1 x_2).$$

По индуктивному предположению $c[x_3, x_t]^{-\beta'_{3t}} = 1$ в $M(p_0, \Gamma_3)$. Значит, в группе $M(p_0)$ справедливо равенство

$$c[x_3, x_t]^{-\beta'_{3t}} = \prod_{(x_r, x_q) \in E(\Gamma_3)} [x_r, x_q]^{\gamma_{rq}},$$

где $\gamma_{rq} \in \mathbb{Z}_{p_0}\left[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}\right]$. Отсюда

$$c = [x_3, x_t]^{\beta'_{3t}} \prod_{(x_r, x_q) \in E(\Gamma_3)} [x_r x_q]^{\gamma_{rq}},$$

т. е. $c = 1$ в $M(p_0, \Gamma)$. Утверждение доказано.

Следствие 7. *Пусть Γ — лес, $V(\Gamma) = \{x_1, \dots, x_n\}$, $n \geq 2$, p_0 простое или 0 и $\mathscr{C}(g)$ — централизатор элемента $g \in M(p_0, \Gamma)$ в коммутанте $M'(p_0, \Gamma)$. Тогда при $i \neq j$ имеем*

$$\mathscr{C}(x_i) \cap \mathscr{C}(x_j) = 1.$$

Лемма 8. *Пусть p_0 простое или 0, $n \geq 2$, $l \in \mathbb{N}$. Определим эндоморфизмы ψ_l и φ_l кольца $\mathbb{Z}_{p_0}\left[x_1^{\pm}1, \dots, x_n^{\pm 1}\right]$ следующим образом:*

$$\psi_l = \left\{x_n \to x_{n-1}^{p^l},\ x_i \to x_i \text{ при } i \neq n\right\},$$

$$\varphi_l = \left\{x_n \to x_{n-2}^{p^l} x_{n-1}^{p^l},\ x_i \to x_i \text{ при } i \neq n\right\}.$$

Если $0 \neq \alpha \in \mathbb{Z}_{p_0}\left[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}\right]$, то существует $l_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $l > l_0$ элементы $\varphi_l(\alpha)$ и $\psi_l(\alpha)$ не равны 0.

Доказательство этой леммы совпадает с доказательством леммы 5 из [2].

Лемма 9. *Пусть p_0 — простое число или 0, $n \geq 2$, $l \in \mathbb{N}$ и φ_l — эндоморфизм, определенный в лемме 8. Предположим, что α, β — элементы из $\mathbb{Z}_{p_0}\left[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}\right]$ и для любого l, большего некоторого l_0, имеет место равенство*

$$\varphi_l\left(\frac{x_{n-1}^{p^l} - 1}{x_{n-1} - 1}\alpha + \beta\right) = 0.$$

Тогда $\alpha = \beta = 0$.

Доказательство для $p_0 = 0$ приведено в [2, лемма 6]. Предположим, что $p_0 = p$ — простое число. Так как

$$\frac{x_{n-1}^{p^l} - 1}{x_{n-1} - 1} = \frac{(x_{n-1} - 1)^{p^l}}{x_{n-1} - 1} = (x_{n-1} - 1)^{p^l - 1},$$

получаем

$$(x_{n-1} - 1)^{p^l - 1}\alpha\left(x_1, \dots, x_{n-1}, x_{n-2}^{p^l} x_{n-1}^{p^l}\right) + \beta\left(x_1, \dots, x_{n-1}, x_{n-2}^{p^l} x_{n-1}^{p^l}\right) = 0. \quad (6)$$

К (6) применим эндоморфизм

$$\pi = \{x_{n-1} \to 1,\ x_i \to x_i \text{ при } i \neq n - 1\}$$

кольца $\mathbb{Z}_{p_0}\big[x_1^{\pm 1},\dots,x_n^{\pm 1}\big]$. Получим

$$\beta\big(x_1,\dots,x_{n-2},1,x_{n-2}^{p^l}\big)=0$$

для всех $l>l_0$. По лемме 8 имеем равенство

$$\beta(x_1,\dots,x_{n-2},1,x_n)=0,$$

т. е. $\beta(x_1,\dots,x_{n-2},x_{n-1},x_n)$ делится на $x_{n-1}-1$. Пусть

$$\beta(x_1,\dots,x_n)=(x_{n-1}-1)\beta'(x_1,\dots,x_n).$$

Из равенства (6) следует, что

$$(x_{n-1}-1)^{p^l-1}\alpha\big(x_1,\dots,x_{n-1},x_{n-2}^{p^l}x_{n-1}^{p^l}\big)+\beta'\big(x_1,\dots,x_{n-1},x_{n-2}^{p^l}x_{n-1}^{p^l}\big)(x_{n-1}-1)=0.$$

Отсюда

$$(x_{n-1}-1)^{p^l-2}\alpha\big(x_1,\dots,x_{n-1},x_{n-2}^{p^l}x_{n-1}^{p^l}\big)+\beta'\big(x_1,\dots,x_{n-1},x_{n-2}^{p^l}x_{n-1}^{p^l}\big)=0. \quad (7)$$

Повторяя для равенства (7) рассуждения, примененные к равенству (6), получаем, что β' делится на $x_{n-1}-1$. Тогда $\beta(x_1,\dots,x_n)$ делится на $(x_{n-1}-1)^2$. Продолжая процесс, получим, что β делится на сколь угодно большие степени элемента $(x_{n-1}-1)$. Это возможно лишь при $\beta=0$. Но тогда и $\alpha=0$. Лемма доказана.

Лемма 10. *Пусть p_0 — простое число или 0, $n\geq 2$, $l\in\mathbb{N}$. Эндоморфизм φ_l определен, как в лемме 8. Предположим, что α, β, γ — элементы из $\mathbb{Z}_{p_0}\big[x_1^{\pm 1},\dots,x_n^{\pm 1}\big]$, причем элемент β не зависит от x_{n-2}. Если для всех l, больших некоторого l_0, имеет место*

$$\varphi_l\left(\frac{x_{n-1}^{p^l}-1}{x_{n-1}-1}\alpha+x_{n-1}^{p^l}\frac{x_{n-2}^{p^l}-1}{x_{n-2}-1}\beta+\gamma\right)=0, \quad (8)$$

то $\alpha=\beta=\gamma=0$.

Доказательство. Для $p_0=0$ лемма доказана (см. [2, лемма 7]). Предположим, что $p_0=p$ — простое число. Применим к равенству (8) эндоморфизм π, определенный в лемме 9. Получим

$$(x_{n-2}-1)^{p^l}\beta\big(x_1,\dots,x_{n-3},1,x_{n-2}^{p^l}\big)+(x_{n-2}-1)\gamma\big(x_1,\dots,x_{n-2},1,x_{n-2}^{p^l}\big)=0.$$

Так как $(x_{n-2}-1)^{p^l}=x_{n-2}^{p^l}-1$, из леммы 8 следует, что

$$(x_n-1)\beta(x_1,\dots,x_{n-3},1,x_n)+(x_{n-2}-1)\gamma(x_1,\dots,x_{n-2},1,x_n)=0. \quad (9)$$

По условию β не зависит от x_{n-2}, значит, из равенства (9) следует равенство $\beta(x_1,\dots,x_{n-3},1,x_n)=0$. Следовательно, элемент $\beta(x_1,\dots,x_{n-3},x_{n-1},x_n)$ делится на $x_{n-1}-1$, т. е. $\beta=\beta'(x_{n-1}-1)$. Аналогично $\gamma=\gamma'(x_{n-1}-1)$. Получаем равенство (8), в котором β заменено на β', а γ на γ'. Кроме того, $(x_{n-1}-1)^{p^l}$ нужно заменить на $(x_{n-1}-1)^{p^l-1}$. При $p^l-1>0$ заключаем, что β' и γ' делятся на $x_{n-1}-1$. Таким образом, элементы β и γ делятся на любую степень $(x_{n-1}-1)$. Отсюда следует, что $\beta=\gamma=0$ и, значит, $\alpha=0$. Лемма доказана.

Лемма 11. *Пусть* Γ — *граф,* $V(\Gamma) = \{x_1, \dots, x_n\}$, $n \geq 2$, p_0 — *простое число или* 0, $l \neq 0$, $m \neq 0$ *и* c_1, c_2 — *элементы из коммутанта* $M'(p_0, \Gamma)$ *группы* $M(p_0, \Gamma)$. *Если элементы* $x_1^l c_1$ *и* $x_2^m c_2$ *перестановочны, то элементы* x_1 *и* x_2 *также перестановочны.*

Доказательство. При $p_0 = 0$ утверждение доказано в [2, лемма 4]. Однако это доказательство не проходит для группы $M(p, \Gamma)$, p простое, так как экспонента ее коммутанта больше 0. Поэтому приведем доказательство для случая, когда $p_0 = p$ — простое число.

Итак, пусть $\left[x_1^l c_1, x_2^m c_2\right] = 1$ в группе $M(p, \Gamma)$, но $(x_i, x_j) \notin E(\Gamma)$. Пусть ранг группы $M(p)$ равен 2 и $\{x, y\}$ — ее базис. Существует гомоморфизм $\varphi :$ $M(p, \Gamma) \to M(p)$, при котором $\varphi(x_1) = x$, $\varphi(x_2) = y$, $\varphi(x_i) = 1$ при $i \neq 1, 2$. Любой элемент c из коммутанта группы $M(p)$ можно записать в виде $c = [x, y]^\gamma$, где γ — некоторый элемент из $\mathbb{Z}_p\left[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}\right]$. Поэтому найдутся элементы α и β из $\mathbb{Z}_{p_0}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ такие, что $c_1 = [x, y]^\alpha$, $c_2 = [x, y]^\beta$. Тогда

$$[x^l [x, y]^\alpha, y^m [x, y]^\beta] = [x, y]^{\frac{x^l - 1}{x - 1} \cdot \frac{y^m - 1}{y - 1} - \alpha(1 - y^m) - \beta(x^l - 1)} = 1.$$

Применяя к этому равенству обобщенную производную Фокса $D_1^{(p)}$, получим, что

$$\frac{x^l - 1}{x - 1} \cdot \frac{y^m - 1}{y - 1} - \alpha(1 - y^m) - \beta(x^l - 1) = 0. \tag{10}$$

Значит, найдутся $\alpha', \beta' \in \mathbb{Z}_p[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ такие, что

$$\alpha = \alpha' \frac{x^l - 1}{x - 1}, \quad \beta = \beta' \frac{y^m - 1}{y - 1}.$$

Подставляя выражения для α и β в равенство (10) и выполняя сокращение, находим

$$1 - \alpha'(1 - y) - \beta'(x - 1) = 0. \tag{11}$$

Применение к равенству (11) гомоморфизма тривиализации ε приводит к противоречию. Лемма доказана.

§ 3. Доказательство теоремы B

Висячую вершину графа Γ назовем *лишней*, если смежная с ней вершина имеет степень не менее трех.

Удалим из графа Γ все лишние вершины и инцидентные им ребра. Полученный граф обозначим через Γ^*.

Предположим, что $\Gamma' \simeq \Delta'$. Докажем, что $M(p_0, \Gamma) \overset{\forall}{\equiv} M(p_0, \Delta)$. Достаточно установить, что удаление одной лишней вершины и инцидентного ей ребра из определяющего графа не меняют универсальной теории группы. Действительно, если это справедливо, то $M(p_0, \Gamma) \overset{\forall}{\equiv} M(p_0, \Gamma^*)$ и $M(p_0, \Delta) \overset{\forall}{\equiv} M(p_0, \Delta^*)$. Так как $\Gamma' \simeq \Delta'$, то $\Gamma^* \simeq \Delta^*$. Поэтому $M(p_0, \Gamma^*) \simeq M(p_0, \Delta^*)$. Значит, $M(p_0, \Gamma) \overset{\forall}{\equiv} M(p_0, \Delta)$.

Пусть $V(\Gamma) = \{x_1, \dots, x_n\}$, Γ_0 получается из Γ удалением одной лишней вершины и инцидентного ей ребра. Следовательно, $M(p_0, \Gamma_0)$ — подгруппа $M(p_0, \Gamma)$. Для совпадения универсальных теорий групп $M(p_0, \Gamma_0)$ и $M(p_0, \Gamma)$ осталось доказать, что $M(p_0, \Gamma)$ дискриминируется группой $M(p_0, \Gamma_0)$.

Пусть для определенности x_n — лишняя вершина в графе Γ, x_1 — смежная с ней вершина, а x_{n-2}, x_{n-1} смежны с x_1 (рис. 1).

Для любого $l \in \mathbb{N}$ рассмотрим ретракцию φ_l групп $M(p_0, \Gamma)$ на подгруппу $M(p_0, \Gamma_0)$:

$$\varphi_l = \{x_n \to x_{n-2}^{p^l} x_{n-1}^{p^l},\ x_i \to x_i \text{ при } i \neq n\}.$$

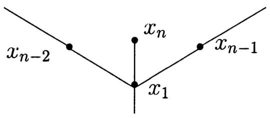

Рис. 1

Заметим, что φ_l индуцирует эндоморфизм кольца $\mathbb{Z}_{p_0}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$, который в леммах 8–10 обозначен также через φ_l.

Пусть c — произвольный неединичный элемент из группы $M(p_0, \Gamma)$. Покажем, что существует натуральное число l_0, зависящее только от элемента c, такое, что для всех $l > l_0$ образ $\varphi_l(c)$ элемента c в группе $M(p_0, \Gamma_0)$ не равен единице.

Если $c \notin M'(p_0, \Gamma)$, то

$$c = x_1^{r_1} \dots x_n^{r_n} d, \quad r_i \in \mathbb{Z},\ d \in M'(p_0, \Gamma),$$

причем хотя бы одно из чисел r_i не равно нулю. Если $r_n = 0$, то

$$\varphi_l(c) = x_1^{r_1} \dots x_{n-1}^{r_{n-1}} \varphi_l(d) \neq 1$$

при любом l. Если $r_n \neq 0$, то существование l_0 с требуемым свойством очевидно.

Пусть $1 \neq c \in M'(p_0, \Gamma)$. Возможны два случая в зависимости от того, равен элемент $c^{(x_1-1)\dots(x_n-1)}$ единице или нет.

Случай 1: $c^{(x_1-1)\dots(x_n-1)} \neq 1$.

Тогда по утверждению 1 найдется элемент γ из кольца $\mathbb{Z}_{p_0}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ такой, что, во-первых, $c^\gamma \neq 1$ и, во-вторых, в каждой компоненте связности $\Gamma_i, i = 1, \dots, q$, графа Γ можно зафиксировать произвольную вершину z_i так, что элемент c^γ можно представить в виде

$$c^\gamma = \prod_{1 \le i < j \le q} [z_i, z_j]^{\alpha_{ij}}, \quad \alpha_{ij} \in \mathbb{Z}_{p_0}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}],$$

причем в запись элемента α_{ij} не входят z_t при $t < i$.

Можно считать, что x_n принадлежит дереву Γ_1. Выберем в качестве z_1 вершину x_1. Так как x_n также лежит в Γ_1, то $x_n \neq z_i$, $i = 1, \dots, q$. Поэтому

$$\varphi_l(c^\gamma) = \prod_{1 \le i < j \le q} [z_i, z_j]^{\varphi_l(\alpha_{ij})}.$$

Если $\alpha_{ij} \neq 0$, то по лемме 8 найдется $l_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $\varphi_l(\alpha_{ij}) \neq 0$ для всех $l > l_0$. Проверим, что для ненулевых α_{ij} все элементы $\varphi_l(\alpha_{ij})$ удовлетворяют требованиям на вхождения $z_1, \dots, z_q$, сформулированным в утверждении 1. Действительно, $\varphi_l(\alpha_{ij})$ получается из α_{ij} заменой x_n на $x_{n-2}^{p^l} x_{n-1}^{p^l}$. Вершины x_{n-2}, x_{n-1} не принадлежат множеству зафиксированных вершин $\{z_1, \dots, z_q\}$, так как первая компонента представлена вершиной x_1, а x_{n-2}, x_{n-1} принадлежат Γ_1. Поэтому в записи $\varphi_l(\alpha_{ij})$ не могут появиться вершины из множества $\{z_1, \dots, z_q\}$, которые не встречались ранее в записи α_{ij}. Таким образом, запись элемента c^γ удовлетворяет всем условиям на показатели $\varphi_l(\alpha_{ij})$. Поскольку $c \neq 1$, хотя бы один показатель α_{ij} не равен 0. Значит, по утверждению 1 $\varphi_l(c^\gamma) \neq 1$ при достаточно больших l. Тем более $\varphi_l(c) \neq 1$.

Случай 2: $c^{(x_1-1)\dots(x_n-1)} = 1$.

По утверждению 2 найдется элемент $\gamma \in \mathbb{Z}_{p_0}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ такой, что c^γ обладает всеми свойствами, указанными в этом утверждении. Дальнейшее доказательство дискриминируемости группы $M(p_0, \Gamma)$ группой $M(p_0, \Gamma_0)$ совпадает с доказательством второй части теоремы 4 из [2], только ссылки на леммы 5–7 из [2] нужно заменить ссылками на леммы 8–10 из данной работы.

Докажем, что из универсальной эквивалентности групп $M(p_0, \Gamma)$ и $M(p_0, \Delta)$ следует изоморфизм графов Γ' и Δ'.

Случай 1. Хотя бы одно из множеств $V(\Gamma) \setminus V(\Gamma')$ или $V(\Delta) \setminus V(\Delta')$ одноэлементно.

Это условие равносильно тому, что хотя бы один из графов Γ или Δ является звездой.

Из теоремы 4 в [2] следует, что если Γ и Δ — деревья и частично коммутативные метабелевы группы $S_\Gamma = M(0, \Gamma)$ и $S_\Delta = M(0, \Delta)$ универсально эквивалентны, то $\Gamma' \simeq \Delta'$. Доказательство этой части теоремы 4 остается без изменения, если заменить $M(0, \Gamma)$ на $M(p, \Gamma)$, а $M(0, \Delta)$ на $M(p, \Delta)$, где p — любое простое число. Таким образом, если Γ и Δ — деревья, то из $M(p_0, \Gamma) \overset{\forall}{\equiv} M(p_0, \Delta)$ следует $\Gamma' \simeq \Delta'$.

Поэтому предположим, что Γ — звезда, а Δ не дерево (рис. 2).

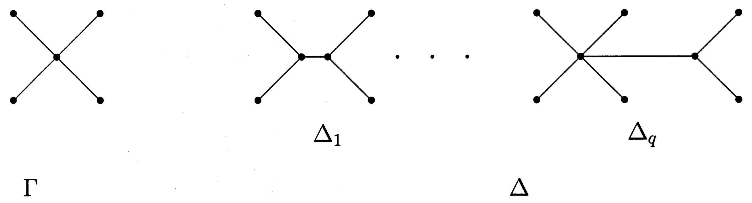

Рис. 2

Пусть Δ_i, $i = 1, \ldots, q$, — компоненты связности леса Δ, $q \geq 2$.

Предположим, что Δ_1 не звезда. Тогда в Δ_1 существует линейный подграф на четырех вершинах, например y_1, y_2, y_3, y_4, т. е. $[y_1, y_2] = [y_2, y_3] = [y_3, y_4] = 1$, $[y_i, y_j] \neq 1$, если $1 \leq i \neq j \leq 4$ и $|i - j| > 1$.

Из утверждения 5 об аннуляторах коммутаторов вершин графа следует, что в группе $M(p_0, \Delta)$ существует строго убывающая цепочка из трех централизаторов в коммутанте. Например,

$$\mathscr{C}([y_1, y_3]) \overset{[y_2, y_4]}{>} \mathscr{C}([y_1, y_3], y_2) \overset{[y_1, y_3]}{>} \mathscr{C}([y_1, y_3], y_2, y_1).$$

Легко понять, что строго убывающей цепочки централизаторов в коммутанте длины 3 в группе $M(p_0, \Gamma)$ не существует. Кроме того, коммутанты групп $M(p_0, \Gamma)$ и $M(p_0, \Delta)$ выделяются некоторой общей для этих групп $\exists$-формулой. Следовательно, группы $M(p_0, \Gamma)$ и $M(p_0, \Delta)$ не универсально эквивалентны.

Осталось разобрать случай, когда все Δ_i являются звездами (рис. 3).

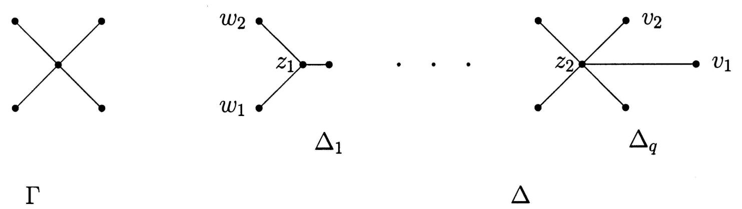

Рис. 3

На группе $M(p_0, \Delta)$ справедливо предложение

$$\exists z_1, z_2, v_1, v_2, w_1, w_2([z_1, z_2] \neq 1 \wedge [w_1, w_2, z_1] = 1 \\ \wedge [v_1, v_2, z_1] \neq 1 \wedge [w_1, w_2, z_2] \neq 1 \wedge [v_1, v_2, z_1] \neq 1). \quad (12)$$

Чтобы убедиться в истинности предложения (12) на группе $M(p_0, \Delta)$, надо взять в качестве $z_1, z_2, v_1, v_2, w_1, w_2$ элементы, указанные на рис. 3, и использовать утверждение 5.

Однако это предложение ложно на группе $M(p_0, \Gamma)$. Действительно, если в группе $M(p_0, \Gamma)$ элемент z_1 не перестановочен с элементом $[v_1, v_2]$, то z_1 не принадлежит коммутанту $M'(p_0, \Gamma)$. Аналогично $z_2 \notin M'(p_0, \Gamma)$. Но z_1 перестановочен с коммутатором $[w_1, w_2]$, который не равен 1. Значит, $z_1 = z^{l_1} c_1$, $c_1 \in M'(p_0, \Gamma)$, $l_1 \neq 0$. Аналогично $z_2 = z^{l_2} c_2$, $c_2 \in M'(p_0, \Gamma)$, $l_2 \neq 0$. Но тогда $[z_1, z_2] = 1$, так как z — центральный элемент группы $M(p_0, \Gamma)$. Это противоречит истинности предложения (12) на группе $M(p_0, \Gamma)$, а именно $[z_1, z_2] \neq 1$. Итак $q = 1$, т. е. Δ — звезда. Следовательно, $\Gamma' \simeq \Delta'$.

Случай 2. Γ и Δ не звезды.

Пусть $\{x_1, \ldots, x_{n_1}\} = V(\Gamma) \setminus V(\Gamma')$. Ясно, что $n_1 \geq 2$. Рассмотрим предложение

$$\exists g_1, \ldots, g_{n_1}, u_1, \ldots, u_{n_1}, v_1, \ldots, v_{n_1} \Bigg(\bigwedge_{i=1}^{n_1} [u_i, v_i, g_i] = 1 \\ \wedge \bigwedge_{1 \leq i \neq j \leq n_1} [u_i, v_i, g_j] \neq 1 \wedge \bigwedge_{\{(x_i, x_j) \in \Gamma, 1 \leq i < j \leq n_1\}} [g_i, g_j,] = 1 \Bigg). \quad (13)$$

Это предложение истинно на группе $M(p_0, \Gamma)$. В качестве g_i нужно взять вершины $x_i \in V(\Gamma) \setminus V(\Gamma')$, в качестве u_i и v_i — любые различные смежные с x_i вершины. Так как x_i — не висячая вершина, u_i и v_i найдутся.

Из следствия 7 получаем $[u_i, v_i, x_j] \neq 1$ при $i \neq j$. Значит, предложение (13) истинно на $M(p_0, \Gamma)$. Поэтому оно должно быть истинным на $M(p_0, \Delta)$. Пусть u_i, v_i, g_i — элементы из $M(p_0, \Delta)$, удовлетворяющие предложению (13). Из того, что $[u_i, v_i, g_i] = 1$ и $[u_i, v_i, g_j] \neq 1$ (так как $n_1 > 1$, такое неравенство обязательно есть в формуле (13)), а также из утверждений 3, 4 и 6 получаем, что

$$g_i = y_{i\pi}^{l_i} d_i, \quad l_i \neq 0,\ d_i \in M'(p_0, \Delta),\ y_{i\pi} \in V(\Delta) \setminus V(\Delta').$$

Поскольку $[g_i, g_j] = 1$, то $[y_{i\pi}, y_{j\pi}] = 1$ (лемма 11).

Таким образом, отображение $\pi : x_i \to y_{i\pi}$ задает гомоморфизм графов $\Gamma' \to \Delta'$. Существует также и обратный гомоморфизм $\Delta' \to \Gamma'$. Значит, $\Gamma' \simeq \Delta'$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гупта Ч. К., Тимошенко Е. И.* Частично коммутативные метабелевы группы: централизаторы и элементарная эквивалентность // Алгебра и логика. 2009. Т. 48, № 3. С. 309–341.
2. *Тимошенко Е. И.* Универсальная эквивалентность частично коммутативных метабелевых групп // Алгебра и логика. 2010. Т. 49, № 2. С. 263–290.
3. *Гупта Ч. К., Тимошенко Е. И.* Универсальные теории частично коммутативных метабелевых групп // Алгебра и логика. 2011. Т. 50, № 1. С. 3–25.

4. *Романовский Н. С.* О вложении Шмелькина для абстрактных и проконечных групп // Алгебра и логика. 1999. Т. 38, № 5. С. 598–612.

Статья поступила 11 апреля 2016 г.

Блощицын Виталий Яковлевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
`blosh@math.nsc.ru`

Тимошенко Евгений Иосифович
Новосибирский гос. технический университет,
кафедра алгебры и математической логики,
пр. К. Маркса, 20, Новосибирск 630092
`algebra@nstu.ru`