Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2017. Том 58, № 2

УДК 512.5

3–ЛОКАЛЬНАЯ ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ $M(24)$

М. Р. Саларьян

Аннотация. Группа $M(24)$ распознается по строению нормализатора 3-центрального элемента. Как следствие, группа $M(24)$ распознается по двум своим 3-локальным подгруппам.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.213

Ключевые слова: конечная группа, конечная простая группа.

1. Введение

Группа $M(24)$ является группой Фишера и характеризуется своей 2-локальной информацией в [1]. Производная подгруппа этой группы проста и характеризуется своей 3-локальной информацией в [2] и своей 2-локальной информацией в [3]. В настоящей работе $M(24)$ распознается по своей 3-локальной информации. Для формулировки основного результата потребуется

Определение 1.1. Пусть X — конечная группа. Будем говорить, что X *подобна 3-нормализатору в* $M(24)$, если

i) $O_3(X)$ — экстраспециальная группа порядка 3^{11} и периода 3,
ii) $X/O_3(X) \cong 2 \times U_5(2) : 2$ и $C_X(O_3(X)) = Z(O_3(X))$,
iii) если h — инволюция и $hO_3(X) \in Z(X/O_3(X))$, то h централизует $Z(O_3(X))$.

В настоящей работе доказывается

Теорема 1.2. *Пусть G — конечная группа и $\tau \in G$ — элемент порядка 3. Положим $H_1 = N_G(\langle\tau\rangle)$ и допустим, что H_1 подобна 3-нормализатору в $M(24)$. Пусть $U \leq O^2(H_1)$ — элементарная абелева группа порядка 16 такая, что $N_{O^2(H_1)}(U)O_3(H_1)/O_3(H_1)$ является расширением специальной группы порядка 2^8 посредством $3\times A_5$. Пусть A — подгруппа порядка 4 в U и никакая инволюция из A не является 2-центральной инволюцией в H_1. Тогда*

(i) *Существует единственная подгруппа $B \leq \langle r, U\rangle$ порядка 8, содержащая A такая, что $C_{H_1}(B) = C_{H_1}(A)$, где $r \in H_1$ — инволюция такая, что $rO_3(H_1) \in Z(H_1/O_3(H_1))$.*

(ii) *Пусть B из (i). Если $\langle\tau\rangle$ не слабо замкнута в $C_{H_1}(B)$ по отношению к $C_G(B)$, то G изоморфна $M(24)$.*

Все рассматриваемые в настоящей работе группы конечны. Будем использовать обозначения из [1] для групп Фишера и обозначения атласа из [4] для расширений групп и других простых групп, за исключением симплектических. Вместо обозначения $S_n(q)$ из [4] будем использовать обозначение $PSp_n(q)$. В остальном используются обозначения из [5]. Для конечной группы G через $O(G)$ обозначаем наибольшую нормальную подгруппу G нечетного порядка. Пусть p

простое, p-элемент x группы G называется *p-центральным*, если $C_G(x)$ содержит силовскую p-подгруппу G; если $C_G(x)$ не содержит силовской p-подгруппы G, то будем говорить, что x является *не p-центральным*. Для p-группы P через $J(P)$ обозначаем подгруппу Томпсона P. Обозначим через p^{1+2n} и p^{m+2n} ($m \geq 2$) экстраспециальную группу порядка p^{1+2n} и специальную группу порядка p^{m+2n} с центром порядка p^m соответственно. Пусть V — векторное пространство и $P(V)$ — множество 1-мерных подпространств V. Будем говорить, что H *имеет вид* $A.B.C.\ldots.Z$, если H имеет нормальный ряд с факторами вида $A, B, C, \ldots, Z$. Пусть $T \leq T_1 \leq H$ — группы, тогда T называется *слабо замкнутой* в T_1 по отношению к H, если из условия $T^h \leq T_1$ для $h \in G$ следует, что $h \in N_H(T)$.

Теорема 1.2 может найти применение в текущем проекте Майерфранкенфельда, Штельмахера и Штрота по классификации групп локальной характеристики p (см. [6, 7]).

Статья организована следующим образом: с учетом обозначений теоремы 1.2 в разд. 2 выбирается подходящая инволюция m из H_1 и доказывается, что $C_G(m) \cong 2 \times M(23)$. В разд. 3 доказывается существование элементарной абелевой подгруппы M порядка 2^{12} в $C_G(m)$ такой, что $N_G(M)/M \cong M_{24}$. Наконец, с помощью леммы Томпсона о трансфере [2, теорема 1.1] доказывается, что G содержит подгруппу H индекса 2, изоморфную $M(24)'$. Отсюда следует, что $G \cong M(24)$, и теорема 1.2 доказана.

2. Распознавание $M(23)$

Пусть G — конечная группа и $\tau \in G$ — элемент порядка 3 такой, что $N_G(\langle\tau\rangle)$ подобна 3-нормализатору в $M(24)$. В этом разделе будет определено строение централизатора не 2-центральной инволюции группы G. Выберем подходящую инволюцию $m \in G$ и докажем, что $C_G(m) \cong 2 \times M(23)$. Положим $H_1 = N_G(\langle\tau\rangle)$ и $R = O_3(H_1)$. Пусть $r \in H_1$ — инволюция такая, что $rO_3(H_1) \in Z(H_1/O_3(H_1))$.

Лемма 2.1. (i) *$C_{H_1}(r) \cong (6 \times U_5(2)) : 2$,*

(ii) *r действует без неподвижных точек на $O_3(H_1)/Z(O_3(H_1))$.*

Доказательство. Заметим, что 11 не делит порядок $PSp_8(3)$. Поскольку 11 делит порядок $U_5(2)$, $C_{H_1}(O_3(H_1)) = Z(O_3(H_1))$ и $rO_3(H_1) \in Z(H_1/O_3(H_1))$, то r действует без неподвижных точек на $O_3(H_1)/Z(O_3(H_1))$. По [4, с. 73] мультипликатор Шура группы $U_5(2)$ тривиален. Таким образом, $C_{H_1}(r)' \cong U_5(2)$, и лемма доказана. □

По лемме 2.1(i) и [2, лемма 2.2] существует элементарная абелева подгруппа U порядка 16 в H_1' такая, что $N_{C_{H_1}(r)'}(U)$ — расширение специальной группы порядка 2^8 с центром U посредством $(3 \times A_5)$. Пусть a и d — две различные инволюции из U такие, что d и a — это две 2-центральные инволюции из $C_G(\tau)$. Положим $z = ad$, тогда z — не 2-центральная инволюция из $C_G(\tau)$. По [2, лемма 2.2] существует элементарная абелева подгруппа $A \leq U$ порядка 4, содержащая z, такая, что все инволюции из A сопряжены в $N_{H_1}(U)$ и $A = \langle z, ab\rangle$, где b сопряжена с d в $N_{H_1}(U)$. Зафиксируем обозначение A для такой подгруппы U. Положим $t = ab$, $m = rd$ и $B = \langle m, A\rangle$.

Лемма 2.2. (i) *$C_R(z)$ — экстраспециальная группа порядка 3^7, $C_R(m, z) = C_R(z)$, $C_{H_1}(m, z)$ имеет вид $3^{1+6}.2.2^{4+4}.3^2.2$ и $z \in C_{H_1}(m, z)'$, $O_3(C_{H_1}(z)) = C_R(z)$, $O_2(C_{H_1}(z)/C_R(z)\langle r\rangle)$ — специальная группа порядка 2^8,*

$$Z(O_2(C_{H_1}(z)\langle r\rangle/C_R(z)\langle r\rangle)) = UC_R(z)\langle r\rangle/C_R(z)\langle r\rangle,$$

$C_{H_1}(z)/O_{3,2}(C_{H_1}(z))$ — расширение элементарной абелевой группы порядка 9 посредством группы порядка 4. Далее, $C_{H_1}(z)$ содержит силовскую 3-подгруппу $C_G(z)$ и $O_{3'}(C_{H_1}(z)) = \langle z, m\rangle$.

(ii) *$C_R(d)$ — экстраспециальная группа порядка 27, $O_{3'}(C_{H_1}(m,z)) = \langle m, z\rangle$ и $C_{H_1}(m,z)$ содержит силовскую 3-подгруппу $C_G(m,z)$, $O_3(C_G(\tau,d)) = C_R(d)$ — экстраспециальная группа порядка 3^3, $O_{3,2}(C_G(\tau,d))/C_R(d)$ — прямое произведение группы порядка 2 и экстраспециальной группы порядка 2^7 и $C_G(d,\tau)/O_{3,2}(C_G(\tau,d))$ — расширение экстраспециальной группы порядка 27 посредством $SL_2(3)$.*

(iii) *$C_{H_1}(m)$ имеет вид $3^{1+8}.2.2^{1+6}.3^{1+2}.GL_2(3)$ и содержит силовскую 3-подгруппу $C_G(m)$.*

(iv) *$C_{H_1}(rz)$ имеет вид $3^{1+4}.2.2^{4+4}.3^2.4$ и содержит силовскую 3-подгруппу $C_G(rz)$.*

(v) *$N_{H_1}(\langle m,z\rangle)$ имеет вид $3^{1+6}.2.2^{4+4}.3^2.4$ и содержит силовскую 3-подгруппу $N_G(\langle m,z\rangle)$.*

(vi) *$C_R(U) = Z(R)$.*

Доказательство. Лемма следует из [2, лемма 3.2]. Заметим, что $C_R(r) = Z(R)$, $C_{H_1}(m)R/R = C_{H_1}(d)R/R$ и $C_{H_1}(rz)R/R = C_{H_1}(z)R/R$. $\square$

Лемма 2.3. (i) *$C_R(B)$ — экстраспециальная группа порядка 3^5, $C_R(B) = C_R(A)$ и $O_3(C_{H_1}(B)) = C_R(B)$.*

(ii) *$O_2(C_{H_1}(B)/\langle C_R(B), B\rangle) \cong Q_8 \times Q_8$, $Z(O_2(C_{H_1}(B)/\langle C_R(B), B\rangle)) = U\langle C_R(B), B\rangle/\langle C_R(B), B\rangle$ и $C_{H_1}(B)/O_{3,2}(C_{H_1}(B)) \cong S_3$.*

(iii) *$O_2(C_{H_1}(B)) = B$ и $\langle\tau\rangle$ является центром каждой силовской 3-подгруппы $C_{H_1}(B)$. В частности, $C_{H_1}(B)$ содержит силовскую 3-подгруппу $C_G(B)$.*

(iv) *$C_{H_1}(B) = C_{H_1}(A)$. Более того, если $C \leq \langle r, U\rangle$ — подгруппа порядка 8, содержащая A, такая, что $C_{H_1}(A) = C_{H_1}(C)$, то $B = C$.*

(v) *инволюции d и a действуют без неподвижных точек на $C_R(z)/Z(R)$.*

Доказательство. Имеем $C_R(B) \leq C_R(A) \leq C_R(z)$. По [2, лемма 3.3] $C_R(A)$ — экстраспециальная группа порядка 3^5 и $O_3(C_{H_1}(A)) = C_R(A)$. По лемме 2.2(ii) $C_R(a)$ и $C_R(b)$ — экстраспециальные группы порядка 27. Поскольку $z = ad$ и aR и bR сопряжены с dR в H_1/R, то d и a действуют свободно на $C_R(z)/Z(R)$, и (v) доказано. Так как r и d действуют свободно на $C_R(A)$, то $C_R(A) = C_R(B)$. Пп. (i), (ii) и (iii) следуют из [2, лемма 3.3]. Чтобы завершить доказательство, достаточно доказать, что если $C \leq \langle r, U\rangle$ — подгруппа порядка 8, содержащая A, такая, что $C_{H_1}(A) = C_{H_1}(C)$, то $B = C$.

Поскольку $C_R(C)$ — экстраспециальная группа порядка 3^5, по леммам 2.1 и 2.2(ii) получаем $r \notin C$ и C не содержит инволюций, сопряженных с d в H_1. По [2, лемма 2.2] C не содержится в U. Следовательно, найдется элемент $y = rx \in C$ такой, что $1 \neq x \in U \setminus A$. Все инволюции из A не 2-центральны в H_1, поэтому по [2, лемма 2.2] можно считать, что x — 2-центральная инволюция из H_1. Если x равно a или b, или d, то $C = B$, и лемма доказана. Поэтому будем считать, что $x \neq a$, $x \neq b$ и $x \neq d$. Тогда по [2, лемма 2.2] элементы zx, ztx и tx сопряжены с z в H_1. По лемме 2.2(ii) $C_R(x)$ — экстраспециальная группа порядка 27. Если $C_R(x) \cap C_R(z) = Z(R)$, то $|C_R(zx)| \leq 3^4$, что противоречит лемме 2.2(i). Таким образом, $C_R(x) \leq C_R(z)$. Аналогично $C_R(x) \leq C_R(t)$ и, следовательно, $C_R(x) \leq C_R(A) = C_R(C)$. Но по лемме 2.1(i) имеем $C_R(rx, x) = Z(R)$; противоречие. Полученное противоречие доказывает лемму. $\square$

Лемма 2.3(iv) доказывает п. (i) теоремы 1.2. Докажем п. (ii) теоремы 1.2.

По [2, лемма 2.2] каждая подгруппа U порядка 4, все инволюции которой не 2-центральны в H_1, сопряжена с A в H_1. Поэтому можно считать, что τ не слабо замкнута в $C_{H_1}(B)$ по отношению к $C_G(B)$.

Лемма 2.4. (i) $C_G(B)/B \cong U_6(2)$ *и* $A \leq C_G(B)'$.
(ii) $C_G(m,z)/\langle m\rangle$ *изоморфна квазипростой группе* $2M(22)$.
(iii) $C_G(m) \cong 2 \times M(23)$.

Доказательство. По лемме 2.2(i),(iii) имеем $C_G(m) \neq C_G(m,z)$. Таким образом, (iii) следует из (ii) и [1, теорема 32.1]. Аргументы для (i) и (ii) такие же, как в [2, лемма 3.4], поэтому их опускаем. $\square$

3. Доказательство теоремы 1.2

В этом разделе доказывается теорема 1.2. Используя лемму Томпсона о трансфере и [2, теорема 1.1], докажем, что $G' \cong M(24)'$. Тогда теорема 1.2 будет доказана. Прежде всего понадобится

Лемма 3.1. *Пусть* $X \cong U_6(2)$ *и* $x \in X$ *— 3-центральный элемент в* X. *Тогда*
(i) $C_X(x)$ *имеет вид* $3^{1+4}.(Q_8 \times Q_8).3.2$.
(ii) *Пусть* $Y \leq C_X(x)$ *— 2-группа такая, что*

$$YO_3(C_X(x)) = O_2(C_X(x)/O_3(C_X(x))).$$

Тогда в X *найдется элементарная абелева подгруппа* M *порядка* 2^9, *содержащая* $Z(Y)$, *такая, что* $N_X(M)/M \cong L_3(4)$. *Далее, для* $T \in \mathrm{Syl}_2(N_X(M))$ *выполнено* $M = J(T)$.

Доказательство. Пусть $x \in X$ — 3-центральный элемент, тогда строение $C_X(x)$ полностью описано в [8]. Таким образом, (i) следует из [8, теорема 1]. Пусть $Y \leq C_X(x)$ — 2-группа такая, что $YO_3(C_X(x)) = O_2(C_X(x)/O_3(C_X(x)))$. Пусть $Z(Y) = \langle z_1, t_1\rangle$, где z_1 и t_1 сопряжены в $C_X(x)$. Тогда по [8, лемма 25; 4, с. 115] имеем $C_X(z_1) = O_2(C_X(z_1))K$, где $K \cong U_4(2)$ и $t_1 \in K$. Пусть $T \in \mathrm{Syl}_2(C_X(z_1))$. Тогда $T \in \mathrm{Syl}_2(X)$ и по [1, теорема 30.1] в T найдется элементарная абелева подгруппа M порядка 2^9, содержащая z_1, такая, что $N_X(M)/M \cong L_3(4)$. По [1, лемма 30.3] $M = J(T)$, и по [1, лемма 30.5] z_1 слабо замкнута в $O_2(C_X(z_1))$. По [1, лемма 30.3] $M \cap K$ — элементарная абелева порядка 2^4. Далее, $N_X(M) \cap K$ является расширением $M \cap K$ посредством A_5. По [4, с. 26] каждая инволюция из K сопряжена с инволюцией из $M \cap K$ в K. Таким образом, можно считать, что $t_1 \in M$, и лемма доказана. $\square$

По леммам 2.4(i) и 3.1 обозначим через M элементарную абелеву подгруппу порядка 2^{12} из $C_G(B)$, содержащую U и m такую, что $N_{C_G(B)}(M)/M \cong L_3(4)$ и $C_G(B,M) = M$. По лемме 2.4(iii) и [1, лемма 25.7] имеем $N_{C_G(m)}(M)/M \cong M_{23}$.

Лемма 3.2. *Пусть* $\overline{X} = N_{C_G(m)}(M)/M \cong M_{23}$. *Тогда* $\overline{X}$ *имеет 7 орбит* L_i, $i = 1, \dots, 7$, *на* $P(M)$ *таких, что*
(i) $L_1 = \{\langle m\rangle\}$, $|L_2| = |L_7| = 23$, $\langle z\rangle \in L_2$, $L_7 = \langle mz\rangle^{\overline{X}}$ *и* $\overline{X}$ *действует 3-транзитивно на* L_2 *и* L_7.
(ii) $|L_3| = |L_6| = 253$, $\langle t\rangle \in L_3$ *и* $L_6 = \langle mt\rangle^{\overline{X}}$.
(iii) $|L_4| = |L_5| = 1771$, $\langle a\rangle \in L_4$ *и* $L_5 = \langle ma\rangle^{\overline{X}}$. *В частности,* $\langle rz\rangle \in L_5$.
(iv) *Пусть* $S \in \mathrm{Syl}_2(N_{C_G(m)}(M))$. *Тогда* $M = J(S)$.
(v) $C_{\overline{X}}(z) \cong M_{22}$.

(vi) *Пусть* $Y = M \cap O^2(C_G(m))$. *Тогда* $U \le Y$, $m \notin Y$, $Y = \langle L_2 \cup L_3 \cup L_4 \rangle$, $|Y| = 2^{11}$ *и* Y *нормальна в* $N_{C_G(m)}(M)$.

(vii) *Всякая инволюция из* $C_G(m)$ *сопряжена с инволюцией из* M.

Доказательство. П. (v) следует из леммы 2.4(ii) и [1, лемма 25.7], а п. (vii) вытекает из [1, лемма 37.4]. По [1, лемма 25.7] $C_G(m)$ содержит элементарную абелеву подгруппу M порядка 2^{12} такую, что $N_{C_G(m)}(M)/M \cong M_{23}$. По лемме 2.4(ii) имеем $C_G(z,m) \cong 2M(22)$. Конечно, $C_G(z,m)$ содержит силовскую 2-подгруппу $G_G(m)$. Пусть $T \in \mathrm{Syl}_2(N_{C_G(m)}(M))$. Можно считать, что $T \in \mathrm{Syl}_2(C_G(z,m)))$, поэтому $z \in M$. По [2, лемма 2.6] $M = J(T)$, и (iv) доказано.

Пусть $\overline{X} = N_{C_G(m)}(M)/M$ и $Y = M \cap O^2(C_G(m))$. Тогда $|Y| = 2^{11}$ и по [4, с. 177] получаем $N_{O^2(C_G(m))}(Y)/Y \cong M_{23}$. Далее, $\overline{X} \cong N_{O^2(C_G(m))}(Y)/Y$. По [1, лемма 22.4] $\overline{X}$ имеет 7 орбит L_i, $i = 1, \dots, 7$, на $P(M)$ таких, что $L_1 = \{\langle m \rangle\}$, $|L_2| = |L_7| = 23$, $\langle z \rangle \in L_2$, $L_7 = \langle mz \rangle^{\overline{X}}$, и $\overline{X}$ действует 3-транзитивно на L_2 и L_7. Имеем $|L_3| = |L_6| = 253$, $L_3 = \langle xy \rangle^{\overline{X}}$, где $\langle x \rangle$ и $\langle y \rangle$ — два различных элемента из L_2, и $L_6 = \langle mx \rangle^{\overline{X}}$, где $\langle x \rangle \in L_3$. Далее, $|L_4| = |L_5| = 1771$, $L_4 = \{\langle xyk \rangle$, где $\langle x \rangle$, $\langle k \rangle$ и $\langle y \rangle$ — три различных элемента из $L_2\}$, и $L_5 = \langle mx \rangle^{\overline{X}}$, где $\langle x \rangle \in L_4$. Наконец, $\langle L_2 \cup L_3 \cup L_4 \rangle = Y$. По (vii) всякая инволюция из $C_G(m)$ сопряжена с инволюцией из L_i для некоторого $i = 1, \dots, 7$. Также по [8, лемма 3] никакой элемент из L_i не сопряжен с элементом из L_j в $C_G(m)$ при $i \ne j$ для $i, j = 1, \dots, 7$. Заметим, что для $T \in \mathrm{Syl}_2(C_{H_1}(U))$ выполнено $T \le C_{H_1}(m)$. Поскольку $U \le T'$, имеем $U \le M \cap C_G(m)' = Y$. Положим $u = bd$. Тогда по [2, лемма 2.2] u сопряжен с z в $C_{C_{H_1}(r)'}(m) = C_{C_{H_1}(r)'}(d)$. Следовательно, u сопряжен с z в $N_{C_G(m)}(M)$, поэтому $\langle u \rangle \in L_2$. Поскольку $zu = adbd = ab = t$, получаем, что $\langle t \rangle$ содержится в L_3, и тогда $\langle mt \rangle$ содержится в L_6. По [2, лемма 2.2] найдется инволюция $c \in U$ такая, что $c \notin \{a, b, d\}$, a и c сопряжены в $C_{C_{H_1}(r)'}(d)$ и z сопряжена с abc в $C_{H_1}(m)$. Следовательно, $\langle abc \rangle \in L_2$ и $\langle a \rangle \in L_4$, откуда $\langle abczu \rangle = \langle c \rangle \in L_4$. Поскольку $ma = rda = rz$, то $\langle rz \rangle \in L_5$, и лемма доказана. $\square$

По лемме 3.2 $N_{C_G(m)}(M)/M$ имеет 7 орбит на $P(M)$. Будем использовать обозначение L_i, $i = 1, \dots, 7$, из леммы 3.2 для орбит $N_{C_G(m)}(M)/M$ на $P(M)$. Положим $M_1 = \langle L_2 \cup L_3 \cup L_4 \rangle$. Тогда по лемме 3.2(vi) $|M_1| = 2^{11}$ и $M_1 = M \cap O^2(C_G(m))$.

Лемма 3.3. (i) $N_G(M)/M \cong M_{24}$.

(ii) *Пусть* $S \in \mathrm{Syl}_2(N_G(M))$. *Тогда* $M = J(S)$.

(iii) $N_G(M)$ *содержит силовскую 2-подгруппу из* G.

(iv) $N_G(M)/M$ *имеет четыре орбиты на* $P(M)$ *длин* 24, 276, 2024 *и* 1771. *Далее, при действии* $N_G(M)/M$ *на* $P(M)$ *имеем:* $L_2 \cup L_3$ *является орбитой, содержащей* $\langle z \rangle$ *и* $\langle t \rangle$, $L_7 \cup \{\langle m \rangle\}$ *является орбитой, содержащей* $\langle m \rangle$, *и* L_4 *является орбитой, содержащей* $\langle a \rangle$.

(v) $O_2(N_G(M)') = M_1$, $N_G(M)'/M_1 \cong M_{24}$ *и* $N_G(M)'/M_1 \cong M_{24}$ *имеет две орбиты на инволюциях из* M_1 *длин* 1776 *и* 276. *Кроме того,* $m \notin M_1$ *и* $M_1 \le C_G(m)'$.

(vi) $N_G(M)$ *контролирует слияние элементов в* M.

(vii) *Существует инволюция* $x \in M$ *такая, что* $x^G \cap N_G(M)' = \varnothing$.

Доказательство. Имеем $C_G(m, M) = C_G(M) = 1$, так что $N_G(M)/M$ изоморфна подгруппе $GL_{12}(2)$. Далее, $N_{C_G(m)}(M)/M \cong M_{23}$. Положим $\overline{X} =$

$N_{C_G(m)}(M)/M$ и $\overline{Y} = N_G(M)/M$. Так как t и z сопряжены в H_1, по леммам 3.2(iv),(i),(ii) и 3.1 получаем, что $\overline{Y} \neq \overline{X}$. По лемме 2.2 m не сопряжен с z или d в G. Поэтому m также не сопряжен с a или t в G. По лемме 2.2(iii),(iv) m не сопряжен с rz в G. Поскольку $mt = rdab$ и $rR \in Z(H_1/R)$, по [2, лемма 2.2] получаем, что mt сопряжен с rz в G. Следовательно, m также не сопряжен с mt в G. Таким образом, m не сопряжен с z, t, mt, a и rz в G. Так как $\langle z\rangle \in L_2$, $\langle t\rangle \in L_3$, $\langle mt\rangle \in L_6$, $\langle a\rangle \in L_4$, $\overline{X} \neq \overline{Y}$ и $\langle rz\rangle \in L_5$, получаем, что $L_7 \cup L_1$ является орбитой $\overline{Y}$ на $P(M)$, содержащей $\langle m\rangle$. Тем самым $\overline{Y}$ имеет на $P(M)$ орбиту I длины 24 такую, что $\overline{Y}$ действует 4-транзитивно на I и стабилизатор каждого элемента из I в $\overline{Y}$ изоморфен M_{23}. Следовательно, $\overline{Y} \cong M_{24}$, и (i) выполнено. Так как $\overline{Y}$ 4-транзитивна на I, то $\overline{Y}$ имеет орбиты длины $\binom{24}{2} = 276$ и $\binom{24}{3} = 2024$. Таким образом, оставшиеся 1771 элементов лежат в одной орбите. Положим $G_1 = O^2(C_G(m))$. По лемме 3.2(vi) $m \notin M_1$, M_1 имеет порядок 2^{11} и $M \cap G_1 = M_1$. Пусть $x \in G_1 \cap N_G(M)$ — элемент порядка 23. Тогда $M = \langle m\rangle \oplus [x, M]$ и $[M, x]$ — точный неприводимый $N_{G_1}(M)/M_1$-модуль. Отсюда, так как мультипликатор Шура M_{24} тривиален (см. [4, с. 96]), заключаем, что $O_2(N_G(M)') = M_1$ и $N_G(M)'/M_1 \cong M_{24}$. Это и [3, лемма 2.4] доказывают (v). Положим $G_2 = (N_G(M))'$. Заметим, что $\langle m, G_2\rangle/M = Y/M$ и, следовательно, орбиты G_2/M_1 на $P(M_1)$ также являются орбитами Y/M на $P(M_1)$. По длинам орбит Y/M на $P(M)$ замечаем, что $L_2 \cup L_3$ — орбита G_2/M_1, содержащая $\langle z\rangle$, $\langle t\rangle$, L_4 — орбита G_2/M_1, содержащая $\langle a\rangle$, и выполнено (iv). Теперь группы G_2 и M_1 удовлетворяют условиям теоремы B из [9]. Таким образом, по [9, лемма 3] получаем, что $M_1 = J(T_1)$ для $T_1 \in \mathrm{Syl}_2(G_2)$. Следовательно, $M = J(T)$ для $T \in \mathrm{Syl}_2(N_G(M))$, и выполнены (ii) и (vi).

Пусть $\langle x\rangle \in L_1 \cup L_7 \cup_5 \cup L_6$. Тогда $x \notin G_2$. По (vi) и лемме 3.2 (vii) $x^G \cap C_G(m)' = \varnothing$. Отсюда по (vi) и ввиду того, что в $G_2 \setminus (C_G(m)' \cap N_G(M))$ всего один класс инволюций, заключаем, что найдется инволюция $k \in M \setminus G_2$ такая, что $k^G \cap G_2 = \varnothing$, и выполнено (vii). П. (iii) следует из (ii), и лемма доказана $\square$

Доказательство теоремы 1.2. П. (i) следует из леммы 2.3(iv). Пусть $T \in \mathrm{Syl}_2(N_G(M))$. По лемме 3.3 $T \in \mathrm{Syl}_2(G)$ и найдутся подгруппа S индекса 2 в T и инволюция $x \in M \setminus S$ такие, что $x^G \cap S = \varnothing$. Отсюда по лемме Томпсона о трансфере G имеет подгруппу H индекса 2 такую, что $x \notin H$. По лемме 3.3(v) имеем $m \notin H$. Отсюда в силу того, что $U \leq H_1' \leq G' \leq H$, заключаем, что $r \notin H$. Положим $K = H \cap H_1$. Тогда K и H удовлетворяют условиям теоремы 1.1 из [2], откуда $H \cong M(24)'$. Следовательно, $G \cong M(24)$, и теорема 1.2 доказана. $\square$

Благодарность. Автор благодарит профессора Гернота Штрота и профессора Майерфранкенфельда за полезные замечания. Также выражает признательность за финансовую поддержку от IMP. Во время выполнения данного проекта автор находился с визитом в Пекинском транспортном университете и благодарен всем сотрудникам математического факультета, особенно профессору Яньцюань Фэну, за гостеприимство и финансовую поддержку.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Aschbacher M.* 3-Transposition groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997.
2. *Salarian M. R.* A 3-local characterization of Fi_{24}' // J. Algebra. 2010. V. 324. P. 2804–2813.
3. *Salarian M. R.* A 2-local characterization for $M(24)'$ // Monatsch. Math. 2012. V. 167, N 3. P. 583–588.

4. *Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A.* Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1985.
5. *Aschbacher M.* Finite group theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1986.
6. *Meierfrankenfeld U., Stroth G.* Groups of local characteristic p. The H-structure theorem. (Preprint). http://conway1.mathematik.uni-halle.de/ stroth/.
7. *Meierfrankenfeld U., Stellmacher B., Stroth G.* Finite groups of local characteristic p: An overview // Proc. Durham Conf. Finite Groups. River Edge, NJ: World Sci. Publ., 2003.
8. *Parker Ch.* A 3-local characterization of $U_6(2)$ and Fi_{22} // J. Algebra. 2006. V. 300, N 2. P. 707–728.
9. *Reifart A.* Some simple groups related to M_{24} // J. Algebra. 1977. V. 45, N 1. P. 199–209.

Статья поступила 9 декабря 2014 г.

Mohammed Reza Salarian (Саларьян Мохаммед Реза)
Department of Mathematics,
Kharazmi University,
Karaj/Tehran, Iran
salarian@khu.ac.ir