Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2017. Том 58, № 2

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ, ЯВЛЯЮЩИЕСЯ ПРОИЗВЕДЕНИЕМ ДВУХ НОРМАЛЬНЫХ СВЕРХРАЗРЕШИМЫХ ПОДГРУПП

С. Тан, Ю. Е, В. Го

Аннотация. Пусть $\mathfrak{P}1$ — класс всех конечных групп, являющихся произведением двух нормальных сверхразрешимых подгрупп. Пусть $\mathfrak{P}$ — класс всех несверхразрешимых $\mathfrak{P}1$-групп G таких, что все собственные $\mathfrak{P}1$-подгруппы группы G и все нетривиальные фактор-группы группы G сверхразрешимы. В настоящей работе получена классификация $\mathfrak{P}$-групп.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.215

Ключевые слова: конечная группа, сверхразрешимая подгруппа, произведение двух нормальных сверхразрешимых подгрупп, модуль.

1. Введение

Все группы в данной статье конечны. На протяжении всей статьи G обозначает конечную группу, p — простое число и F_p — конечное поле из p элементов. Через $|G|$ обозначается порядок группы G и через $\pi(G)$ — множество всех простых делителей числа $|G|$. Группа G называется *p-замкнутой*, если ее силовская p-подгруппа нормальна.

Хорошо известно, что произведение двух нормальных разрешимых подгрупп разрешимо и произведение двух нормальных нильпотентных подгрупп нильпотентно. Однако произведение двух нормальных сверхразрешимых подгрупп не обязательно сверхразрешимо. Таким образом, возникают следующие вопросы.

Проблема 1.1. *При каких условиях произведение двух* (*нормальных*) *сверхразрешимых подгрупп снова будет сверхразрешимо?*

Проблема 1.2 (см. [1, гл. II, проблема 6.34]). *Каково строение несверхразрешимой группы, являющейся произведением двух* (*нормальных*) *сверхразрешимых подгрупп?*

Проблема 1.1 изучалась во многих работах, например, в [2–14]. В частности, Бэр доказал, что если G — произведение двух нормальных сверхразрешимых подгрупп и $[G, G]$ нильпотентна, то G сверхразрешима [2]. Фризен показал, что группа G, являющаяся произведением двух нормальных сверхразрешимых подгрупп M и N, сверхразрешима, если индексы $|G : M|$ и $|G : N|$ взаимно просты [3].

Research is supported by NNSF grants of China (Grant # 11371335, 11431010, 11571329) and Wu Wen-Tsun Key Laboratory of Mathematics of Chinese Academy of Sciences.

Недавно В. Го и А. С. Кондратьев в [4, 5] описали строение минимальной несверхразрешимой группы, являющейся произведением двух нормальных сверхразрешимых подгрупп. Они доказали, что конечная минимальная несверхразрешимая группа G раскладывается в произведение двух нормальных сверхразрешимых подгрупп тогда и только тогда, когда $G/F(G)$ — примарная минимальная неабелева группа.

Пусть $\mathfrak{P}1$ — класс всех групп, являющихся произведением двух нормальных сверхразрешимых подгрупп. Пусть $\mathfrak{P}$ — класс всех несверхразрешимых $\mathfrak{P}1$-групп G таких, что все собственные $\mathfrak{P}1$-подгруппы и нетривиальные фактор-группы группы G сверхразрешимы. Естественным образом возникает следующий вопрос.

Проблема 1.3. *Каково строение $\mathfrak{P}$-групп?*

Основная цель данной работы — решить проблему 1.3. А именно, получить классификацию $\mathfrak{P}$-групп (см. теорему 3.6). В качестве следствия получено необходимое и достаточное условие сверхразрешимости $\mathfrak{P}1$-группы (см. следствие 4.1).

Все необъясненные обозначения и понятия стандартны и могут быть при необходимости найдены в [15, 16].

2. Предварительные сведения

Нам потребуются следующие хорошо известные результаты.

Лемма 2.1 (см. [17, теорема 1.8.17]). *Предположим, что M — нормальная нильпотентная подгруппа группы G и $M \cap \Phi(G) = 1$. Тогда M является прямым произведением минимальных нормальных подгрупп группы G.*

Напомним, что G — группа Фробениуса с дополнением H, если H — нетривиальная собственная подгруппа группы G такая, что $H \cap H^g = 1$ для любого $g \in G \backslash H$ (см. [18, гл. V, определение 8.1]). В этом случае множество

$$K = \Big(G \backslash \Big(\bigcup_{g \in G} H^g\Big)\Big) \cup \{1\}$$

является нормальной подгруппой группы G и называется *фробениусовым ядром группы G, соответствующим дополнению H*. Более того, $G = K \rtimes H$.

Лемма 2.2 (см. [18, гл. V, теорема 8.7]). *Пусть $G = KH$ — группа Фробениуса с ядром K и дополнением H. Если $p > 2$, то силовские p-подгруппы группы H циклические. Если $p = 2$, то силовские p-подгруппы группы H либо циклические, либо обобщенные кватернионные. В частности, если H абелева, то H циклическая.*

Напомним, что группа A действует на G регулярно, если A нетривиальна и $C_G(\langle a \rangle) = \{g \mid g \in G,\ g^a = g\} = 1$ для любого $1 \neq a \in A$. Если A — группа автоморфизмов группы G и A действует на G регулярно, то A называется *регулярной группой автоморфизмов группы G*.

Следующая лемма дана как упражнение в книге Горенстейна [16, гл. 2, упражнение 17]. Для удобства читателя приводим доказательство.

Лемма 2.3. *Если A — регулярная группа автоморфизмов группы G, то полупрямое произведение $G \rtimes A$ является группой Фробениуса с ядром G и дополнением A.*

Доказательство. Если $ga \in G \rtimes A \backslash A$, где $g \in G$ и $a \in A$, то ясно, что $g \neq 1$. Предположим, что $A \cap A^{ga} \neq 1$. Тогда существует $1 \neq b \in A \cap A^{ga}$. Следовательно, существует $c \in A$ такой, что $b = c^{ga}$, т.е. $b = a^{-1}g^{-1}cga$. Отсюда вытекает, что $g^c = g$. Значит, $c = 1$, поскольку $g \neq 1$ и A действует на G регулярно. Тогда $b = 1$; противоречие. Таким образом, $A \cap A^{ga} = 1$ для любого $ga \in G \rtimes A \backslash A$. Это означает, что $G \rtimes A$ — группа Фробениуса с дополнением A. Поскольку G — нормальное дополнение к A в $G \rtimes A$, получаем, что G — фробениусово ядро группы $G \rtimes A$. $\square$

3. Основной результат

Пусть $E_p(1,1,1) = \langle a, b \mid c = [a,b],\ a^p = b^p = c^p = [a,c] = [b,c] = 1\rangle$, $p > 2$, и $M_p(n,1) = \langle a, b \mid a^{p^n} = b^p = 1,\ a^b = a^{1+p^{n-1}}\rangle$, $n \geq 2$. Отметим, что любая максимальная подгруппа группы $M_p(n,1)$ содержит $\langle a^p\rangle = Z(M_p(n,1))$ в качестве максимальной подгруппы. Следовательно, $M_p(n,1)$ — минимальная неабелева группа.

Начнем с построения четырех серий групп, которые являются $\mathfrak{P}$-группами, и затем в теореме 3.6 покажем, что других $\mathfrak{P}$-групп нет.

Пример 3.1. Пусть p и q — простые числа такие, что $q \mid p-1$ и $q > 2$, и пусть $P = \mathrm{F}_p v_1 + \mathrm{F}_p v_2 + \cdots + \mathrm{F}_p v_q$ — q-мерное векторное пространство над F_p. Пусть ω — первообразный корень степени q из единицы в F_p. Положим

$$\alpha = \begin{pmatrix} \omega & & & \\ & \omega & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega \end{pmatrix}_{q\times q}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \omega & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega^{q-1} \end{pmatrix}_{q\times q},$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{q\times q}$$

и $Q = \langle \alpha, \beta, \gamma\rangle$, где Q порождается α, β, γ относительно матричного умножения. Тогда $Q \simeq E_q(1,1,1)$. Пусть $G = P \rtimes Q$, $M = P \rtimes \langle \alpha, \beta\rangle$ и $N = P \rtimes \langle \alpha, \gamma\rangle$. Тогда M и N — нормальные сверхразрешимые подгруппы группы G и $G = MN$. Однако G несверхразрешима. Обозначим группу G через $E(p,q,1)$.

Пример 3.2. Пусть p и q — простые числа такие, что $q^n \mid p-1$ для $n \geq 2$. Пусть $P = \mathrm{F}_p v_1 + \mathrm{F}_p v_2 + \cdots + \mathrm{F}_p v_q$ — q-мерное векторное пространство над F_p. Пусть ω и θ — первообразные корни из единицы в F_p степеней q и q^n соответственно. Положим

$$\beta = \begin{pmatrix} \theta & & & \\ & \theta\omega^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \theta\omega^{q-1} \end{pmatrix}_{q\times q}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{q\times q}$$

и $Q = \langle \beta, \gamma\rangle$. Тогда $Q \simeq M_q(n,1)$. Пусть $G = P \rtimes Q$, $M = P \rtimes \langle \beta\rangle$ и $N = P \rtimes \langle \beta^q, \gamma\rangle$. Тогда M и N — нормальные сверхразрешимые подгруппы группы

G и $G = MN$. Ясно, что G несверхразрешима. Обозначим группу G через $M(p,q,n,\theta,\omega)$.

Пример 3.3. Пусть p — простое число, $4 \mid p-1$ и $P = \mathrm{F}_p v_1 + \mathrm{F}_p v_2$ — двумерное векторное пространство над F_p. Пусть θ — первообразный корень четвертой степени из единицы в F_p. Положим

$$\beta = \begin{pmatrix} \theta & 0 \\ 0 & -\theta \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

и $Q = \langle \beta, \gamma \rangle$. Тогда $Q \simeq Q_8$. Пусть $G = P \rtimes Q$, $M = P \rtimes \langle \beta \rangle$ и $N = P \rtimes \langle \gamma \rangle$. Тогда M и N — нормальные сверхразрешимые подгруппы группы G и $G = MN$. При этом G — несверхразрешимая группа Фробениуса с ядром P и дополнением Q. Обозначим группу G через $Q(p,2)$.

Пример 3.4. Пусть p — простое число, $4 \nmid p-1$ и $P = \mathrm{F}_p v_1 + \mathrm{F}_p v_2$ — двумерное векторное пространство над F_p. Положим

$$\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и $Q = \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$. Тогда $Q \simeq D_4$. Пусть $G = P \rtimes Q$, $M = P \rtimes \langle \alpha, \beta \rangle$ и $N = P \rtimes \langle \alpha, \gamma \rangle$. Тогда M и N — нормальные сверхразрешимые подгруппы группы G и $G = MN$. Ясно, что G несверхразрешима. Обозначим группу G через $D(p,2)$.

Группы $E(p,q,1)$, $M(p,q,n,\theta,\omega)$, $Q(p,2)$ и $D(p,2)$ являются $\mathfrak{P}$-группами. Действительно, с одной стороны, P — единственная минимальная нормальная подгруппа групп $E(p,q,1)$, $M(p,q,n,\theta,\omega)$, $Q(p,2)$ и $D(p,2)$. Из этого следует, что любая нетривиальная фактор-группа групп $E(p,q,1)$, $M(p,q,n,\theta,\omega)$, $Q(p,2)$ и $D(p,2)$ сверхразрешима. С другой стороны, $E(p,q,1)$, $M(p,q,n,\theta,\omega)$ и $Q(p,2)$ несверхразрешимы, поскольку любая собственная подгруппа группы Q — абелева группа, период которой делит $p-1$. (Отметим, что если $G = PQ$, где P — нормальная абелева силовская p-подгруппа группы G такая, что $C_G(P) = P$, и Q — силовская q-подгруппа группы G, $q \neq p$, то G сверхразрешима тогда и только тогда, когда Q абелева и ее период делит $p-1$.) В случае группы $D(p,2)$ у Q есть единственная собственная подгруппа $A = \langle \beta\gamma \rangle$, не являющаяся абелевой группой периода, делящего $p-1$, поэтому все собственные подгруппы группы $D(p,2)$, кроме $P \rtimes A$, сверхразрешимы. Отметим, что $P \rtimes A$ не $\mathfrak{P}_1$-группа. Следовательно, любая собственная $\mathfrak{P}_1$-подгруппа групп $E(p,q,1)$, $M(p,q,n,\theta,\omega)$, $Q(p,2)$ и $D(p,2)$ сверхразрешима.

Предложение 3.5. *Пусть θ^k и ω^r — первообразные корни из единицы степеней q^n и p соответственно в поле F_p. Тогда $M(p,q,n,\theta,\omega) \simeq M(p,q,n,\theta^k,\omega^r)$.*

Доказательство. Будем придерживаться обозначений из примера 3.2. Поскольку θ и θ^k являются первообразными корнями степени q^n из единицы в $\mathrm{F_p}$, существует натуральное число a такое, что $(\theta^k)^a = \theta$ и $(a,q) = 1$. В силу того, что

$$\begin{aligned} M(p,q,n,\theta^k,\omega^r) &= \overline{P} \rtimes \langle \bar{\beta}, \bar{\gamma} \rangle = \overline{P} \rtimes \langle (\bar{\beta})^a, \bar{\gamma} \rangle \\ &\simeq M(p,q,n,\theta^{ka},\omega^{ra}) = M(p,q,n,\theta,\omega^{ra}), \end{aligned}$$

где $\overline{P}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ аналогичны P, β, γ из примера 3.2 соответственно, достаточно показать, что $M(p,q,n,\theta,\omega) \simeq M(p,q,n,\theta,\omega^m)$ для любого $1 \leq m \leq q-1$.

Пусть $P' = \mathrm{F}_p v'_1 + \mathrm{F}_p v'_2 + \dots + \mathrm{F}_p v'_q$, где $(v'_1, v'_2, \dots, v'_q)$ — базис для P', и

$$\beta' = \begin{pmatrix} \theta & & & \\ & \theta\omega^m & & \\ & & \ddots & \\ & & & \theta\omega^{(q-1)m} \end{pmatrix}_{q\times q}, \quad \gamma' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{q\times q}.$$

Пусть $Q' = \langle \beta', \gamma' \rangle$ и $G' = P' \rtimes Q' = M(p, q, n, \theta, \omega^m)$. Вернемся к $M(p, q, n, \theta, \omega)$. Пусть $vi = v_{r_i}$, где $1 \le r_i \le q$ и $q \mid i - r_i$ для любого $i > q$. Поскольку $v_i\gamma = v_{i+1}$, получаем, что $v_i\gamma^m = v_{i+m}$. Отметим, что $(v_1, v_{1+m}, \dots, v_{1+(q-1)m})$ — базис для P. Тогда $P = \mathrm{F}_p v_1 + \mathrm{F}_p v_{1+m} + \dots + \mathrm{F}_p v_{1+(q-1)m}$ и β и γ^m имеют следующие матрицы в базисе $(v_1, v_{1+m}, \dots, v_{1+(q-1)m})$:

$$\beta = \begin{pmatrix} \theta & & & \\ & \theta\omega^m & & \\ & & \ddots & \\ & & & \theta\omega^{(q-1)m} \end{pmatrix}_{q\times q}, \quad \gamma^m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{q\times q}.$$

Таким образом,

$$M(p, q, n, \theta, \omega) = P \rtimes \langle \beta, \gamma \rangle = P \rtimes \langle \beta, \gamma^m \rangle \simeq P' \rtimes \langle \beta', \gamma' \rangle = M(p, q, n, \theta, \omega^m).$$

Следовательно, $M(p, q, n, \theta, \omega) \simeq M(p, q, n, \theta, \omega^m)$ для любого $1 \le m \le q - 1$. Предложение доказано. $\square$

В силу предложения 3.5 вместо $M(p, q, n, \theta, \omega)$ можно писать $M(p, q, n)$.

В оставшейся части статьи $\mathfrak{A}(p-1)$ обозначает класс всех абелевых групп, период которых делит $p - 1$.

Теорема 3.6. *Пусть G — $\mathfrak{P}$-группа. Тогда $|\pi(G)| = 2$ и G изоморфна одной из групп $E(p, q, 1)$, $M(p, q, n)$, $Q(p, 2)$ и $D(p, 2)$.*

Доказательство. Поскольку G — $\mathfrak{P}$-группа, G является несверхразрешимой $\mathfrak{P}_1$-группой и все собственные $\mathfrak{P}_1$-подгруппы и все нетривиальные фактор-группы группы G сверхразрешимы. Пусть $G = MN$, где M и N — две нормальные сверхразрешимые подгруппы группы G. Доказательство будет состоять из следующих шагов.

(1) $\Phi(G) = 1$.

Допустим, что $\Phi(G) \ne 1$. Из условия на G следует, что $G/\Phi(G)$ сверхразрешима. Тогда G сверхразрешима; противоречие.

(2) В G есть единственная минимальная нормальная подгруппа K и G/K сверхразрешима.

Пусть K — минимальная нормальная подгруппа группы G. В силу условия на G группа G/K сверхразрешима. Предположим, что H — другая минимальная нормальная подгруппа группы G. Тогда G/H сверхразрешима. Из этого следует, что G сверхразрешима; противоречие. Таким образом, единственность доказана.

(3) Пусть p — наибольшее простое число в $\pi(G)$. Тогда G p-замкнута и $K = F(G) = O_p(G)$.

Группы M и N p-замкнуты, поскольку они сверхразрешимы. Значит, G тоже p-замкнута, так как M, N — нормальные подгруппы группы G и $G = MN$. Следовательно, достаточно показать, что $K = F(G)$. В силу (1) и леммы 2.1 имеет место разложение $F(G) = A_1 \times \dots \times A_k$, где A_i — минимальная нормальная подгруппа группы G для $1 \leq i \leq k$. С учетом (2) получаем, что $k = 1$ и $F(G) = K$, и (3) выполнено.

(4) $M/K \in \mathfrak{A}(p-1)$, $N/K \in \mathfrak{A}(p-1)$ и G/K — неабелева q-группа, причем $q \mid p-1$.

Из (3) следует, что $F(M) = K$. Поскольку M сверхразрешима, получаем, что M/K абелева. В силу (1) выполнено $\Phi(M) = 1$. По лемме 2.1 имеем $K = A_1 \times \dots \times A_r$, где A_i, $1 \leq i \leq r$, — минимальная нормальная подгруппа группы M. Из сверхразрешимости группы M вытекает, что $M/C_M(A_i) \in \mathfrak{A}(p-1)$, $1 \leq i \leq r$. Значит, $M/(C_M(A_1) \cap \dots \cap C_M(A_r)) \in \mathfrak{A}(p-1)$. Отметим, что

$$C_M(A_1) \cap \dots \cap C_M(A_r) = C_M(K) = C_M(F(M)) \leq F(M) = K.$$

Следовательно, $M/K \in \mathfrak{A}(p-1)$. По тем же соображениям $N/K \in \mathfrak{A}(p-1)$. Предположим, что $|\pi(G/K)| \neq 1$. Пусть $q \in \pi(G/K)$ и Q_1/K, Q_2/K — силовские q-подгруппы групп M/K, N/K соответственно. Ясно, что Q_1 и Q_2 — нормальные сверхразрешимые подгруппы группы G и $(Q_1Q_2)/K$ — нормальная силовская q-подгруппа группы G/K. Значит, Q_1Q_2 — собственная $\mathfrak{P}_1$-подгруппа группы G. Из условия на G следует, что Q_1Q_2 сверхразрешима. Поскольку $K = F(G) = F(Q_1Q_2)$, получаем, что $(Q_1Q_2)/K$ абелева. Тогда G/K абелева, так как каждая силовская подгруппа группы G/K абелева и нормальна в G/K. Показали, что G/K абелева, $M/K \in \mathfrak{A}(p-1)$ и $N/K \in \mathfrak{A}(p-1)$. Следовательно, $G/K \in \mathfrak{A}(p-1)$. По [19, гл. 1, теорема 1.4] группа K циклическая. Тогда G сверхразрешима; противоречие. Таким образом, $|\pi(G/K)| = 1$, и, значит, G/K — q-группа для некоторого простого числа $q \neq p$. Ясно, что G/K неабелева и $q \mid p-1$, и (4) доказано.

(5) Пусть $M_1 \geq M$ и $N_1 \geq N$ — две максимальные нормальные подгруппы группы G. Тогда M_1 и N_1 сверхразрешимы, M_1/K и N_1/K абелевы и $1 \neq M_1/K \cap N_1/K$ — циклическая группа.

Ясно, что $M_1 = MN \cap M_1 = M(N \cap M_1)$ и M, $N \cap M_1$ — две нормальные сверхразрешимые подгруппы группы M_1. Из условия на G следует, что M_1 сверхразрешима. Тогда в силу равенств $K = F(G) = F(M_1)$ группа M_1/K абелева. По тем же соображениям N_1 сверхразрешима и N_1/K абелева.

Пусть Q — силовская q-подгруппа группы G. Из (3) и (4) вытекает, что $G = KQ$. Поскольку K — минимальная нормальная подгруппа группы G и Q — дополнение к K в G, получаем, что Q — максимальная подгруппа группы G. Более того, $M_1 = M_1 \cap KQ = K(Q \cap M_1)$ и $N_1 = N_1 \cap KQ = K(Q \cap N_1)$. В силу того, что M_1/K и N_1/K абелевы, $Q \cap M_1$ и $Q \cap N_1$ — различные абелевы максимальные подгруппы группы Q. Пусть

$$Q' = (Q \cap M_1) \cap (Q \cap N_1).$$

Если $Q' = 1$, то Q абелева и, значит, G/K абелева; противоречие. Следовательно, $1 \neq Q' \leq Z(Q)$. Покажем, что действие группы Q' на K сопряжением регулярно. Предположим противное. Найдутся $1 \neq \alpha \in Q'$ и $1 \neq k \in K$ такие, что $k^\alpha = k$. Тогда $C_G(\langle \alpha \rangle) \geq \langle Q, k \rangle = G$, так как Q — максимальная подгруппа группы G. Следовательно, $\langle \alpha \rangle \trianglelefteq G$, что противоречит (2). Таким образом, Q' действует на K регулярно. Поскольку $K = F(G)$, группа Q' действует на K

точно. Значит, Q' можно рассматривать как регулярную группу автоморфизмов группы K. Применяя лемму 2.3, получаем, что KQ' — группа Фробениуса с дополнением Q'. По лемме 2.2 группа Q' циклическая. Следовательно, группа $M_1/K \cap N_1/K = (M_1 \cap N_1 \cap Q)K/K = Q'K/K \neq 1$ тоже циклическая, и (5) выполнено.

Без потери общности можно считать, что M и N — максимальные нормальные подгруппы группы G. Пусть Q — силовская q-подгруппа группы G. До конца доказательства фиксируем q-группы Q_1 и Q_2 такие, что $Q_1 = M \cap Q$ и $Q_2 = N \cap Q$. Тогда $M = KQ_1$ и $N = KQ_2$. Из (5) получаем, что Q_1 и Q_2 — абелевы максимальные подгруппы группы Q и $1 \neq Q_1 \cap Q_2$ — циклическая группа. Пусть $Q_1 \cap Q_2 = \langle \alpha \rangle$. Тогда $\langle \alpha \rangle \leq Z(Q)$ и $|Q/\langle \alpha \rangle| \leq q^2$.

(6) $\langle \alpha \rangle = Z(Q)$ и $Q/\langle \alpha \rangle \simeq Z_q \times Z_q$.

Если хотя бы одно из указанных утверждений неверно, то $Q/Z(Q)$ — циклическая группа. Это означает, что Q абелева. Тогда G/K абелева, но это противоречит (4). Следовательно, (6) выполнено.

Очевидно, что K — элементарная абелева p-группа и может рассматриваться как векторное пространство над F_p. В силу равенства $K = F(G)$ группы $C_G(K) = K$ и Q могут рассматриваться как линейные преобразования на K. Действие группы Q на K сопряжением превращает K в неприводимый Q-модуль. Поскольку M сверхразрешима, по теореме Машке [16, гл. 3, теорема 3.1] в K есть базис $\mathscr{M}$ такой, что любой элемент из Q_1 имеет диагональную матрицу в базисе $\mathscr{M}$. Тогда

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 I_{n_1} & & & \\ & a_2 I_{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_k I_{n_k}, \end{pmatrix},$$

где a_i, $1 \leq i \leq k$, — попарно различные элементы.

(7) $k = 1$, т.е. α — скалярное преобразование на K.

Пусть $V = \{v \mid v \in K, v^\alpha = a_1 v\}$. Тогда V — нетривиальный Q-подмодуль модуля K, поскольку $\alpha \in Z(Q)$. Так как K — неприводимый Q-модуль, получаем, что $V = K$ и, значит, (7) верно.

В силу (6) для любого $\beta \in Q_1 \backslash \langle \alpha \rangle$ выполнено $\beta^q \in \langle \alpha \rangle$. С учетом (7) имеем

$$\beta = \begin{pmatrix} bI_{m_1} & & & \\ & b\omega^{k_2-1} I_{m_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b\omega^{k_r-1} I_{m_r}, \end{pmatrix},$$

где ω — первообразный корень степени q из единицы в F_p и $1 \leq k_i \neq k_j \leq q - 1$ при $i \neq j$.

(8) $r > 1$.

Если $r = 1$, то $\beta \in Z(Q) = \langle \alpha \rangle$; противоречие. Значит, (8) доказано.

Из (8) и равенства $Q_1 = \langle \alpha, \beta \rangle$ следует, что K можно рассматривать как Q_1-модуль с r компонентами Веддерберна (см. [16, с. 72]) $V_1, V_2, \ldots, V_r$, $r > 1$ (на самом деле V_i — собственное подпространство, соответствующее собственному числу $b\omega^{k_i-1}$ преобразования β).

(9) $r = q$ и $m_1 = m_2 = \cdots = m_q = n$ для некоторого $n \geq 1$.

Пусть $\gamma \in Q \backslash Q_1$. По теореме Клиффорда [16, гл. 3, теорема 4.1] группа $\langle \gamma \rangle$ индуцирует транзитивное подстановочное действие на множестве $\{V_1, V_2, \dots, V_r\}$, так как $Q_1 \trianglelefteq Q$, $Q = Q_1\langle \gamma \rangle$ и K — неприводимый Q-модуль. Следовательно, $m_1 = m_2 = \dots = m_r = n$ для некоторого $n \geq 1$. Поскольку $\gamma^q \in \langle \alpha \rangle$ в силу (6) и V_i — Q_1-модуль для $1 \leq i \leq r$, получаем, что $r = q$. Таким образом, (9) доказано.

Пусть $\gamma \in Q \backslash Q_1$. Как показано в доказательстве утверждения (9), в K есть базис $\left(v_1^1, \dots, v_1^n, v_2^1, \dots, v_2^n, \dots, v_q^1, \dots, v_q^n\right)$ такой, что α, β и γ имеют следующие матрицы в этом базисе:

$$\alpha = \begin{pmatrix} aI_n & & & \\ & aI_n & & \\ & & \ddots & \\ & & & aI_n \end{pmatrix}_{qn\times qn}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \bar{b}I_n & & & \\ & \bar{b}\omega^{k_1'}I_n & & \\ & & \ddots & \\ & & & \bar{b}\omega^{k_{q-1}'}I_n \end{pmatrix}_{qn\times qn},$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 & I_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & I_n \\ C & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{qn\times qn},$$

где $1 \leq k_i' \leq q-1$ и k_i', $1 \leq i \leq q-1$, попарно различны.

(10) $n = 1$ и существует k такое, что $(k, q) = 1$ и $q \mid k_i' - ik$ для всех $1 \leq i \leq q-1$.

Отметим, что $\gamma^q \in \langle \alpha \rangle$. Следовательно, $C = cI_n$, где $c \in \mathrm{F}_p^*$. Тогда $\left\langle v_1^1 \right\rangle \times \left\langle v_2^1 \right\rangle \times \dots \times \left\langle v_q^1 \right\rangle$ — Q-подмодуль модуля K. Значит, $\left\langle v_1^1 \right\rangle \times \left\langle v_2^1 \right\rangle \times \dots \times \left\langle v_q^1 \right\rangle = K$ и $n = 1$. Из (6) получаем, что $[\beta, \gamma] \in \langle \alpha \rangle$ имеет порядок q, так как $[\beta, \gamma]^q = [\beta^q, \gamma] = 1$. Непосредственные вычисления показывают, что существует k такое, что $(k, q) = 1$ и $q \mid k_i' - ik$ для всех $1 \leq i \leq q-1$. Значит, (10) верно.

Без потери общности можно считать, что $k_i' = i$ для $1 \leq i \leq q-1$. В противном случае в качестве первообразного корня степени q из единицы в F_p можно взять $\omega' = \omega^k$.

(11) Заключение.

Случай I. Обе группы Q_1 и Q_2 не являются циклическими.

В этом случае можно выбрать $\beta \in Q_1$ и $\gamma \in Q_2$, оба порядка q. Предположим, что $|\alpha| > q$. Пусть $A = K\langle \alpha^q, \beta, \gamma \rangle$, $B = K\langle \alpha^q, \beta \rangle$ и $C = K\langle \alpha^q, \gamma \rangle$. Тогда $F(A) = K$ и B, C — нормальные сверхразрешимые подгруппы группы A. Поскольку $K = F(A)$ и группа $A/K \simeq \langle \alpha^q, \beta, \gamma \rangle$ неабелева, A не является сверхразрешимой, что противоречит условию на G, так как A — собственная $\mathfrak{P}_1$-подгруппа группы G. Значит, $|\alpha| = q$. Тогда α, β, γ имеют следующие матричные представления:

$$\alpha = \begin{pmatrix} \omega & & & \\ & \omega & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega \end{pmatrix}_{q\times q}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \omega & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega^{q-1} \end{pmatrix}_{q\times q},$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{q\times q},$$

где ω — первообразный корень степени q из единицы в F_p. Тогда $G \simeq K \rtimes \langle\alpha,\beta,\gamma\rangle$. Более того, если $q \neq 2$, то $G \simeq E(p,q,1)$.

Случай II. Одна из групп Q_1 и Q_2 циклическая, а другая нет.

Без потери общности можно считать, что $Q_1 = \langle\beta\rangle$, $Q_2 = \langle\alpha\rangle \times \langle\gamma\rangle$, где $|\alpha| = q^n$, $n \geq 1$ и $|\gamma| = q$. Тогда $|\beta| = q^{n+1}$ и β, γ имеют следующие матричные представления:

$$\beta = \begin{pmatrix} \theta & & & \\ & \theta\omega & & \\ & & \ddots & \\ & & & \theta\omega^{q-1} \end{pmatrix}_{q\times q}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{q\times q},$$

где θ и ω — первообразные корни из единицы в F_p степеней q^{n+1} и q соответственно. Значит, $G \simeq K \rtimes \langle\beta,\gamma\rangle = M(p,q,n+1)$, $n \geq 1$.

Случай III. Обе группы Q_1 и Q_2 циклические.

Предположим, что существует элемент $a \in Q \backslash Q_1$ порядка q. Отметим, что $\langle\alpha, a\rangle \in \mathfrak{A}(p-1)$ и $[Q,Q] \leq \langle\alpha\rangle$ в силу (6). Значит, $A = K\langle\alpha, a\rangle$ — нормальная сверхразрешимая подгруппа группы G и $G = MA$. Таким образом, этот случай сводится к случаю II, поскольку можно заменить N на A.

Следовательно, можно считать, что в Q есть только одна подгруппа порядка q. Это означает, что Q является либо циклической группой, либо обобщенной кватернионной. Из неабелевости группы Q вытекает, что Q — обобщенная кватернионная группа и $q = 2$, т. е.

$$Q \simeq \langle a, b \mid a^{2^n} = 1,\ a^{2^{n-1}} = b^2,\ a^b = a^{-1}\rangle,$$

где $n \geq 2$. Получаем, что $|Z(Q)|$=2. Тогда $|Q| = 8$ в силу равенства $Q/Z(Q) \simeq Z_q \times Z_q$, установленного в (6). Значит, $Q \simeq Q_8$, и можно выбрать β и γ так, что $Q_1 = \langle\beta\rangle$, $Q_2 = \langle\gamma\rangle$ и β, γ имеют следующие матричные представления:

$$\beta = \begin{pmatrix} \theta & 0 \\ 0 & -\theta \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

где θ — первообразный корень четвертой степени из единицы в F_p. Таким образом, $G \simeq K \rtimes \langle\beta,\gamma\rangle = Q(p,2)$.

Допустим, что $q = 2$ в случае I. Если $4 \mid p-1$, то этот случай сводится к случаю II, поскольку можно положить $Q_1 = Q_1' = \langle\beta\gamma\rangle$ и $Q_2 = Q_2' = \langle\alpha,\gamma\rangle$ ($M' = KQ_1'$ и $N' = KQ_2'$ — две нормальные сверхразрешимые подгруппы группы G и $G = M'N'$), и тогда $G \simeq M(p,2,2)$. Предположим, что $4 \nmid p-1$. Тогда рассматриваемый случай не сводится к случаю II, так как KQ_1' не является сверхразрешимой, и $G \simeq D(p,2)$. Следовательно, в случае I при $q = 2$ группа G изоморфна одной из групп $M(p,2,2)$ и $D(p,2)$.

Таким образом, G изоморфна одной из групп $E(p,q,1)$, $M(p,q,n)$, $Q(p,2)$ и $D(p,2)$. Теорема доказана. $\square$

4. Некоторые приложения теоремы 3.6

Пусть A — группа. Говорят, что в G *есть A-секция*, если в ней есть подгруппы H и K такие, что $K \trianglelefteq H$ и $H/K \simeq A$.

Следующее утверждение, непосредственно вытекающее из теоремы 3.6, дает необходимое и достаточное условие того, что $\mathfrak{P}$1-группа сверхразрешима.

Следствие 4.1. *Пусть $G = MN$, где M и N — нормальные сверхразрешимые подгруппы группы G. Тогда G сверхразрешима в том и только в том случае, когда в G нет A-секций для любой A из групп $E(p,q,1)$, $M(p,q,n)$, $Q(p,2)$ и $D(p,2)$.*

Отметим, что коммутанты групп $E(p,q,1)$, $M(p,q,n)$, $Q(p,2)$ и $D(p,2)$ не нильпотентны. Из следствия 4.1 очевидным образом вытекает

Следствие 4.2 [2]. *Пусть $G = MN$, где M и N — нормальные сверхразрешимые подгруппы группы G. Если $[G,G]$ нильпотентна, то G сверхразрешима.*

Следствие 4.3 [3]. *Пусть M и N — нормальные сверхразрешимые подгруппы группы G. Если индексы $|G : M|$ и $|G : N|$ взаимно просты, то G сверхразрешима.*

Доказательство. Из взаимной простоты индексов $|G : M|$ и $|G : N|$ следует, что $G = MN$. Если G несверхразрешима, то по следствию 4.1 в G есть секция H/K, изоморфная одной из групп $E(p,q,1)$, $M(p,q,n)$, $Q(p,2)$ и $D(p,2)$. Индексы $|H : H \cap M|$ и $|H : H \cap N|$ взаимно просты, поскольку $|H : H \bigcap M| = |HM : M|$ и $|H : H \cap N| = |HN : N|$. Следовательно, тройка $(H, H \cap M, H \cap N)$ удовлетворяет посылке следствия. При этом ясно, что H несверхразрешима. Без потери общности можно считать, что $H = G$. Отметим, что индексы $|G/K : MK/K|$ и $|G/K : NK/K|$ взаимно просты. Значит, $MK/K = G/K$ или $NK/K = G/K$, так как $|\pi(G/K)| = |\pi(H/K)| = 2$ и $G/K = H/K$ содержит единственную минимальную нормальную подгруппу, которая является силовской подгруппой группы G/K. Тогда G/K сверхразрешима, т. е. H/K сверхразрешима; противоречие. $\square$

Если H — элементарная абелева группа и $|H| = p^n$ для простого числа p, то будем говорить, что H *имеет ранг* n, и положим $r(H) = n$.

Теорема 4.4. *Пусть $G = MN$, где M и N — нормальные сверхразрешимые подгруппы группы G. Пусть q — наименьшее простое число в $\pi(M)\cap\pi(N)$. Если $r(H/K) < q$ для любого главного фактора H/K группы G, содержащегося в $M \cap N$, то G сверхразрешима.*

Доказательство. Если $\pi(M) \cap \pi(N) = \varnothing$, то $M \cap N = 1$ и $G = M \times N$. В этом случае G сверхразрешима. Значит, можно считать, что $\pi(M)\cap\pi(N) \neq \varnothing$. Предположим, что теорема неверна, и пусть G — контрпример наименьшего порядка. Тогда выполнены следующие утверждения.

(1) $\Phi(G) \cap M = \Phi(G) \cap N = 1$.

Если это не так, то $\Phi(G) \cap M \neq 1$ или $\Phi(G) \cap N \neq 1$. Без потери общности можно считать, что $\Phi(G) \cap M \neq 1$. Пусть $A = \Phi(G) \cap M$. Поскольку $M/A \bigcap NA/A = (M \cap N)A/A$ и $\pi(M/A)\cap\pi(NA/A) \subseteq \pi(M)\cap\pi(N)$, условие теоремы выполнено для $(G/A, M/A, NA/A)$. В силу выбора группы G получаем, что G/A сверхразрешима. Следовательно, G сверхразрешима; противоречие.

(2) Пусть $K \leq M$ — минимальная нормальная подгруппа группы G. Тогда K — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в M или в N, $K = F(M) = F(N)$ и G/K сверхразрешима.

Поскольку $M/K \bigcap NK/K = (M \cap N)K/K$ и $\pi(M/K) \cap \pi(NK/K) \subseteq \pi(M) \cap \pi(N)$, условие теоремы выполнено для $(G/K, M/K, NK/K)$. Из минимальности группы G следует, что G/K сверхразрешима. Значит, в G есть единственная минимальная нормальная подгруппа K, содержащаяся в M. В силу (1) и леммы 2.1 получаем, что $F(M) = K$. Предположим, что $A \leq N$ — минимальная нормальная подгруппа группы G. Аналогичным образом показываем, что A — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в N, G/A сверхразрешима и $A = F(N)$. Группа G несверхразрешима, поэтому $A = K$. Значит, (2) выполнено.

(3) Пусть p — наибольшее простое число в $\pi(G)$. Тогда G p-замкнута, $K = O_p(G)$ и $F(G) = K \times Z(G)$.

Поскольку M и N сверхразрешимы, они p-замкнуты. Из (2) и равенства $G = MN$ получаем, что $K = O_p(G) = O_p(M)O_p(N)$ — силовская p-подгруппа группы G. Следовательно, G тоже p-замкнута, и $F(G) = K \times O_{p'}(F(G))$. Из (2) вытекает, что $O_{p'}(F(G)) \cap M = O_{p'}(F(G)) \cap N = 1$. Ясно, что $K \bigcap Z(G) = 1$. Значит, $F(G) = K \times Z(G)$, и (3) доказано.

(4) Пусть $A \leq M$ и $B \leq N$ — две нормальные подгруппы группы G. Тогда условие теоремы выполнено для (AB, A, B).

Пусть q' — наименьшее простое число в $\pi(A) \cap \pi(B)$ (если $\pi(A) \cap \pi(B) = \varnothing$, то также считаем, что условие выполнено для (AB, A, B), поскольку в этом случае AB сверхразрешима). Тогда $q' \geq q$. Если это не так, то $A \cap B$ содержит главный фактор H/K группы AB такой, что $r(H/K) \geq q'$. Отметим, что $A \cap B$ — нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в $M \cap N$. По операторной теореме Жордана — Гёльдера $M \cap N$ содержит главный фактор H'/K' группы G такой, что $r(H'/K') \geq r(H/K) \geq q' \geq q$. Это противоречит условию теоремы, и (4) доказано.

(5) $M/K \in \mathfrak{A}(p-1)$, $N/K \in \mathfrak{A}(p-1)$, G/K — неабелева q-группа и $q \mid p-1$.

Из (1) получаем, что $\Phi(M) = \Phi(N) = 1$. Рассуждая так же, как на шаге (4) доказательства теоремы 3.6, выводим, что $M/K \in \mathfrak{A}(p-1)$ и $N/K \in \mathfrak{A}(p-1)$. Предположим, что $|\pi(G/K)| \geq 2$. Пусть $r \in \pi(G/K)$ и R_1/K, R_2/K — силовские r-подгруппы групп M/K, N/K соответственно. Тогда $R_1 \leq M$, $R_2 \leq N$ — нормальные сверхразрешимые подгруппы группы G и $(R_1R_2)/K$ — нормальная силовская r-подгруппа группы G/K. В силу (4) группа R_1R_2 сверхразрешима, так как R_1R_2 — собственная подгруппа группы G. Тогда $R_1R_2Z(G)$ тоже сверхразрешима. Следовательно, $(R_1R_2)Z(G)/(K \times Z(G))$ абелева, поскольку $F(G) = K \times Z(G) = F(R_1R_2Z(G))$ по (3). Отметим, что $(R_1R_2)Z(G)/(K \times Z(G))$ — нормальная силовская r-подгруппа группы $G/(K \times Z(G))$. Тогда $G/(K \times Z(G))$ абелева, поскольку любая силовская подгруппа группы $G/(K \times Z(G))$ абелева и нормальна в $G/(K \times Z(G))$. Таким образом, $M/K \in \mathfrak{A}(p-1)$, $N/K \in \mathfrak{A}(p-1)$, и $G/(K \times Z(G))$ абелева. Следовательно, $G/(K \times Z(G)) \in \mathfrak{A}(p-1)$. Ясно, что $(K \times Z(G))/Z(G)$ — минимальная нормальная подгруппа группы $G/Z(G)$ и

$$(G/Z(G))/((K \times Z(G))/Z(G)) \simeq G/(K \times Z(G)) \in \mathfrak{A}(p-1).$$

По [19, гл. 1, теорема 1.4] группа $(K \times Z(G))/Z(G)$ циклическая и, значит, K тоже циклическая. Следовательно, G сверхразрешима; противоречие. Значит, $|\pi(G/K)| = 1$ и G/K — r-группа для некоторого простого числа $r \neq p$. Ясно, что G/K неабелева и $r \mid p-1$. Если $r = q$, то (5) выполнено. Предположим, что $r \neq q$. Тогда $p = q$, поскольку $\pi(G) = \{p, r\}$. Отметим, что $p > r$. Это означает, что $r \notin \pi(M) \cap \pi(N)$. Следовательно, $G = N$ или $G = M$, так как K — силовская

p-подгруппа группы G, содержащаяся в M и в N по (3), и $G = MN$. Получаем, что G сверхразрешима; противоречие. Таким образом, (5) доказано.

Теперь готовы прийти к противоречию, завершающему доказательство.

В (5) показано, что $\pi(G) = \{p, q\}$. Отметим, что K — минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в $M \cap N$. По условию теоремы $r(K) < q$ и, значит, $|K| < p^q$. В силу (5) и следствия 4.1 в G есть секция H/J, изоморфная одной из групп $E(p, q, 1)$, $M(p, q, n)$, $Q(p, 2)$ и $D(p, 2)$ (если H/J изоморфна $Q(p, 2)$ или $D(p, 2)$, то $q = 2$). Силовские p-подгруппы группы H/K имеют порядок p^q, поэтому $|K| \geq p^q$, так как K — силовская p-подгруппа группы G; противоречие. Теорема доказана. $\square$

Пусть G — группа и $|G| = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$, где $p_1 > p_2 > \dots > p_n$ — простые числа и $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — натуральные числа. Напомним, что G называется *группой с силовской башней*, если в G есть нормальный ряд

$$1 = G_0 < G_1 < \dots < G_n = G$$

такой, что $|G_i/G_{i-1}| = p_i^{\alpha_i}$, $i = 1, \dots, n$.

Следствие 4.5. *Пусть $G = MN$, где M и N — нормальные сверхразрешимые подгруппы группы G. Пусть q — наименьшее простое число в $\pi(M) \cap \pi(N)$. Если $r(P/\Phi(P)) < q$ для любой силовской подгруппы P группы $M \cap N$, то G сверхразрешима.*

Доказательство. Если $\pi(M) \cap \pi(N) = \varnothing$, то $G = M \times N$ и G сверхразрешима. Значит, можно считать, что $\pi(M) \cap \pi(N) \neq \varnothing$. Отметим, что $M \cap N$ — нормальная подгруппа группы G, обладающая силовской башней, т. е. если $|M \cap N| = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_n^{\beta_n}$, где $p_1 > p_2 > \dots > p_n$, то в $M \cap N$ есть нормальный ряд

$$1 = A_0 < A_1 < \dots < A_n = M \cap N$$

такой, что $|A_i/A_{i-1}| = p_i^{\beta_i}$, $i = 1, \dots, n$. Поскольку A_i, $i = 0, 1, \dots, n$, — характеристические подгруппы группы $M \cap N$, они нормальны в G.

Предположим, что G несверхразрешима. Тогда существует $1 \leq i \leq n$ такое, что G/A_i сверхразрешима и G/A_{i-1} несверхразрешима. Пусть P_i — силовская p_i-подгруппа группы $M \cap N$. Тогда $A_i/A_{i-1} \simeq P_i$. Пусть $H/A_{i-1} = \Phi(A_i/A_{i-1})$. Ясно, что H нормальна в G и $r(A_i/H) = r(P_i/\Phi(P_i)) < q$. Отметим, что если $\pi(M/H) \cap \pi(N/H) = \varnothing$, то G/H сверхразрешима. С другой стороны, предположим, что $\pi(M/H) \cap \pi(N/H) \neq \varnothing$, и пусть q' — наименьшее простое число в $\pi(M/H) \cap \pi(N/H)$. Тогда $q' \geq q$ и $r(A_i/H) < q'$. Поскольку G/A_i сверхразрешима и $r(A_i/H) < q'$, тройка $(G/H, M/H, N/H)$ удовлетворяет условию теоремы 4.4 по теореме Жордана — Гёльдера, поэтому G/H сверхразрешима. Значит, в любом случае G/H сверхразрешима. Но тогда в силу того, что $H/A_{i-1} = \Phi(A_i/A_{i-1}) \leq \Phi(G/A_{i-1})$ и группа $(G/A_{i-1})/(H/A_{i-1}) \simeq G/H$ сверхразрешима, G/A_{i-1} тоже сверхразрешима; противоречие. Значит, G сверхразрешима. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Guo W.* Structure theory for canonical classes of finite groups. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 2015.
2. *Baer R.* Classes of finite groups and their properties // Illinois J. Math. 1957. V. 1. P. 115–187.
3. *Friesen D. R.* Products of normal supersolvable subgroups // Proc. Amer. Math. Soc. 1971. V. 30, N 1. P. 46–48.

4. *Guo W., Kondrat'ev A. S.* New examples of finite non-supersolvable groups factored by two normal supersoluble subgroups // Inter. Conf. "Mal'tsev meeting" (Nov. 12–16 2012) / Collection of Abstracts. Novosibirsk: Sobolev Inst. Math.; Novosibirsk State Univ., 2012. P. 92.
5. *Guo W., Kondrat'ev A. S.* Finite minimal non-supersolvable groups decomposable into the product of two normal supersolvable subgroups // Commun. Math. Stat. 2015. V. 3, N 2. P. 285–290.
6. *Alejandre M. J., Ballester-Bolinches A., Cossey J.* Permutable products of supersoluble groups // J. Algebra. 2004. V. 276, N 2. P. 453–461.
7. *Arroyo-Jordá M., Arroyo-Jordá P., Martínez-Pastor A., Pérez-Ramos M. D.* On finite products of groups and supersolubility // J. Algebra. 2010. V. 323. P. 2922–2934.
8. *Asaad M., Shaalan A.* On the supersolvability of finite groups // Arch. Math. 1989. V. 53, N 4. P. 318–326.
9. *Ballester-Bolinches A., Pérez-Ramos M. D., Pedraza-Aguilera M. C.* Mutually permutable products of finite groups // J. Algebra. 1999. V. 213, N 1. P. 369–377.
10. *Го В., Скиба А. Н., Шам К. П.* X-перестановочные подгруппы // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 4. С. 742–759.
11. *Guo W., Skiba A. N.* On quasisupersoluble and p-quasisupersoluble finite groups // Algebra. Colloquium. 2010. V. 17. P. 549–556.
12. *Huppert B.* Monomiale darstellung endlicher gruppen // Nagoya J. Math. 1953. V. 6. P. 93–94.
13. *Nagrebetskii V. T.* On finite minimal non-supersolvable groups // Finite groups. Minsk, 1975. P. 104–108 (Proc. Gomel Sem. 1973/1974).
14. *Казарин Л. С., Корзюков Ю. А.* Конечные разрешимые группы со сверхразрешимыми максимальными подгруппами // Изв. вузов. Математика. 1980. № 5. С. 22–27.
15. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter De Gruyter, 1992.
16. *Gorenstein D.* Finite groups. New York; Evanston; London: Harper & Row Publ., 1968.
17. *Guo W.* The theory of classes of groups. Beijing; New York: Sci. Press; Kluwer Acad. Publ., 2000.
18. *Huppert B.* Endliche Gruppen. I. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1967.
19. *Weinstein M. (ed)* Between nilpotent and solvable. Passaic; New York: Polygonal Publ. House, 1982.

Статья поступила 7 января 2016 г.

Xingzheng Tang (Тан Синчжун), Yu Ye (Е Юй), Wenbin Guo (Го Вэньбин)
School of Mathematical Sciences,
University of Science and Technology of China
Hefei, 230026 P.R. China
`tangxz@mail.ustc.edu.cn`, `yeyu@ustc.edu.cn`, `wbguo@ustc.edu.cn`