Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2017. Том 58, № 3

УДК 517.54

О КВАЗИКОНФОРМНОМ ПРОДОЛЖЕНИИ КВАЗИМЁБИУСОВЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ЖОРДАНОВЫХ ОБЛАСТЕЙ

В. В. Асеев

Аннотация. Изучается новый класс жордановых дуг (кривых) с ограниченным вращением, включающий в себя все дуги (кривые) с ограниченным искривлением. Доказано, что если граница жордановой области имеет ограниченное вращение всюду, кроме, быть может, одной особой точки, то любое квазимёбиусово вложение этой области продолжается до квазиконформного автоморфизма всей плоскости.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.301

Ключевые слова: квазиконформное отображение, квазисимметрическое отображение, квазимёбиусово отображение, кривая с ограниченным искривлением, кривая с ограниченным вращением, квазиконформное продолжение, критерий Рикмана.

1. Введение

Задача о квазиконформном продолжении на всю плоскость топологического вложения $f : M \to \overline{R}^2$, $M \subset \overline{R}^2$, впервые была поставлена и полностью решена в 1956 г. Альфорсом и Берлингом [1] для случая, когда M — прямая. В 1966 г. Рикман [2] доказал существование квазиконформного продолжения для случая, когда M — жорданова дуга с ограниченным искривлением, а в 1968 г. установил [3] наиболее общее (но трудно проверяемое) достаточное условие продолжения гомеоморфизма границ жордановых областей до квазиконформного отображения этих областей, которое, в частности, содержало требование квазимёбиусовости (в современной терминологии) граничного отображения. В ряде статей [4–9], посвященных проблеме квазиконформного продолжения с жордановых областей, исходный гомеоморфизм предполагался квазимёбиусовым (необходимое условие продолжения) и геометрические условия на границу области формулировались в терминах дуг ограниченного искривления. Информация о результатах, связанных с этой проблемой, имеется в обзоре [10, гл. 4]. В данной статье показано (теорема 3.2), что за существование квазиконформного продолжения отвечает не столько привычное свойство ограниченного искривления, сколько более слабое свойство ограниченного вращения, которое введено и изучено в разд. 2. Центральным (и наиболее трудоемким) пунктом доказательства основной теоремы является лемма 4.1, в которой изучаются некоторые топологические свойства кривой, имеющей ограниченное вращение всюду, за исключением, возможно, одной особой точки.

2. Дуги с ограниченным вращением

Пусть $\sigma(.,.)$ — хордовая метрика в $\overline{R}^2$. При любых $a, b \in \overline{R}^2$, $a \neq b$, формула

$$h_{(a,b)}(x,y) := \frac{\sigma(x,y)\sigma(a,b)}{\sigma(x,a)\sigma(y,b)+\sigma(y,a)\sigma(x,b)} \tag{2.1}$$

задает в $\overline{R}^2 \setminus \{a,b\}$ мёбиусово-инвариантную метрику (введенную в [11] в птолемеевых пространствах и названную *угловой метрикой*), т. е. $h_{(a,b)}(x,y) = h_{(\mu(a),\mu(b))}(\mu(x),\mu(y))$ при любом мёбиусовом автоморфизме $\mu : \overline{R}^2 \to \overline{R}^2$ для любых $a \neq b$ и $x, y \in \overline{R}^2 \setminus \{a,b\}$. Заметим, что если $a, b, x, y \in R^2$, то хордовое расстояние в (2.1) можно заменить евклидовым расстоянием. В частности, если мёбиусово преобразование $\mu : \overline{R}^2 \to \overline{R}^2$ переводит a, b (*полюсы*) соответственно в $0, \infty$, то

$$h_{(a,b)}(x,y) = h_{(0,\infty)}(\mu(x),\mu(y)) = \frac{|\mu(x)-\mu(y)|}{|\mu(x)|+|\mu(y)|}. \tag{2.2}$$

Отметим, что $h_{(a,b)}(x,y) \leq 1$ при всех $x, y \in \overline{R}^2 \setminus \{a,b\}$, где равенство $h_{(a,b)}(x,y)=1$ равносильно тому, что точки x, a, y, b лежат на одной окружности и пара a, b разбивает пару x, y. Элементарными вычислениями проверяется следующее

2.3. Утверждение. *При $0 < \varepsilon < 1$ открытый круг $B_{(0,\infty)}(1,\varepsilon) := \{z \in \mathbb{C} : h_{(0,\infty)}(1,z) < \varepsilon\}$ является жордановой областью, симметричной относительно вещественной оси и относительно единичной окружности и вписанной в угловой сектор $\{z = re^{i\varphi} : |\varphi| \leq 2\arcsin\varepsilon\}$.*

Из мёбиусовой инвариантности метрики (2.1) вытекает

2.4. Утверждение. *При любых $a, b \in \overline{R}^2$, $a \neq b$, и $x_0 \in \overline{R}^2 \setminus \{a,b\}$ открытый круг $B_{(a,b)}(x_0,r)$ с радиусом $r \in (0,1)$ является жордановой областью и не содержит континуумов, разделяющих сферу $\overline{R}^2$ между полюсами a и b.*

2.5. Утверждение. *Если $0 < \varepsilon < 1$, $p > 1$ и*

$$R > (1+2/\varepsilon)^{p/(p-1)}, \tag{2.5.1}$$

то при любых $c, d \in \overline{B}(0, R^{1/p})$ и $a, b \in \overline{R}^2 \setminus B(0,R)$ верны соотношения

$$h_{(a,b)}(c,d) = h_{(c,d)}(a,b) < \varepsilon, \tag{2.5.2}$$

$$\overline{B}(0,R^{1/p}) \subset B_{(a,b)}(c,\varepsilon), \tag{2.5.3}$$

$$\overline{R}^2 \setminus B(0,R) \subset B_{(c,d)}(a,\varepsilon). \tag{2.5.4}$$

Кроме того, для любых пар точек $c^*, d^* \in \overline{R}^2 \setminus B(0, R^{(p-1)/p})$ и $a^*, b^* \in \overline{B}(0,1)$ справедливы соотношения

$$h_{(a^*,b^*)}(c^*,d^*) = h_{(c^*,d^*)}(a^*,b^*) < \varepsilon, \tag{2.5.5}$$

$$\overline{R}^2 \setminus B(0,R^{(p-1)/p}) \subset B_{(a^*,b^*)}(c^*,\varepsilon), \tag{2.5.6}$$

$$\overline{B}(0,1) \subset B_{(c^*,d^*)}(a^*,\varepsilon). \tag{2.5.7}$$

Доказательство. Так как $|c-d| \le 2R^{1/p}$, $|d-b| \ge R - R^{1/p}$ и $|d-a| \ge R - R^{1/p}$, имеем

$$h_{(a,b)}(c,d) = h_{(c,d)}(a,b) = \frac{|a-b|\cdot|c-d|}{|a-c|\cdot|b-d| + |a-d|\cdot|b-c|}$$
$$\le \frac{2R^{1/p}}{R^{1/p}(R^{(p-1)/p})-1}\frac{|a-b|}{|a-c|+|c-b|} \le \frac{2}{R^{(p-1)/p}-1} < \varepsilon.$$

Включение (2.5.3) следует из того, что $h_{(a,b)}(c,z) < \varepsilon$ для всех $z \in \overline{B}(0,R^{1/p})$, а включение (2.5.4) — из того, что $h_{(c,d)}(a,z) < \varepsilon$ для всех $z \in \overline{R}^2 \setminus B(0,R)$.

Мёбиусово преобразование $\mu(z) = R/z$ переводит $\overline{R}^2 \setminus B(0, R^{(p-1)/p})$ в $\overline{B}(0, R^{1/p})$, $\overline{B}(0,1)$ в $\overline{R}^2 \setminus B(0,R)$ и точки a^*, b^*, c^*, d^* в точки a, b, c, d, удовлетворяющие условиям первой части этого утверждения. Используя мёбиусову инвариантность метрики (2.1), из (2.5.2)–(2.5.4) получаем требуемые соотношения (2.5.5)–(2.5.7). Утверждение доказано.

Пути $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to M \subset \overline{R}^2$ с одинаковыми концами $a = \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$, $b = \gamma_1(1) = \gamma_2(1)$ *гомотопны* в M, если существует непрерывное отображение (*гомотопия*) $F : [0,1]\times[0,1] \to M$ такое, что $F(0,s) \equiv a$, $F(1,s) \equiv b$, $F(t,0) \equiv \gamma_1(t)$, $F(t,1) \equiv \gamma_2(t)$. Для жордановых дуг γ_1 и γ_2 в этой ситуации говорим, что γ_1 *стягивается* к γ_2 по множеству M.

Отметим некоторые топологические свойства жордановых областей.

2.6.1. *Если $D \subset \overline{R}^2$ — жорданова область, то любые два пути $\gamma_1, \gamma_2 \subset \overline{D}$ с одинаковыми концами $a, b \in \overline{D}$ гомотопны друг другу в $\overline{D}$.*

2.6.2. *Пусть $D \subset \overline{R}^2$ — жорданова область, $c, d \in D$ и жорданова дуга γ с концами $a, b \in \partial D$ лежит в $(D\setminus\{c,d\})\cup\{a,b\}$. Если дуга γ гомотопна в $\overline{R}^2\setminus\{c,d\}$ некоторому пути $\tau \subset \overline{R}^2 \setminus D$ с теми же концами a, b, то (сечение) γ не разделяет в D точки c и d (т. е. эти точки лежат в одной компоненте множества $D \setminus \gamma$).*

2.6.3 (см. [12, теорема 1]). *Пусть на границе ∂D жордановой области $D \subset \overline{R}^2$ четыре попарно различные точки a, b, c, d таковы, что пара a, b разделяет на жордановой кривой ∂D пару точек c, d. Тогда любое сечение $\gamma \subset D$ с концами a, b пересекается в D с любым сечением $\tau \subset D$ с концами c, d.*

2.7. Определение Для жордановой дуги $\gamma \subset \overline{R}^2$ с различными концами $a \ne b$ соотношение $\mathrm{rot}(\gamma) < 1/\varepsilon$ $(0 < \varepsilon < 1)$ будет означать, что для любых $x, y \in \gamma \setminus \{a,b\}$, у которых $h_{(a,b)}(x,y) < \varepsilon$, поддуга $\gamma[x,y] \subset \gamma$ гомотопна в $\overline{R}^2 \setminus \{a,b\}$ некоторой жордановой дуге $\tau \subset B_{(a,b)}(x,\varepsilon)$ с теми же концами x, y. Открытая жорданова дуга (или жорданова кривая) $\Gamma \subset \overline{R}^2$ имеет *ограниченное вращение* $\mathrm{Rot}(\Gamma) < 1/\varepsilon$, если $\mathrm{rot}(\gamma) < 1/\varepsilon$ для любой поддуги $\gamma \subset \Gamma$ с различными концами в Γ.

Напомним (см. [10, 3.1.6, с. 393]), что жорданова дуга (или жорданова кривая) $\Gamma \subset \overline{R}^2$ имеет *ограниченное искривление* (по Рикману) $RT[\Gamma] \le C$, если для любой четверки попарно различных точек x_1, x_2, x_3, x_4, расположенных на Γ последовательно в порядке их нумерации, выполняется оценка

$$\frac{1}{h_{(x_1,x_3)}(x_2,x_4)} = \frac{\sigma(x_1,x_2)\sigma(x_3,x_4) + \sigma(x_1,x_4)\sigma(x_2,x_3)}{\sigma(x_1,x_3)\sigma(x_2,x_4)} \le C. \tag{2.7.1}$$

В [2, теорема 1] доказано, что жорданова дуга (или жорданова кривая) $\Gamma \subset \overline{R}^2$ имеет ограниченное искривление $RT[\Gamma] \leq C$ в смысле Рикмана тогда и только тогда, когда она является образом прямолинейного отрезка (соответственно единичной окружности) при K-квазиконформном автоморфизме римановой сферы $\overline{R}^2$. При этом K и C имеют взаимные верхние оценки, не зависящие от Γ.

2.8. Утверждение. *Любая жорданова дуга* (*или жорданова кривая*) $\Gamma \subset \overline{R}^2$ *с ограниченным искривлением* $RT[\Gamma] \leq C$ *в смысле Рикмана имеет ограниченное вращение* $\mathrm{Rot}(\Gamma) < 2C(1+C)$.

Доказательство. Пусть $\gamma = \gamma[a,b]$ — произвольно заданная поддуга в Γ с различными концами $a, b \in \Gamma$ и $x, y \in \gamma \setminus \{a,b\}$. Переобозначив при необходимости концы γ, можно считать, что четыре точки a, x, y, b расположены последовательно на Γ. В силу мёбиусовой инвариантности величины $\mathrm{rot}(\gamma)$ без нарушения общности можно считать, что $a = 0$, $b = \infty$, $y = 1$ и $h_{(0,\infty)}(1,x) = \varepsilon < 1/(2C(1+C))$. Для произвольного $z \in \gamma(x,1)$ применение условия $RT[\Gamma] \leq C$ к четверкам точек $x, z, 1, \infty$ и $0, x, 1, \infty$ дает соответственно неравенства $(|x - z| + |1-z|)/|x-1| \leq C$ и $|x| + |1-x| \leq C$, т. е. $|z-1| < C|x-1|$ и $|x| < C$. Следовательно,

$$h_{(0,\infty)}(z,1) = \frac{|z-1|}{1+|z|} < C\frac{|x-1|}{1+|x|} \cdot (1+|x|) < C(1+C)h_{(0,\infty)}(x,1)$$
$$< 2C(1+C)h_{(0,\infty)}(x,1) \leq 1/2.$$

Значит, жорданова дуга $\gamma[x,1]$ лежит в круге $B_{(0,\infty)}(1,1/2)$ — односвязной области, не содержащей точек 0 и ∞ (см. утверждение 2.4). Так как точки 1 и x можно соединить жордановой дугой

$$\tau[x,1] \subset B_{(0,\infty)}(1, 1/(2C(1+C))) \subset B_{(0,\infty)}(1,1/2),$$

то $\gamma[x,1]$ гомотопна $\tau[x,1]$ в области $B_{(0,\infty)}(1,1/2)$, не содержащей точек $0, \infty$. Таким образом, любая поддуга $\gamma \subset \Gamma$ удовлетворяет условию $\mathrm{rot}(\gamma) < 2C(1+C)$, т. е. $\mathrm{Rot}(\Gamma) < 2C(1+C)$. Утверждение доказано.

Заметим, что жорданова дуга $\Gamma = \{(x,y) \in R^2 : |y| = x^2, 0 \leq x \leq 1\}$ имеет ограниченное вращение, но не является дугой с ограниченным искривлением. Это показывает, что класс жордановых дуг (кривых) с ограниченным вращением существенно шире класса жордановых дуг (кривых) с ограниченным искривлением.

3. Квазиконформность и квазимёбиусовость

Более детальное изложение приведенной ниже информации с указанием первоисточников см. в обзорной статье [10].

3.1. Определение (см. [10, 1.3.1]). *Функцией* (или *оценкой*) *искажения* называем любой гомеоморфизм $\omega : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$, удовлетворяющий условию $\omega(t) \geq t$. Гомеоморфное отображение $f : \mathscr{M} \to \mathscr{M}'$ метрических пространств называется *ω-квазимёбиусовым* с функцией искажения ω, если для любой четверки x_1, x_2, x_3, x_4 попарно различных точек в $\mathscr{M}$ справедлива оценка

$$\frac{|f(x_1)-f(x_2)|_{\mathscr{M}'}|f(x_3)-f(x_4)|_{\mathscr{M}'}}{|f(x_1)-f(x_3)|_{\mathscr{M}'}|f(x_2)-f(x_4)|_{\mathscr{M}'}} \leq \omega\left(\frac{|x_1-x_2|_{\mathscr{M}}|x_3-x_4|_{\mathscr{M}}}{|x_1-x_3|_{\mathscr{M}}|x_2-x_4|_{\mathscr{M}}}\right). \qquad (3.1.1)$$

Основные свойства квазимёбиусовых отображений см. в [10]. В частности [10, 1.3.5], любое K-квазиконформное отображение $f : \overline{R}^n \to \overline{R}^n$ (геометрическое определение квазиконформности через емкости конденсаторов) является ω-квазимёбиусовым с функцией искажения $\omega(t) = \eta_{n,K}$, детально изученной Вуориненом (см. [10, (11), 1.2.5]). Любое ω-квазимёбиусово отображение $f : D \to D'$ областей в $\overline{R}^n$ является K-квазиконформным с $K \le [\omega(1)]^{n-1}$. Однако не всякое квазиконформное отображение собственной подобласти $D \subset \overline{R}^n$ будет квазимёбиусовым (см. [10, 4.1]).

Необходимым (но не достаточным [10, 4.1]) условием продолжимости квазиконформного отображения $f : D \to D'$ с области $D \subset \overline{R}^n$ до квазиконформного автоморфизма пространства $\overline{R}^n$ является квазимёбиусовость f. Так как ω-квазимёбиусово вложение $f : D \to \overline{R}^n$ области $D \subset \overline{R}^n$ всегда продолжается до ω-квазимёбиусова вложения $f : \overline{D} \to \overline{R}^n$ [10, с. 380], задача о квазиконформном продолжении рассматривается в следующей формулировке: указать геометрические свойства области $D \subset \overline{R}^n$, достаточные для того, чтобы любое ω-квазимебиусово вложение $f : \overline{D} \to \overline{R}^n$ продолжалось до K-квазиконформного автоморфизма пространства $\overline{R}^n$ с верхней оценкой для K, зависящей только от ω и геометрических характеристик области D.

Ограничившись рассмотрением жордановых областей в $\overline{R}^2$, докажем следующую теорему.

3.2. Теорема (основной результат). *Пусть $0 < \varepsilon < 1$ и D — жорданова область в $\overline{R}^2$. Если при некотором $\xi_0 \in \partial D$ открытая жорданова дуга $\partial D \setminus \{\xi_0\}$ имеет ограниченное вращение $\mathrm{Rot}(\partial D \setminus \{\xi_0\}) < 1/\varepsilon$, то любое ω-квазимёбиусово вложение $f : D \to \overline{R}^2$ продолжается до K-квазиконформного автоморфизма $F : \overline{R}^2 \to \overline{R}^2$ с верхней оценкой для K, зависящей лишь от ω и ε.*

4. Геометрические свойства кривой с ограниченным вращением

В этом разделе изучим прохождение кривой с ограниченным вращением через толстое круговое кольцо.

Пусть жорданова кривая $\Gamma \subset \overline{R}^2$ пересекается с каждой компонентой дополнения к круговому кольцу $\Omega = \{1 < |z| < R\}$. Семейство $\mathscr{N}$ всех компонент пресечения $\Gamma \cap \Omega$, соединяющих граничные окружности кольца Ω, конечно (иначе в Γ имелся бы континуум сходимости, что противоречит локальной связности жордановой кривой Γ). Заданное направление на кривой Γ индуцирует на каждой дуге $\gamma \in \mathscr{N}$ либо направление $\downarrow$ от внешней окружности к внутренней, либо направление $\uparrow$ от внутренней окружности к внешней. Занумеровав дуги из семейства $\mathscr{N}$ в порядке их следования на кривой Γ, получим циклическую последовательность

$$\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_m, \beta_m, \tag{4}$$

состоящую из дуг α_j с направлением $\downarrow$ и дуг β_j с направлением $\uparrow$ (цикличность здесь означает, что $\alpha_{m+1} := \alpha_0$, $\beta_{m+1} := \beta_0$). Концы дуг α_j, β_j на окружности $\{z : |z| = r \in \{1, R\}\}$ обозначим соответственно через $\alpha_j(r)$ и $\beta_j(r)$.

Из способа построения и порядка нумерации дуг α_j, β_j следует

4.0. Утверждение. *При $m \ne 0$ в множестве $\{\alpha_j(1), \beta_j(1) : j = 0, \dots, m\}$ на окружности $\{|z| = 1\}$ точки с разными индексами различны; в множестве $\{\alpha_j(R), \beta_j(R) : j = 0, \dots, m\}$ на окружности $\{|z| = R\}$ равенство $\alpha_j(R) = \beta_k(R)$*

возможно лишь при $k = j - 1 (\mathrm{mod}\, m)$, *а равенства* $\alpha_i(R) = \alpha_k(R)$ *или* $\beta_j(R) = \beta_k(R)$ *при* $j \neq k$ *невозможны.*

Циклически упорядоченный набор точек $z_0, z_1, \dots, z_m$ на окружности $\{|z| = r\}$ назовем *правильным*, если имеется представление $z_j = re^{i\varphi_j}$ $(j = 0, \dots, m)$, в котором либо $\varphi_0 \leq \varphi_1 \leq \dots \leq \varphi_m \leq \varphi_0 + 2\pi$, либо $\varphi_0 \geq \varphi_1 \geq \dots \geq \varphi_m \geq \varphi_0 - 2\pi$. В этой же ситуации говорим, что точки $z_0, z_1, \dots, z_m$ на окружности *расположены последовательно* (в порядке их записи).

4.1. Лемма. *Пусть* $0 < \varepsilon < 1$ *и точка* ξ_0 *на жордановой кривой* $\Gamma \subset \overline{R}^2$ *такова, что* $\mathrm{rot}(\gamma) < 1/\varepsilon$ *для любой компактной дуги* $\gamma \subset \Gamma \setminus \{\xi_o\}$. *Пусть*

$$R > (1 + 2/\varepsilon)^3 \tag{4.1.1}$$

и семейство $\mathscr{N}$ *всех дуг в* $\Gamma \cap \Omega$, *соединяющих граничные окружности кольца* $\Omega = \{z : 1 < |z| < R\}$, *непусто. Тогда*

(i) *для любой пары* γ_1, γ_2 *соседних элементов циклически упорядоченной последовательности* (4) *все дуги семейства* $\mathscr{N} \setminus \{\gamma_1, \gamma_2\}$ *содержатся в одной компоненте множества* $\Omega \setminus (\gamma_1 \cup \gamma_2)$, *а дуги* γ_1, γ_2 *служат боковыми сторонами криволинейного сектора* $\Omega(\gamma_1, \gamma_2)$ — *компоненты множества* $\Omega \setminus (\gamma_1 \cup \gamma_2)$, *не содержащей дуг из семейства* $\mathscr{N} \setminus \{\gamma_1, \gamma_2\}$;

(ii) *для каждого* $r \in \{1, R\}$ *циклически упорядоченный набор точек*

$$\alpha_0(r), \beta_0(r), \dots, \alpha_j(r), \beta_j(r), \dots, \alpha_m(r), \beta_m(r)$$

расположен правильно на окружности $\{|z| = r\}$.

Доказательство. Докажем утверждение (i). Так как при $m = 0$ утверждение (i) тривиально верно, будем считать, что $m \geq 1$.

Мёбиусово преобразование $\mu(z) = R/z$ сохраняет кольцо Ω, переводит Γ в жорданову кривую Γ^*, для которой $\mathrm{Rot}(\Gamma^* \setminus \{\mu(\xi_0)\}) < 1/\varepsilon$, и переводит циклически упорядоченное семейство дуг $\mathscr{N} = \{\alpha_0, \beta_0, \dots, \alpha_m, \beta_m\}$ в циклически упорядоченное семейство дуг $\mathscr{N}^* = \{\alpha_0^*, \beta_0^*, \dots, \alpha_m^*, \beta_m^*\}$, где $\alpha_j^* = \mu(\beta_{j-1})$, $\beta_j^* = \mu(\alpha_j)$ при всех $j = 0, \dots, m$.

Допустим, что утверждение (i) доказано для любой пары дуг β_{j-1}, α_j. Тогда, применив его к жордановой дуге $\Gamma^* = \mu(\Gamma)$, получим его выполнение для любой пары дуг $\beta_j^*, \alpha_{j+1}^*$ в семействе $\mathscr{N}^*$ и, значит, его справедливость для любой пары дуг $\alpha_j = \mu^{-1}(\beta_j^*)$, $\beta_j = \mu^{-1}(\alpha_{j+1}^*)$ в семействе $\mathscr{N}$.

Таким образом, достаточно доказать утверждение (i) для пар дуг $\gamma_1 = \beta_{j-1}, \gamma_2 = \alpha_j$, причем ввиду циклической упорядоченности последовательности (4) достаточно рассмотреть случай $\gamma_1 = \beta_m$, $\gamma_2 = \alpha_0$.

Если $\alpha_0(R) = \beta_m(R)$, то сечение $\Gamma(\beta_m, \alpha_0)$ внешнего круга $B^*(1)$ разрезает его на две компоненты, одна из которых содержится в кольце Ω и потому не может содержать ни одной дуги из семейства $\mathscr{N} \setminus \{\alpha_0, \beta_m\}$, т. е. в этом случае утверждение (i) для пары дуг β_m, α_0 тривиально верно. Поэтому в дальнейшем можно считать, что $\alpha_0(R) \neq \beta_m(R)$ и $\alpha_0(1) \neq \beta_m(1)$ (см. утверждение 4.0).

Пусть $m = 1$. Так как компактные дуги $\Gamma(\beta_1, \alpha_0) \setminus (\beta_1 \cup \alpha_0)$ и $\Gamma(\beta_0, \alpha_1) \setminus (\beta_0 \cup \alpha_1)$ не пересекаются с окружностью $\{|z| = 1\}$, при выборе достаточно малого $\delta > 0$ они не пересекаются и с замкнутым кругом $\overline{B}(0, 1 + \delta)$. В каждой из четырех дуг $\gamma \in \{\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1\}$ имеется единственная поддуга $\gamma' \subset \gamma \cap \{1 + \delta < |z| < R\}$, у которой один конец $\gamma'(R) = \gamma(R)$ лежит на окружности $\{|z| = R\}$, а другой конец $\gamma'(1 + \delta)$ — на окружности $\{|z| = 1 + \delta\}$. Жордановы дуги $\Gamma(\beta_1', \alpha_0')$ и $\Gamma(\beta_0', \alpha_1')$ являются двумя непересекающимися сечениями внешнего круга $B^*(1+\delta)$, причем их концы $\beta_1'(1+\delta)$, $\alpha_0'(1+\delta)$, $\beta_0'(1+\delta)$, $\alpha_1'(1+\delta)$ — попарно различные точки на окружности $\{|z| = 1+\delta\}$. В силу утверждения 2.6.3 для жордановой области $B^*(1+\delta)$ и этих четырех точек на ее границе пара точек $\alpha_0'(1+\delta) \in \alpha_0$, $\beta_1'(1+\delta) \in \beta_1$ не разделяет на окружности $\{|z| = 1+\delta\}$ пару точек $\beta_0'(1+\delta) \in \beta_0$ и $\alpha_1'(1+\delta) \in \alpha_1$. Значит, попарно не пересекающиеся дуги α_0', β_0', α_1' и β_1' таковы, что пара α_0', β_1' не разделяет в кольце $\{1+\delta < |z| < R\}$ пару дуг β_0', α_1'. Следовательно, их концы — попарно различные точки $\alpha_0(R) = \alpha_0'(R)$, $\beta_0(R) = \beta_0'(R)$, $\alpha_1(R) = \alpha_1'(R)$, $\beta_1(R) = \beta_1'(R)$ — таковы, что пара $\alpha_0(R)$, $\beta_1(R)$ не разделяет на окружности $\{|z| = R\}$ точки $\beta_0(R)$, $\alpha_1(R)$. Значит, пара дуг α_0, β_1 не разделяет в кольце Ω дуги β_0, α_1, т. е. дуги β_0, α_1 лежат в одной компоненте множества $\Omega \setminus (\alpha_0 \cup \beta_1)$. Таким образом, в случае $m = 1$ утверждение (i) доказано. Поэтому далее считаем, что $m \geq 2$.

Пусть $\mathscr{M}$ — семейство всех сечений $\Gamma(\alpha_j, \beta_j)$ круга $B(R)$, у которых $0 < j < m$ и пара дуг α_0, β_m разделяет в кольце Ω дуги α_j, β_j. Для завершения доказательства леммы достаточно установить, что $\mathscr{M} = \varnothing$.

Допустим (от противного), что $\mathscr{M} \neq \varnothing$, и отметим индексы $k = \min\{j : \Gamma(\alpha_j, \beta_j) \in \mathscr{M}\}$, $l = \max\{j : \Gamma(\alpha_j, \beta_j) \in \mathscr{M}\}$.

Введем обозначения: Ω_+ и Ω_- — компоненты множества $\Omega \setminus (\alpha_0 \cup \beta_m)$, причем $\alpha_k \subset \Omega_+$, $\beta_k \subset \Omega_-$; B_+ и B_- — компоненты множества $B(R) \setminus \Gamma(\alpha_k, \beta_k)$, причем $\alpha_0 \subset B_+$ и $\beta_m \subset B_-$. Включение $\beta_0 \subset \Omega_-$ означает, что дуга $\Gamma(\beta_0(R), \alpha_k(R))$, не пересекающаяся с $\Gamma(\beta_m, \alpha_0)$, содержит некоторую поддугу $\Gamma(\alpha_j, \beta_j) \in \mathscr{M}$ с индексом $j < k$, что противоречит выбору индекса k. Следовательно, $\beta_0 \subset \Omega_+ \cap B_+$.

Если $\alpha_m \subset \Omega_- \cap B_-$, то положим $\alpha_h := \alpha_m$.

Рассмотрим случай $\alpha_m \subset \Omega_+ \cap B_-$. В этом случае дуга $\Gamma(\beta_k(R), \alpha_m(R))$, не пересекающаяся с сечением $\Gamma(\beta_m, \alpha_0)$ внешнего круга $B^*(1)$, должна содержать поддугу $\Gamma(\alpha_j, \beta_j) \in \mathscr{M}$. Это означает, что $k < l$. Если допустить, что $\beta_l \subset \Omega_-$, то дуга $\Gamma(\beta_l(R), \alpha_m(R))$, не пересекающаяся с сечением $\Gamma(\beta_m, \alpha_0)$ внешнего круга $B^*(R)$, должна содержать поддугу $\Gamma(\alpha_j, \beta_j) \in \mathscr{M}$ с индексом $j > l$, что противоречит выбору индекса l. Таким образом, в рассматриваемом случае имеем включения $\beta_l \subset \Omega_+$, $\alpha_l \subset \Omega_-$. Докажем, что в этом случае $\alpha_l \subset B_-$.

Обозначим через D_+ и D_- компоненты множества $B^*(1) \setminus \Gamma(\beta_m, \alpha_0)$, причем $\alpha_k \subset D_+$, $\beta_k \subset D_0$. Пусть W обозначает компоненту множества $D_- \cap \Omega_-$, содержащую β_k. Так как любая компонента пересечения двух жордановых областей является жордановой областью (см. [13, теорема Керекьярто, с. 172]), ∂W — жорданова кривая и точки $\alpha_0(R)$, $\beta_m(R)$ разрезают ее на две жордановы дуги; ту из них, которая содержит точку $\beta_k(R)$, обозначим через λ и будем рассматривать как границу Каратеодори области $\overline{R}^2 \setminus \lambda$, состоящую из двух дуг λ_0 и λ_1, причем λ_0 — часть границы Каратеодори области W. (По отношению к области W дуга λ_0 — внутренний, а λ_1 — внешний берега разреза λ.)

Убедимся, что $\Gamma(\beta_0, \alpha_k) \cap \lambda = \varnothing$. Допустив противное, отметим точку $p \in \lambda \cap \Gamma(\beta_0, \alpha_k)$ такую, что поддуга $\Gamma(p, \alpha_k)$ не пересекается с λ. Так как $\Gamma(\beta_0, \alpha_k) \cap \Gamma(\beta_m, \alpha_0) = \varnothing$, то $p \in \lambda \setminus \Gamma(\beta_m, \alpha_0)$, т. е. $p \in \{|z| = 1\} \cap D_-$. Дуга $\Gamma(p, \alpha_k)$ подходит к точке p либо из круга $B(R)$, либо из внешнего круга $B^*(R)$. В первом случае дуга $\Gamma(p, \alpha_k)$ должна содержать хотя бы одну поддугу $\Gamma(\alpha_j, \beta_j) \in \mathscr{M}$ с индексом $0 < j < k$, что противоречит выбору индекса k. Значит, $\Gamma(p, \alpha_k)$ подходит к точке p из внешнего круга $B^*(R)$ (т. е. $p \in \lambda_1$).

Тогда дуга $\Gamma(p, \alpha_k)$ содержит поддугу $\Gamma(p, q) \subset B^*(1)$ с концом $q \in \{|z| = 1\}$. Поскольку $\Gamma(p, q)$ не пересекается с $\Gamma(\beta_m, \alpha_0)$, то $\Gamma(p, q) \subset D_-$ и, следовательно,

$q \in \partial D_- \cap \{|z| = 1\} = \partial W \cap \{|z| = 1\}$. Но это невозможно, так как $\Gamma(p, q) \cap W = \varnothing$. Таким образом, установлено, что $\Gamma(\beta_0, \alpha_k)$ не пересекается с λ и, следовательно, жорданова дуга $\Gamma(\alpha_0, \beta_m)$ является сечением односвязной области $\overline{R}^2 \setminus \lambda$ с концами $\alpha_0(R)$ и $\beta_k(R) \in \lambda_0$.

Аналогичным образом устанавливается, что жорданова дуга $\Gamma(\alpha_l, \beta_m)$ является сечением области $\overline{R}^2 \setminus \lambda$ с концами $\alpha_l(R) \in \lambda_0$ и $\beta_m(R)$. В силу того, что сечения $\Gamma(\alpha_l, \beta_m)$ и $\Gamma(\alpha_0, \beta_k)$ не пересекаются, на дуге λ пара точек $\alpha_0(R)$, $\beta_k(R) \in \lambda_0$, не разбивает пару точек $\alpha_l(R) \in \lambda_0$, $\beta_m(R)$. Поскольку $\lambda_0 \subset \partial W$, в области W можно построить непересекающиеся сечения: $s_1 \subset W$ с концами $\alpha_0(R)$, $\beta_k(R)$ и $s_2 \subset W$ с концами $\alpha_l(R)$, $\beta_m(R)$. Так как $W \subset \Omega_-$, то s_1, s_2 — непересекающиеся сечения в круге $B(R)$ и это означает, что пара точек $\alpha_0(R)$, $\beta_m(R)$ не разбивают на окружности $\{|z| = R\}$ пару $\alpha_l(R)$, $\beta_m(R)$. Следовательно, дуги α_0, β_k не разбивают в Ω_- пару дуг α_l, β_m, и это означает, что $\alpha_l \subset \Omega_- \cap B_-$. Положим $\alpha_h := \alpha_l$.

Таким образом, независимо от расположения дуги α_m построили дугу $\alpha_h \in B_- \cap \Omega_-$ с индексом $k < h \leq m$.

Отметим точки $c^* \in \beta_0 \cap \{|z| = R^{1/3}\}$ и $d^* \in \alpha_h \cap \{|z| = R^{1/3}\}$ такие, что обе поддуги $\beta_0(\beta_0(1)), c^*) \subset \beta_0$ и $\alpha_h(d^*, \alpha_h(1)) \subset \alpha_h$ лежат в круге $B(0, R^{1/3})$. Рассмотрим дугу $\Gamma' := \Gamma(c^*, d^*)$, содержащую поддугу $\Gamma(\beta_m, \alpha_0)$ с концами $a^* := \alpha_0(1)$ и $b^* := \beta_m(1)$.

Допустим, что $\xi_0 \notin \Gamma'$ и, следовательно, $\mathrm{rot}(\Gamma') < 1/\varepsilon$. При $p = 3/2$ выполнено в силу (4.1.1) условие (2.5.1) утверждения 2.5. Поэтому ввиду (2.5.5) $h_{(c^*,d^*)}(a^*, b^*) < \varepsilon$. Значит, дуга $\Gamma(\beta_m, \alpha_0)$ должна стягиваться в $\overline{R}^2 \setminus \{c^*, d^*\}$ к некоторой дуге $\tau' \subset B_{(c^*,d^*)}(a^*, \varepsilon)$ с теми же концами, которая стягивается в односвязной (см. утверждение 2.4) области $B_{(c^*,d^*)} \subset \overline{R}^2 \setminus \{c^*, d^*\}$, содержащей круг $\overline{B}(0, 1)$ (см. включение (2.5.7)), к прямолинейному отрезку $\tau \subset \overline{B}(0, 1)$ с концами a^*, b^*. Стало быть, жорданова кривая $\tau \cup \Gamma(\beta_m, \alpha_0)$ должна стягиваться в точку в $\overline{R}^2 \setminus \{c^*, d^*\}$, а это невозможно, ибо эта кривая разделяет в $\overline{R}^2$ точки c^* и d^*. Полученное противоречие показывает, что $\xi_0 \in \Gamma'$.

Отметим точки $c \in \beta_0 \cap \{|z| = R^{2/3}\}$ и $d \in \alpha_h \cap \{|z| = R^{2/3}\}$ такие, что обе поддуги $\beta_0(c, \beta_0(R)) \subset \beta_0$ и $\alpha_h(\alpha_h(R), d) \subset \alpha_h$ лежат вне круга $\overline{B}(0, R^{2/3})$. Рассмотрим дугу $\Gamma'' := \Gamma(c, d)$, содержащую поддугу $\Gamma(\alpha_k, \beta_k)$ с концами $a := \alpha_k(R)$, $b := \beta_k(R)$.

Так как $\Gamma'' \cap \Gamma' = \varnothing$ и $\xi_0 \in \Gamma'$, то $\mathrm{rot}(\Gamma'') < 1/\varepsilon$. При $p = 3/2$ выполнены условия утверждения 2.5, поэтому (см. (2.5.2)) $h_{(c,d)}(a, b) < \varepsilon$. Значит, дуга $\Gamma(\alpha_k, \beta_k)$ гомотопна в $\overline{R}^2 \setminus \{c, d\}$ некоторой дуге $\tau' \subset B_{(c,d)}(a, \varepsilon)$ с концами $\alpha_k(R)$, $\beta_k(R)$, которая, в свою очередь, стягивается в односвязной области $B_{(c,d)}(a, \varepsilon)$, содержащей внешний круг $\overline{R}^2 \setminus B(0, R)$ (см. включение (2.5.4)), к некоторому сечению τ области $B^*(R)$ с концами в точках a и b. Это означает, что жорданова кривая $\tau \cup \Gamma(\alpha_k, \beta_k)$ стягивается в точку по $\overline{R}^2 \setminus \{(c, d)\}$. Но это невозможно, ибо она разделяет в $\overline{R}^2$ точки $c \in B_+$ и $d \in B_-$.

Полученное противоречие означает, что семейство сечений $\mathscr{M}$ пусто, и это завершает доказательство утверждения (i) в лемме 4.1.

Утверждение (ii) непосредственно вытекает из того, что в силу утверждения (i) набор дуг (4) разрезает кольцо Ω на попарно не пересекающиеся криволинейные секторы

$$\Omega(\alpha_0, \beta_0), \Omega(\beta_0, \alpha_1), \dots, \Omega(\alpha_j, \beta_j), \Omega(\beta_j, \alpha_{j+1}), \dots, \Omega(\alpha_m, \beta_m), \Omega(\beta_m, \alpha_0).$$

Лемма доказана.

4.2. Лемма. *Пусть в условиях и обозначениях леммы* 4.1 *при* $m > 0$ *жорданова кривая* Γ *разрезает* $\overline{R}^2$ *на две области* D_1 *и* D_2. *Пусть точки* a *и* b *в круге* $\{|z| \leq 1\}$ *лежат в разных компонентах множества* $\Gamma \cap B(R)$. *Тогда эквивалентны следующие утверждения:*

(a) *точки* a *и* b *можно соединить путем по множеству* $D_1 \cap B(R)$*;*

(b) *точки* a *и* b *нельзя соединить путем по множеству* $D_2 \cap B(R)$.

Доказательство. Так как $\bigcup\limits_{k=0}^{m} \Gamma(\beta_k, \alpha_{k+1}) \subset B^*(1)$, то $a, b \in \bigcup\limits_{k=0}^{m} \Gamma(\alpha_k, \beta_k)$ и, следовательно, $a \in \Gamma(\alpha_{j0}, \beta_{j0})$, $b \in \Gamma(\alpha_{j1}, \beta_{j1})$, причем $j0 \neq j1$.

В силу леммы 4.1 и условия $m > 0$ одна и только одна из компонент множества $B(R) \backslash \Gamma(\alpha_j, \beta_j)$ (обозначим ее через B_j) не содержит дуг $\Gamma(\alpha_k, \beta_k)$. Области B_j попарно не пересекаются, и $T = B(R) \setminus \bigcup\limits_{j=0}^{m} B_j$ — жорданова область с границей, содержащей $\bigcup\limits_{j=0}^{m} \Gamma(\alpha_j, \beta_j)$.

Убедимся, что (a) влечет (b). Пусть $\tau \subset D_1 \cap B(R)$ — путь с концами a, b и Ψ — компонента множества $D_1 \cap B(R)$, содержащая τ. Так как $a, b \in \partial\Psi$, то $\Gamma(\alpha_{j0}, \beta_{j0}) \cup \Gamma(\alpha_{j1}, \beta_{j1}) \subset \partial\Psi$. Любой путь в D_2 с концами в точках a, b соединяет внутренние точки непересекающихся областей B_{j0}, B_{j1} и, следовательно, не может содержаться в круге $B(R)$. Значит, точки a и b нельзя соединить путем по множеству $D_2 \cap B(R)$.

Для $i \in \{1, 2\}$ обозначим через U_i компоненту множества $D_i \cap B(R)$, у которой $\Gamma(\alpha_{j0}, \beta_{j0}) \subset \partial U_j$. Допустим, что $U_i \subset T$, но $b \notin \partial U_i$. Тогда найдется дуга $\gamma \subset \partial U_i \cap B(R)$, отделяющая в $B(R)$ дугу $\Gamma(\alpha_{j0}, \beta_{j0})$ от точки b и, следовательно, от дуги $\Gamma(\alpha_{j1}, \beta_{j1})$. Так как γ разрезает круг $B(R)$ между точками $a, b \in \overline{B}(0, 1)$, то $\gamma \cap B(1) \neq \varnothing$ и, следовательно, $\gamma \in \mathscr{N}$. Значит, нашлось сечение $\gamma = \Gamma(\alpha_k, \beta_j)$, разделяющее в $B(R)$ сечения $\Gamma(\alpha_{j0}, \beta_{j0})$ и $\Gamma(\alpha_{j1}, \beta_{j1})$. Но это противоречит лемме 4.1. Таким образом, если $U_i \subset T$, то $b \in \partial U_i$ и точки $a, b \in \partial U_i$ можно соединить путем по области $U_i \subset D_i \cap B(R)$.

Пусть выполняется (b), т. е. a и b нельзя соединить путем по множеству $D_2 \cap B(R)$. Тогда U_2 не может лежать в T, т. е. $U_2 \subset B_{j0}$. Следовательно, $U_1 \subset T$, и это означает, что точки a, b можно соединить путем по множеству $D_1 \cap B(R)$, т. е. выполняется (a). Таким образом, из (b) следует (a).

Лемма доказана.

5. Доказательство основной теоремы

Введем обозначения: $D' = f(D)$, $\Gamma = \partial D$, $\Gamma' = f(\Gamma)$, $CD = \overline{R}^2 \setminus (D \cup \Gamma)$, $CD' = \overline{R}^2 \setminus (D' \cup \Gamma')$. Положим

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{1}{\omega^{-1}(1/\omega(2(1 + 2/\varepsilon)^3))} \tag{5.1}$$

и введем функцию

$$\eta(R) = \begin{cases} \max\{1/\omega^{-1}(R), \varphi(\varepsilon)\} & \text{при } R \geq 1, \\ R \cdot \max\{1/\omega^{-1}(1), \varphi(\varepsilon)\} & \text{при } 0 \leq R \leq 1, \end{cases} \tag{5.2}$$

осуществляющую гомеоморфизм $\eta : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$.

Гомеоморфизм $f^{-1} : \Gamma' \to \Gamma$, обратный к ω-квазимёбиусову, является ω'-квазимёбиусовым с функцией искажения $\omega'(t) = 1/\omega^{-1}(1/t)$ (см. [14]). Воспользуемся следующей модификацией критерия Рикмана [3, теорема 2, лемма 2], доказанной в [10, теорема 4.2.2]: если ω'-квазимёбиусовый гомеоморфизм $f^{-1} : \Gamma' \to \Gamma$ границ жордановых областей $\Gamma' = \partial(CD')$ и $\Gamma = \partial(CD)$ удовлетворяет условию

(B) для любой тройки попарно различных точек $w_1, w_2, w_3 \in \Gamma'$ и любой жордановой дуги $\gamma' \subset CD'$ с концами w_1, w_2 существует жорданова дуга $\gamma \subset CD$ с концами в точках $f^{-1}(w_1)$ и $f^{-1}(w_2)$, для которой

$$\sup_{z\in\gamma} \frac{\sigma(z, f^{-1}(w_2))\sigma(f^{-1})(w_3), f^{-1}(w_1))}{\sigma(z, f^{-1}(w_3))\sigma(f^{-1}(w_2), f^{-1}(w_1))} \le \eta\left(\sup_{w\in\gamma'} \frac{\sigma(w, w_2)\sigma(w_3, w_1)}{\sigma(w, w_3)\sigma(w_2, w_1)}\right), \tag{5.3}$$

то отображение $f^{-1} : \Gamma' \to \Gamma$ продолжается до K'-квазиконформного отображения $g : CD' \to CD$, где K' зависит лишь от ω' и η.

Мёбиусова инвариантность абсолютного двойного отношения позволяет свести проверку условия (B) к случаю, когда $\{0, 1, \infty\} \subset \Gamma \cap \Gamma'$ и $w_2 = f(0) = 0$, $w_1 = f(1) = 1$, $w_3 = f(\infty) = \infty$, т. е. достаточно показать, что

(**B**) для любой жордановой дуги $\gamma' \subset CD'$ с концами в точках $0, 1 \in \Gamma' \cap \Gamma$ существует жорданова дуга $\gamma \subset CD$ с концами в тех же точках, для которой

$$\sup_{z\in\gamma} |z| \le \eta(\sup_{w\in\gamma'} |w|). \tag{5.4}$$

Итак, пусть задано сечение γ' области CD' с концами $0, 1 \in \Gamma'$ такое, что $\sup\{|w| : w \in \gamma'\} = R \ge 1$. Рассмотрим круг $B(0, R_0)$ радиуса $R_0 = 2(1 + 2/\varepsilon)^3$.

Допустим, что в $CD \cap \overline{B}(0, R_0)$ не существует жордановой дуги с концами в точках $0, 1$. Тогда в силу леммы 4.2 существует жорданова дуга $\tau \subset D \cap B(0, R_0)$ с концами $0, 1$. Ввиду ω-квазимёбиусовости отображения $f : D \to D'$ ее образ $f(\tau)$ является жордановой дугой с концами $0, 1$, лежащей в $D' \cap B(0, \omega(R_0))$. Тогда жорданова кривая $f(\tau) \cup \gamma'$ ограничивает область W, пересекающуюся как с D', так и с CD'. Поэтому поддуга $\lambda \subset \Gamma' \subset R^2$ с концами $0, 1$ лежит в области W, содержащейся в круге $B(0, R_1)$ радиуса $R_1 = \max\{R, \omega(R_0)\}$. В силу ω'-квазимебиусовости отображения f^{-1} дуга $f^{-1}(\lambda) \subset \Gamma$ с концами $0, 1$ лежит в круге $B(0, \omega'(R_1))$. Следовательно, для достаточно малого $\delta > 0$ существует жорданова дуга $\gamma \subset CD$ с концами $0, 1$, у которой $\sup_{z\in\gamma} |z| < \sup_{z\in f^{-1}(\lambda)} |z| + \delta$. Таким образом, построена жорданова дуга $\gamma \subset CD$ с концами $0, 1$ такая, что

$$\begin{aligned}\sup_{z\in\gamma} |z| &\le \omega'(\max\{R, \omega(R_0)\}) = \max\{\omega'(R), \omega'(\omega(R_0))\} \\ &= \max\{1/\omega^{-1}(1/R), 1/\omega^{-1}(1/\omega(2(1 + 2/\varepsilon)^3))\} \\ &= \max\{1/\omega^{-1}(1/R), \varphi(\varepsilon)\} = \eta(R),\end{aligned}$$

стало быть,

$$\sup_{z\in\gamma} |z| \le \eta(\sup_{w\in\gamma'} |w|).$$

Тем самым доказаны свойство (**B**) и, значит, существование K'-квазиконформного отображения $g : CD' \to CD$, где K' зависит лишь от ω и ε.

Обратное отображение $g^{-1} : CD \to CD'$ является K'-квазиконформным продолжением в область CD для ω-квазимёбиусова гомеоморфизма $f : \Gamma \to \Gamma'$. Тогда (см. [10, теорема 4.1.1]) гомеоморфизм $g^{-1} : CD \cup \Gamma \to CD' \cup \Gamma'$ является

ω_1-квазимёбиусовым с функцией искажения ω_1, зависящей только от ω и ε. Воспользовавшись подходящими мёбиусовыми преобразованиями, можем считать без нарушения общности, что $\infty \in \Gamma$ и $f(\infty) = \infty$. Это означает, что отображения $f : D \cup \Gamma \to D' \cup \Gamma'$ и $g^{-1} : CD \cup \Gamma \to CD' \cup \Gamma'$ η_1-квазисимметрические с функцией искажения $\eta_1 = \max\{\omega, \omega'\}$, зависящей лишь от ω и ε, и к ним применима теорема о склейке [15, теорема 3.10] (см. также [16]), в силу которой отображение

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & \text{при } z \in D \cup \Gamma, \\ g^{-1}(z) & \text{при } z \in CD \cup \Gamma \end{cases}$$

является K-квазиконформным гомеоморфизмом $\overline{R}^2$ с $K = \eta_1(1)$, зависящим только от ω и ε.

Теорема доказана.

Замечание. Так как (см., например, [14]) любое *квазисимметрическое* отображение квазимёбиусово с контролируемой функцией искажения, теорема 3.2 остается верной, если в ее формулировке заменить условие ω-квазимёбиусовости условием ω-квазисимметричности вложения $f : D \to \overline{R}^2$ (в хордовой метрике).

Автор весьма признателен рецензенту за сделанные им замечания, указанные опечатки и за его положительную оценку введенного в этой статье понятия кривой с ограниченным вращением.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Beurling A., Ahlfors L.* The boundary correspondence under quasiconformal mappings // Acta Math. 1956. V. 96, N 1:2. P. 125–142.

2. *Rickman S.* Characterization of quasiconformal arcs // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 1966. V. 395. P. 1–30.

3. *Rickman S.* Boundary correspondence under quasiconformal mappings of Jordan domains // J. Math. Mech. 1968. V. 18, N 5. P. 429–432.

4. *Асеев В. В., Журавлев И. В.* О квазиконформном продолжении плоских гомеоморфизмов // Изв. вузов. Математика. 1986. № 9. С. 3–5.

5. *Асеев В. В.* Критерий квазиконформной продолжимости гомеоморфизма плоских областей / Ред. Сиб. мат. журн. Деп. ВИНИТИ, 27.01.1987, № 629-В 87. 14 с.

6. *Асеев В. В.* Квазиконформное продолжение квазимёбиусовых вложений на плоскости // Докл. АН СССР. 1988. Т. 302, № 3. С. 524–526.

7. *Варисов А. К.* О квазиконформном продолжении гомеоморфизмов плоских областей // Групповые и метрические свойства отображений. Новосибирск: НГУ, 1995. С. 116–121.

8. *Асеев В. В., Сычев А. В., Тетенов А. В.* О квазиконформном продолжении с семейства плоских областей специального вида // Докл. АН. 2003. Т. 389, № 6. С. 727–729.

9. *Aseev V. V.* Quasiconformal extension from curvilinear triangles // J. Appl. Industr Math. 2008. V. 2, N 4. P. 1–10.

10. *Aseev V. V.* Quasisymmetric embeddings // J. Math. Sci. (New York). 2002. V. 108, N 3. P. 375–410.

11. *Асеев В. В., Сычев А. В., Тетенов А. В.* Мёбиусово-инвариантные метрики и обобщенные углы в птолемеевых пространствах // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 2. С. 243–263.

12. *Moreno J. P.* An invitation to plane topology // Austr. Math. Soc. Gaz. 2002. V. 29, N 3. P. 149–154.

13. *Newman M. H. A.* Elements of the topology of plane sets of points. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1939.

14. *Väisälä J.* Quasimöbius maps // J. Anal. Math. 1984/85. V. 44. P. 218–234.

15. *Väisälä J.* Quasisymmetry and unions // Manuscr. Math. 1990. V. 68. P. 101–111.

16. *Асеев В. В., Сычев А. В., Тетенов А. В.* Склейка квазисимметрических вложений в задаче о квазиконформном продолжении // Укр. мат. журн. 2004. Т. 56, № 6. С. 737–744.

Статья поступила 11 августа 2016 г.

Асеев Владислав Васильевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
btp@math.nsc.ru