Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2017. Том 58, № 2

УДК 512.554.33+512.543.16

ОБ УНИВЕРСАЛЬНОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ НЕКОТОРЫХ СЧЕТНО ПОРОЖДЕННЫХ ЧАСТИЧНО КОММУТАТИВНЫХ СТРУКТУР

Е. Н. Порошенко

Аннотация. Рассмотрены универсальные теории частично коммутативных алгебр Ли, частично коммутативных метабелевых алгебр Ли и частично коммутативных метабелевых групп, определяющие графы которых являются деревьями со счетным числом вершин. Внутри этих классов алгебр Ли и групп найдены критерии совпадения универсальных теорий.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.212

Ключевые слова: частично коммутативная алгебра Ли, метабелева алгебра Ли, частично коммутативная метабелева группа, определяющий граф.

1. Введение

Пусть $G = \langle X; E\rangle$ — неориентированный граф без петель с множеством вершин X и множеством ребер E. *Частично коммутативной алгеброй Ли* над областью целостности R с единицей называется R-алгебра с множеством порождающих X и множеством определяющих соотношений вида

$$\{[y,z]=0 \,|\, y,z\in X;\ y \text{ и } z \text{ соединены ребром}\} \tag{1}$$

(здесь и далее для алгебр Ли $[g,h]$ обозначает лиевское произведение элементов g и h). Будем обозначать эту алгебру через $\mathscr{L}(X;G)$. Граф G называется *определяющим графом* соответствующей алгебры. Таким образом, $\mathscr{L}(X;G) = \mathscr{L}(X)/I$, где $\mathscr{L}(X)$ — свободная алгебра Ли с множеством порождающих X, а I — идеал, порожденный множеством соотношений вида (1).

Аналогично вводится определение частично коммутативной алгебры на произвольном многообразии. В этом случае частично коммутативная алгебра Ли — это R-алгебра, которая задается посредством того же множества порождающих и определяющих соотношений на них, а также тождеств, задающих данное многообразие. В частности, в данной статье будем рассматривать частично коммутативные метабелевы алгебры Ли, т. е. частично коммутативные алгебры в многообразии метабелевых алгебр Ли. По аналогии с обозначениями, введенными в предыдущем абзаце, свободную метабелеву алгебру Ли с множеством порождающих X будем обозначать через $M(X)$, а частично коммутативную метабелеву алгебру Ли с определяющим графом G — через $M(X;G)$.

Наконец, для произвольного неориентированного графа $G = \langle X; E\rangle$ без петель *частично коммутативной метабелевой группой* называется группа из

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 15–01–01485), а также Министерства образования и науки РФ (гос. задание № 214/138, проект 1052).

многообразия метабелевых групп с множеством порождающих X и множеством определяющих соотношений вида

$$\{yz = zy \mid y, z \in X;\ y \text{ и } z \text{ соединены ребром}\}.$$

Частично коммутативную метабелеву группу с определяющим графом G будем обозначать через $\mathscr{G}(X; G)$.

Как легко заметить, определения частично коммутативных алгебр Ли и частично коммутативных групп схожи между собой, а также схожи с определениями других частично коммутативных структур: ассоциативных алгебр, моноидов и т. д. (см. [1]).

Частично коммутативные группы в последнее время являются объектом пристального внимания (см., например, [2–15]). Из этих работ изучению универсальных теорий частично коммутативных групп посвящены [3, 5, 7, 9]. Что касается частично коммутативных алгебр Ли, то они до недавнего времени вообще почти не изучались. Однако за последние несколько для них также был получен ряд результатов (см. [16–20]). В частности, работы [18–20] посвящены исследованию универсальных теорий алгебр Ли. В первой из них найден критерий совпадения универсальных теорий в классах частично коммутативных алгебр Ли, определяющими графами которых являются деревья и циклы, а во второй и в третьей критерии совпадения универсальных теорий найдены для метабелевых алгебр Ли с теми же определяющими графами.

Однако нам неизвестны работы о бесконечно порожденных частично коммутативных структурах. В данной работе изучаются универсальные теории счетно порожденных частично коммутативных алгебр Ли, частично коммутативных метабелевых алгебр Ли, а также частично коммутативных метабелевых групп, а именно находятся критерии универсальной эквивалентности для выше перечисленных частично коммутативных структур со счетным числом порождающих в случае, когда их определяющими графами являются деревья.

В разд. 2 даны определения и приведены результаты, которыми будем пользоваться в данной статье. В разд. 3 доказаны основные результаты.

2. Предварительные сведения

Как отмечено выше, объектом исследования данной работы являются счетно порожденные частично коммутативные структуры (алгебры Ли и группы). Соответственно определяющие графы этих структур бесконечны, т. е. имеют бесконечное, а точнее, счетное количество вершин. Под *бесконечным неориентированным графом* $G = \langle X; E\rangle$ с множеством вершин X ($|X| = \infty$) и множеством ребер E будем понимать симметричное бинарное отношение на множестве X. Кроме того, так как в нашем случае рассматриваются графы без петель, соответствующее отношение должно быть иррефлексивным. Бесконечные графы со счетным количеством вершин будем называть *счетными*. В дальнейшем часто вместо «счетный граф» или «счетное дерево» будем писать просто «граф» или соответственно «дерево», если из контекста ясно, что граф счетный.

Пусть G — произвольный (конечный или бесконечный) граф с множеством вершин X. Будем использовать $PCS(X; G)$ в качестве общего обозначения для любой из алгебр Ли $\mathscr{L}(X; G)$, $M(X; G)$ или группы $\mathscr{G}(X; G)$. Про произвольные частично коммутативные структуры $PCS(X; G)$ и $PCS(Y; H)$ будем говорить, что они *одного вида*, если они обе являются частично коммутативными алгебрами Ли, частично коммутативными метабелевыми алгебрами Ли или частично коммутативными метабелевыми группами.

Для произвольного неориентированного графа H через $V(H)$ и $E(H)$ будем обозначать соответственно множество вершин и множество ребер этого графа. Далее, пусть $\check{V} \subseteq V(H)$. Через $H(\check{V})$ обозначим подграф (конечный или бесконечный) графа H, построенный на множестве вершин $\check{V}$, т. е. граф с множеством вершин $\check{V}$, ребрами которого являются все ребра графа H, соединяющие вершины из $\check{V}$. Отметим, что иногда в литературе подграфы называют *индуцированными*, *наследственными* или *полными подграфами*. Напомним, что через $\overline{H}$ обозначается граф $\langle V(H), (V(H))^2 \backslash (E(H) \cup \mathrm{id}_{V(H)}) \rangle$, где для произвольного множества S через id_S обозначается тождественное бинарное отношение: $\mathrm{id}_S = \{(x,x) \mid x \in S\}$; этот граф называется *дополнением графа* H.

Рассмотрим произвольный неориентированный граф $H = \langle Y; D \rangle$ без петель, где Y — множество вершин и D — множество ребер. Если $\{x,y\} \in D$, то будем писать $x \overset{H}{\leftrightarrow} y$. Аналогично если $Y_0 \subseteq Y$ и y — вершина графа H, смежная со всеми вершинами множества Y_0 в нем, то будем использовать обозначение $y \overset{H}{\leftrightarrow} Y_0$. Наконец, для $Y_0, Y_1 \subseteq Y$ будем писать $Y_0 \overset{H}{\leftrightarrow} Y_1$, если $y_1 \leftrightarrow y_2$ для любых элементов $y_1 \in Y_0$ и $y_2 \in Y_1$. В случае, когда речь идет об исходном графе, т. е. о графе $G = \langle X; E \rangle$, который является определяющим для рассматриваемой частично коммутативной структуры $PCS(X;G)$, будем опускать явное указание графа в обозначениях, т. е. вместо «$\overset{G}{\leftrightarrow}$» будем писать «$\leftrightarrow$».

Напомним, что *степенью* вершины x графа G называется количество вершин, смежных с x в G, а *простой цепью длины* m — последовательность вершин $y_0, y_1, \ldots, y_m$ такая, что все вершины, кроме, возможно, первой и последней, различны и $y_i \overset{G}{\leftrightarrow} y_{i+1}$ для всех $i \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$. Напомним широко известный факт из теории графов: граф G является деревом тогда и только тогда, когда для любой пары вершин существует единственная простая цепь, их соединяющая.

Нетрудно заметить, что в бесконечном связном графе $G = \langle X; E \rangle$ со счетным количеством вершин существует простая цепь, бесконечная в одну или в обе стороны, или вершина счетной степени (возможно, и то и другое одновременно).

Действительно, пусть степень каждой вершины конечна. Выберем в графе G произвольную вершину x и положим $X_0 = \{x\}$. Пусть X_1 — множество всех вершин, смежных с x, а P_1 — множество простых цепей длины 1, исходящих из вершины x. Все такие цепи, очевидно, соединяют вершину x с вершинами из X_1. Так как степень каждой вершины конечна, конечными будут множества X_1 и P_1.

По индукции пусть уже построены попарно не пересекающиеся конечные множества $X_0, X_1, \ldots, X_k$. Тогда пусть X_{k+1} — множество вершин, смежных с вершинами из X_k и не лежащих в множестве $\bigcup\limits_{i=1}^{k} X_i$, а P_{k+1} — множество цепей вида $x\hat{x}_1\hat{x}_2 \ldots \hat{x}_{k+1}$, где $\hat{x}_i \in X_i$ для $i = 1, 2, \ldots, k+1$, т. е., очевидно, все цепи из P_{k+1} простые. Снова в силу конечности множества X_k и конечности степеней всех вершин графа множество X_{k+1} также конечно. Аналогично получаем, что конечно множество P_{k+1}, причем каждый путь из P_{k+1} получается посредством добавления вершины из X_{k+1} к пути из P_k.

Если в G нет простых цепей бесконечной длины, исходящих из x, то выберем наименьшее s такое, что $P_s = \varnothing$. Тогда, очевидно, $X_s = \varnothing$, т. е. в графе нет ни одной вершины, которая была бы смежна с вершинами из X_{s-1} и при этом не лежала в множестве $\bigcup\limits_{i=1}^{s-1} X_i$. Так как G связен, $\bigcup\limits_{i=1}^{s-1} X_i = X$. Однако в силу доказанного выше множество $\bigcup\limits_{i=1}^{s-1} X_i$ конечно; противоречие.

Пусть $[u]$ — лиевский моном частично коммутативной алгебры Ли или частично коммутативной метабелевой алгебры Ли с множеством порождающих X. Через $\mathrm{supp}([u])$ обозначим множество порождающих, входящих в запись этого монома. Распространим это обозначение на множество лиевских многочленов: пусть $h = \sum\limits_j \alpha_j [u_j]$, тогда $\mathrm{supp}(h) = \bigcup\limits_j \mathrm{supp}([u_j])$. Аналогично пусть g — элемент частично коммутативной метабелевой группы с множеством порождающих X, тогда через $\mathrm{supp}(g)$ будем обозначать множество порождающих, входящих в запись этого элемента.

Напомним некоторые понятия, связанные с универсальными теориями алгебраических систем. Пусть Θ — формула без свободных переменных, в записи которой содержатся элементы некоторой алгебры A. Если эта формула истинна, будем писать $A \models \Theta$.

Определение 2.1. $\exists$-*предложением* называется формула без свободных переменных, имеющая вид

$$\exists w_1, \dots, w_m G(w_1, \dots, w_m),$$

где $G(w_1, \dots, w_m)$ — это формула исчисления предикатов соответствующей алгебраической системы, не содержащая кванторов.

Определение 2.2. Множество всех $\exists$-предложений, истинных в алгебраической системе A, называется ее *экзистенциальной теорией* или $\exists$-*теорией* алгебраической системы.

Определение 2.3. Две алгебраические системы одной и той же сигнатуры называются *экзистенциально эквивалентными*, если их экзистенциальные теории совпадают.

Аналогично определяется $\forall$-*предложение*, *универсальная теория* (или $\forall$-*теория*) алгебраической системы и *универсально эквивалентные* алгебраические системы.

Легко видеть, что алгебраические системы A_1 и A_2 экзистенциально эквивалентны тогда и только тогда, когда они универсально эквивалентны.

В теории моделей хорошо известна процедура замены функциональных символов предикатными. Любое множество вместе со всеми предикатами, индуцированными на нем, является подмоделью.

Приведем хорошо известный результат из теории моделей.

Теорема 2.4. *Произвольные алгебраические системы A_1 и A_2 универсально эквивалентны тогда и только тогда, когда для каждой конечной подмодели одной алгебраической системы существует изоморфная ей подмодель в другой алгебраической системе.*

Для произвольного (конечного или бесконечного) дерева H с множеством вершин Y через Y^* обозначим множество всех вершин H, не являющихся висячими. Назовем граф $H(Y^*)$ *внутренностью* дерева H и обозначим его через H^*. Для лучшего визуального восприятия если $\widehat{Y}$ — некоторое подмножество Y, то вместо $(H(\widehat{Y}))^*$ будем писать $H^*(\widehat{Y})$.

Как следует из [18], если граф H — конечное дерево, то H^* также является конечным деревом. Однако нетрудно видеть, что ограничение на количество вершин в этом случае несущественно. Следует отметить, что если $\widehat{Y} \subseteq Y$, то $G^*(\widehat{Y})$ является подграфом G^*.

Если $|Y^*| \geq 2$, то для каждой висячей вершины графа H^* выберем по одной смежной с ней вершине из $Y \backslash Y^*$ (если таких вершин несколько, то можно взять любую из них). Множество, полученное добавлением всех этих вершин к Y^*, обозначим через Y'. Если $|Y^*| = 1$, то это означает, что в графе H одна из вершин соединена со всеми остальными (которые соответственно являются висячими). В этом случае через Y' обозначим множество, полученное из Y^* добавлением к единственной вершине этого множества двух смежных с ней вершин. Граф $H(Y')$ обозначим через H'.

Приведем основные результаты об универсальных теориях из [7, 18, 19], а также некоторые вспомогательные утверждения, явно или неявно сформулированные (и доказанные) в этих статьях.

Пусть $G = \langle X; E\rangle$ — конечное дерево, и пусть $X^* = \{x_{t_1}, x_{t_2}, \ldots, x_{t_k}\}$, где $1 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_k \leq n$, $k < n$. Рассмотрим следующие формулы, которые в дальнейшем будут обозначаться через $\Phi_1(G)$, $\Phi_2(G)$, $\Phi_3(G)$:

$$\Phi_1(G) = \exists z_1, \ldots, z_n, u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_k \ \Psi_1(G; z_1, \ldots, z_n, u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_k), \tag{2}$$

где

$$\Psi_1(G; z_1, \ldots, z_n, u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_k) = \bigwedge_{x_i \leftrightarrow x_j} [z_i, z_j] = 0$$
$$\wedge \bigwedge_{x_i \not\leftrightarrow x_j} [z_i, z_j] \neq 0 \wedge \bigwedge_{i=1}^{k} [[u_i, v_i], z_{t_i}] = 0 \wedge \bigwedge_{i=1}^{k} [u_i, v_i] \neq 0; \tag{3}$$

$$\Phi_2(G) = \exists z_1 \ldots z_k u_1 \ldots u_k v_1 \ldots v_k \Psi_2(G; z_1, \ldots, z_n, u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_k), \tag{4}$$

где

$$\Psi_2(G; z_1, \ldots, z_k, u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_k) = \bigwedge_{i=1}^{k} [u_i, v_i] \neq 0 \wedge \bigwedge_{i=1}^{k} [[u_i, v_i], z_i] = 0$$
$$\wedge \bigwedge_{i \neq j} [[u_i, v_i], z_j] \neq 0 \wedge \bigwedge_{x_i \leftrightarrow x_j} [z_i, z_j] = 0 \wedge \bigwedge_{x_i \not\leftrightarrow x_j} [z_i, z_j] \neq 0; \tag{5}$$

$$\Phi_3(G) = \exists z_1, \ldots, z_n, u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_k$$
$$\Psi_3(G; z_1, \ldots, z_n, u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_k), \tag{6}$$

где

$$\Psi_3(G; z_1, \ldots, z_k, u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_k) = \bigwedge_{i=1}^{k} [u_i, v_i] \neq 1 \wedge \bigwedge_{i=1}^{k} [[u_i, v_i], z_i] = 1$$
$$\wedge \bigwedge_{i \neq j} [[u_i, v_i], z_j] \neq 1 \wedge \bigwedge_{x_i \leftrightarrow x_j} [z_i, z_j] = 1 \wedge \bigwedge_{x_i \not\leftrightarrow x_j} [z_i, z_j] \neq 1. \tag{7}$$

В (7) $[\cdot, \cdot]$ означает групповой коммутатор. Формула Φ_1 будет использоваться для частично коммутативных алгебр Ли, формула Φ_2 — для частично коммутативных метабелевых алгебр Ли, а формула Φ_3 — для частично коммутативных метабелевых групп.

Для вспомогательных формул вида (3), (5), (7) в данной статье также зарезервируем обозначения

$$\Psi_1(G; z_1, \ldots, z_n, u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_k),$$
$$\Psi_2(G; z_1, \ldots, z_k, u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_k),$$
$$\Psi_3(G; z_1, \ldots, z_k, u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_k).$$

Лемма 2.5 [7, 18, 19]. *Пусть $G = \langle X; E\rangle$ и $H = \langle Y; F\rangle$ — конечные деревья. Тогда*

(1) *если $\mathscr{L}(Y; H) \models \Phi_1(G)$, то G^* изоморфно подграфу графа H^*;*
(2) *если $M(Y; H) \models \Phi_2(G)$, то G^* изоморфно подграфу графа H^*;*
(3) *если $\mathscr{G}(Y; H) \models \Phi_3(G)$, то G^* изоморфно подграфу графа H^*.*

3. Универсальная эквивалентность

Нетрудно видеть, что, как и в случае конечных графов, любой подграф дерева является лесом (или, в частности, деревом). Для начала докажем следующую лемму о счетных деревьях.

Лемма 3.1. *Пусть $G = \langle X; E\rangle$ — дерево со счетным количеством вершин, и пусть $X_0 \subseteq X$ конечно. Тогда существует конечное поддерево $G_1 = \langle X_1; E_1\rangle$ дерева G такое, что $X_0 \subseteq X_1$.*

Доказательство. Если граф $G(X_0)$ связен, то доказывать нечего. Действительно, будучи подграфом дерева, граф $G(X_0)$ не имеет циклов.

Пусть граф $G(X_0)$ не связен. Рассмотрим произвольную вершину y. Пусть $Y \subset X_0$ — множество всех вершин, не достижимых из вершины y в графе $G(X_0)$. В силу связности графа G в этом графе для любой вершины $z \in Y$ есть конечная простая цепь, соединяющая y и z. Обозначим множество вершин в этих простых цепях через Z и положим $X_1 = X_0 \cup Z$. Докажем, что данное множество удовлетворяет условиям леммы. Действительно, граф $G_1 = G(X_1)$ связен по построению X_1: из любой вершины этого графа существует путь в любую другую (в частности, существует путь, проходящий через y). Осталось отметить, что любой связный подграф дерева сам является деревом. $\square$

Множество всех деревьев со счетным множеством вершин естественным образом разбивается на два класса: деревья, у которых множество вершин их внутренности конечно, и деревья, у которых это множество бесконечно. Будем называть деревья из первого из вышеперечисленных классов *деревьями конечного типа*, а деревья из второго класса — *деревьями бесконечного типа*.

Лемма 3.2. *Пусть $G = \langle X; E\rangle$ — конечное дерево, а $H = \langle Y; F\rangle$ — произвольное счетное дерево такие, что $X^* \neq \varnothing$ и G изоморфно подграфу H. Тогда*

(1) *предложение $\Phi_1(G)$ истинно в алгебре Ли $\mathscr{L}(Y; H)$;*
(2) *предложение $\Phi_2(G)$ истинно в алгебре Ли $M(Y; H)$;*
(3) *предложение $\Phi_3(G)$ истинно в группе $\mathscr{G}(Y; H)$.*

Доказательство. Положим $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $X^* = \{x_{t_1}, x_{t_2}, \ldots, x_{t_k}\}$. Для доказательства п. (1) нужно найти значения $z_1, \ldots, z_n, u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_k \in \mathscr{L}(Y; H)$, для которых истинна формула

$$\Psi_1(G; z_1, \ldots, z_n, u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_k),$$

а для доказательства пп. (2), (3) — значения $z_1, \ldots, z_k, u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_k \in PCS(Y; H)$, для которых истинны формулы

$$\Psi_2(G; z_1, \ldots, z_n, u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_k),$$

если $PCS(X; G) = M(X; G)$, и

$$\Psi_3(G; z_1, \ldots, z_n, u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_k),$$

если $PCS(X; G) = \mathscr{G}(X; G)$.

Пусть $\varphi : G \hookrightarrow H$ — изоморфное вложение графа G в граф H, и пусть $\varphi(x_i) = \breve{y}_i$ для $i = 1, 2, \ldots, n$.

Для доказательства п. (1) положим $z_i = \breve{y}_i$ для $i = 1, 2, \ldots, n$, а при доказательстве пп. (2) и (3) пусть $z_i = \breve{y}_{t_i}$. Очевидно, что в этом случае $[z_i, z_j] = 0$ (в доказательстве п. (3) $[z_i, z_j] = 1$) тогда и только тогда, когда $\breve{y}_i \leftrightarrow \breve{y}_j$.

Далее, так как $x_{t_j} \in X^*$ для $j = 1, 2, \ldots, k$, каждая такая вершина смежна как минимум с двумя другими в графе G, соответственно $\breve{y}_{t_j} \in \varphi(X^*)$ смежна как минимум с двумя другими в графе H. Для каждого $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ выберем две различные вершины, смежные с $\breve{y}_{t_j}$, и обозначим их через $\breve{y}_{j,1}$ и $\breve{y}_{j,2}$. Положим $u_j = \breve{y}_{j,1}$, $v_j = \breve{y}_{j,2}$.

Отметим, что вершины $\breve{y}_{j,1}$ и $\breve{y}_{j,2}$ для $j = 1, 2, \ldots, k$ не являются смежными, в противном случае получили бы цикл $\breve{y}_{j,1}\breve{y}_{j,2}\breve{y}_j$ в графе G. Таким образом, для выбранных значений u_j, v_j получаем в алгебрах Ли $[u_j, v_j] \neq 0$, а в группе — $[u_j, v_j] \neq 1$. Для частично коммутативных алгебр Ли имеем $[[u_j, v_j], z_j] = [[u_i, z_i], v_j] + [[u_i, [v_i, z_j]] = 0$. Для частично коммутативных метабелевых алгебр Ли $[[u_i, v_i], z_j] = 0$ для выбранных значений u_i, v_i, z_j тогда и только тогда, когда $i = j$. Действительно, $[[u_i, v_i], z_j] = [[y_{i,1}y_{i,2}], y_{t_j}]$, и из [19] следует, что это выражение равно 0 тогда и только тогда, когда $y_{t_j} \leftrightarrow \{y_{i,1}y_{i,2}\}$. Если $[[y_{i,1}y_{i,2}], y_{t_j}] = 0$ при $j \neq i$, то получаем цикл $y_{t_j}y_{i,1}y_{t_i}y_{i,2}$, что невозможно. Аналогично в случае частично коммутативных метабелевых групп $[[u_i, v_i], z_j] = 1$ для выбранных значений u_i, v_i, z_j тогда и только тогда, когда $i = j$. Действительно, $[[u_i, v_i], z_j] = [[y_{i,1}y_{i,2}], y_{t_j}]$, и из [7] следует, что это выражение равно 1 тогда и только тогда, когда $y_{t_j} \leftrightarrow \{y_{i,1}y_{i,2}\}$. Соответственно если $[[y_{i,1}y_{i,2}], y_{t_j}] = 1$ при $j \neq i$, то получаем цикл $y_{t_j}y_{i,1}y_{t_i}y_{i,2}$ в дереве G; противоречие. Таким образом, лемма доказана. $\square$

Следствие 3.3. *Пусть $G = \langle X; E\rangle$ — дерево конечного типа. Тогда*
(1) $\mathscr{L}(X; G) \models \Phi_1(G')$;
(2) $M(X; G) \models \Phi_2(G')$;
(3) $\mathscr{G}(X; G) \models \Phi_3(G')$.

Докажем аналог леммы 2.5 для бесконечных графов.

Лемма 3.4. *Пусть $G = \langle X; E\rangle$ — конечное дерево или дерево конечного типа и $H = \langle Y; F\rangle$ — произвольное дерево.*
(1) *Если $\mathscr{L}(Y; H) \models \Phi_1(G')$, то G^* изоморфно подграфу графа H^*.*
(2) *Если $M(Y; H) \models \Phi_2(G')$, то G^* изоморфно подграфу графа H^*.*
(3) *Если $\mathscr{G}(Y; H) \models \Phi_3(G')$, то G^* изоморфно подграфу графа H^*.*

Доказательство. Пусть $|X'| = n$ и $|X^*| = k$. Предположим что для некоторых $g_1, \ldots, g_n, h_1, \ldots, h_k, f_1, \ldots, f_k \in \mathscr{L}(Y; H)$ истинна формула

$$\Psi_1(G', g_1, \ldots, g_n, h_1, \ldots, h_k, f_1, \ldots, f_k)$$

или для некоторых $g_1, \ldots, g_k, h_1, \ldots, h_k, f_1, \ldots, f_k \in PCS(Y; H)$ истинна формула

$$\Psi_l(G', g_1, \ldots, g_k, h_1, \ldots, h_k, f_1, \ldots, f_k),$$

где $l = 2$, если $PCS(X; G) = M(X; G)$, и $l = 3$, если $PCS(X; G) = \mathscr{G}(X; G)$. Рассмотрим множество

$$Y_1 = \bigcup_{i=1}^{n} \operatorname{supp}(g_i) \cup \bigcup_{j=1}^{k} \operatorname{supp}(h_j) \cup \bigcup_{l=1}^{k} \operatorname{supp}(f_l)$$

в случае частично коммутативных алгебр Ли и множество

$$Y_1 = \bigcup_{i=1}^{k} \operatorname{supp}(g_i) \cup \bigcup_{j=1}^{k} \operatorname{supp}(h_j) \cup \bigcup_{l=1}^{k} \operatorname{supp}(f_l)$$

в случае частично коммутативных метабелевых алгебр Ли или частично коммутативных метабелевых групп. Это множество, очевидно, конечно, и ввиду леммы 3.1 его можно дополнить до конечного множества Y_0 такого, что $H(Y_0)$ — дерево. Если рассматривается алгебра $\mathscr{L}(Y; H)$, все элементы $g_1, \ldots, g_n, h_1, \ldots, h_k$, $f_1, \ldots, f_k$ лежат в конечно порожденной подалгебре $\mathscr{L}(Y_0; H(Y_0))$, а в остальных двух случаях элементы $g_1, \ldots, g_k, h_1, \ldots, h_k, f_1, \ldots, f_k$ лежат в конечно порожденной частично коммутативной подструктуре $PCS(Y_0; H(Y_0))$, следовательно, $PCS(Y_0; H(Y_0)) \models \Phi_l(G')$, где $l = 1$, если $PCS(X; G) = \mathscr{L}(X; G)$, $l = 2$, если $PCS(X; G) = M(X; G)$, и $l = 3$, если $PCS(X; G) = \mathscr{G}(X; G)$. Отметим, что $(G')^* = G^*$ для любого конечного графа или графа конечного типа G. Тогда по лемме 2.5 граф G^* изоморфен подграфу графа $H^*(Y_0)$, который является подграфом графа H^*, откуда получаем утверждение леммы. $\square$

Следующая теорема показывает, что класс частично коммутативных алгебр Ли (частично коммутативных метабелевых алгебр Ли, частично коммутативных групп Ли) с определяющими графами счетными деревьями конечного типа отделяется по универсальной теории от класса частично коммутативных алгебр Ли (соответственно частично коммутативных метабелевых алгебр Ли, частично коммутативных групп Ли) с определяющими графами счетными деревьями бесконечного типа.

Теорема 3.5. *Пусть $G = \langle X, E\rangle$ — дерево бесконечного типа, а $H = \langle Y, F\rangle$ — конечное дерево или дерево конечного типа. Тогда частично коммутативные структуры одного вида $PCS(X; G)$ и $PCS(Y; H)$ не являются универсально эквивалентными.*

Доказательство. Пусть дерево H такое, что $|Y^*| = \varnothing$. Тогда оно состоит либо из одной вершины, либо из двух вершин, соединенных между собой. В любом из этих случаев $PCS(Y; H)$ является абелевой частично коммутативной структурой. С другой стороны, $PCS(X; G)$, очевидно, не является абелевой частично коммутативной структурой. Следовательно, в случаях $PCS(X; G) = \mathscr{L}(X; G)$ и $PCS(X; G) = M(X; G)$ истинна формула $\exists u, v\, [u, v] \neq 0$, которая ложна в соответствующей структуре $PCS(Y; H)$, а в $\mathscr{G}(X; G)$ истинна формула $\exists u, v\, [u, v] \neq 1$, которая ложна в $\mathscr{G}(Y; H)$. Таким образом, можно считать, что $Y^* \neq \varnothing$.

Рассмотрим произвольное конечное множество $Z_1 \subseteq X^*$ такое, что $|Z_1| > |Y^*|$. Это можно сделать, так как $|X^*| = \infty$, а $|Y^*| < \infty$.

Из леммы 3.1 следует, что существует конечное подмножество Z_0 множества X^* такое, что $Z_1 \subseteq Z_0$ и $G(Z_0)$ — дерево. Очевидно, что в этом случае граф $G(Z_0)$ не изоморфен никакому подграфу H^*, так как $|Z_0| > |Y^*|$. В частности, отметим, что $|Z_0| \geq 2$.

Пусть U — множество висячих вершин графа $G(Z_0)$. Для каждой вершины из U выберем смежную с ней висячую вершину в графе G. Пусть V — множество выбранных таким образом вершин. Положим $Z = Z_0 \cup V$.

Так как $G(Z)$ является подграфом G, из леммы 3.2 следует, что в частично коммутативной структуре $PCS(X;G)$ истинна формула $\Phi_l(G(Z))$, где $l = 1$, если $PCS(X;G) = \mathscr{L}(X;G)$, $l = 2$, если $PCS(X;G) = M(X;G)$, и $l = 3$, если $PCS(X;G) = \mathscr{G}(X;G)$.

С другой стороны, поскольку $G^*(Z) = G(Z_0)$ не изоморфен никакому подграфу графа H^*, из леммы 2.5 следует, что предложение $\Phi_l(G)$ не может быть истинным в $PCS(Y;H)$, где $l = 1$, если $PCS(Y;H) = \mathscr{L}(Y;H)$, $l = 2$, если $PCS(Y;H) = M(Y;H)$, и $l = 3$, если $PCS(Y;H) = \mathscr{G}(Y;H)$. Таким образом, частично коммутативные структуры одного вида $PCS(X;G)$ и $PCS(Y;H)$ не являются универсально эквивалентными. $\square$

Итак, задача о нахождении критерия универсальной эквивалентности частично коммутативных алгебр Ли, определяющими графами которых являются деревья со счетным числом вершин, естественным образом разбивается на две в зависимости от того, является ли определяющий граф графом конечного или бесконечного типа.

Теорема 3.6. *Пусть $G = \langle X; E\rangle$ и $H = \langle Y; F\rangle$ — конечные деревья или деревья конечного типа. Частично коммутативные структуры одного вида $PCS(X;G)$ и $PCS(Y;H)$ универсально эквивалентны тогда и только тогда, когда $G^* \simeq H^*$.*

Доказательство. Случай, когда оба графа G и H конечны, был рассмотрен в [7, 18, 19], поэтому рассмотрим случай, когда хотя бы один из этих графов бесконечен.

Пусть частично коммутативные структуры одного вида $PCS(X;G)$ и $PCS(Y;H)$ универсально эквивалентны. Докажем, что в этом случае деревья G^* и H^* изоморфны.

Имеем $PCS(X;G) \models \Phi_l(G')$, где $l = 1$, если $PCS(X;G) = \mathscr{L}(X;G)$, $l = 2$, если $PCS(X;G) = M(X;G)$, и $l = 3$, если $PCS(X;G) = \mathscr{G}(X;G)$. Это следует из [7, 18, 19], если граф G конечен, и из леммы 3.2, если этот граф счетен. В силу универсальной эквивалентности структур $PCS(X;G)$ и $PCS(Y;H)$ получаем $PCS(Y;H) \models \Phi_l(G')$, где опять $l = 1, 2, 3$, если $PCS(Y;H)$ равно $\mathscr{L}(G;X)$, $M(X;G)$ и $\mathscr{G}(X;G)$ соответственно. Тогда по лемме 3.4 граф G^* изоморфен некоторому подграфу графа H^*. Однако, применяя аналогичные рассуждения для предложения $\Phi_l(H')$, получаем, что граф H^* изоморфен некоторому подграфу графа G^*. Так как графы G^* и H^* конечны, отсюда следует, что эти графы изоморфны.

Обратно, пусть деревья G^* и H^* изоморфны. Тогда изоморфны также графы G' и H'.

Пусть $\Gamma = \{g_1, \ldots, g_a\}$ — произвольное конечное множество ненулевых элементов частично коммутативной структуры $PCS(G;X)$, и пусть $\widehat{X} = X' \cup \bigcup\limits_{i=1}^{a} \mathrm{supp}(g_i)$ (в качестве X' можно выбрать любое множество, полученное из

X^*, как это описано в конце разд. 2). Тогда $G(\widehat{X})$ является деревом и подструктура $PCS(\widehat{X}; G(\widehat{X}))$ структуры $PCS(X; G)$, очевидно, конечно порожденная и содержит элементы g_i для $i \in \{1, 2, \ldots, a\}$. Заметим, что $G' \simeq G'(\widehat{X}) \simeq H'$, следовательно, из доказательств критериев универсальной эквивалентности в [7, 18, 19] получаем, что для модели Γ существует изоморфная ей подмодель $\Delta = \{h_1, h_2, \ldots, h_a\}$ конечно порожденной частично коммутативной структуры $PCS(Y'; H')$. Так как $PCS(Y'; H')$ является подструктурой структуры $PCS(Y; H)$, подмодели Γ и Δ изоморфны как подмодели из частично коммутативных структур $PCS(X; G)$ и $PCS(Y; H)$ соответственно.

Доказательство того, что для любой конечной модели частично коммутативной структуры $PCS(Y; H)$ существует изоморфная ей подмодель структуры $PCS(X; G)$, полностью аналогично. Отсюда и из теоремы 2.4 следует наше утверждение. $\square$

Определение 3.7. Граф G называется *локально вложимым* в граф H, если любой конечный подграф графа G изоморфно вкладывается в граф H.

Определение 3.8. Графы G и H называются *взаимно локально вложимыми*, если G локально вложим в H и H локально вложим в G.

Очевидно, что локальная вложимость конечных графов эквивалентна их изоморфности. Однако для бесконечных (даже счетных) графов это неверно. Более того, как показывает следующий пример, для счетных графов взаимная локальная вложимость не является достаточным условием даже того, что один из графов изоморфно вкладывается в другой.

Пример 3.9. Пусть L_∞ — линейный граф, бесконечный в одну сторону, и пусть $l_1, l_2, \ldots, l_k, \ldots$ — его вершины, пронумерованные в порядке следования, т. е. $\{l_i, l_j\} \in E(L_\infty)$ тогда и только тогда, когда $|i - j| = 1$. Каждой бесконечной последовательности натуральных чисел $S = (s_1, s_2, \ldots, s_m, \ldots)$ поставим в соответствие граф $L_\infty(S)$, полученный следующим образом: для каждого i к графу L_∞ добавляются s_i новых висячих вершин, и ребра, соединяющие эти вершины с l_i. Будем называть L_∞ *основой* графа $L_\infty(S)$.

Рассмотрим графы $L_\infty(S_1)$ и $L_\infty(S_2)$, где

$$S_1 = (0, 1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots),$$
$$S_2 = (0, 1, 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 1, 2, \ldots, 9, \ldots, 2, 1, 1, 2, \ldots, 16, \ldots, 2, 1, \ldots).$$

Покажем, что деревья $L_\infty(S_1)$ и $L_\infty(S_2)$ локально взаимно вложимы. Действительно, пусть T_0 — произвольное поддерево дерева $L_\infty(S_j)$, $j = 1, 2$, и V_j — множество вершин из основы графа $L_\infty(S_j)$, входящих в T_0. Очевидно, что вершины множества V_j являются последовательными вершинами в графе $L_\infty(S_j)$. Для каждой вершины из V_j найдем количество вершин, не принадлежащих V_j и смежных с этой вершиной в графе T_0. Пусть m — максимальное из полученных чисел. Тогда проблема свелась к тому, чтобы в графе $L_\infty(S_{3-j})$ найти $|V_j|$ последовательных вершин из основы этого дерева, каждая из которых смежна в этом графе не менее, чем с m вершинами, не лежащими в его основе. По построению графов $L_\infty(S_1)$ и $L_\infty(S_2)$ это возможно.

В то же время если $L_\infty(S_j)$ изоморфно вкладывается в $L_\infty(S_{3-j})$, то, очевидно, это означает, что из последовательности S_{3-j} можно удалить несколько первых членов, так что в полученной последовательности каждый элемент не меньше соответствующего элемента из S_j.

В последовательности S_2 бесконечное количество раз встречаются две единицы подряд, значит, две единицы подряд будут встречаться и в любой ее подпоследовательности S_2', полученной удалением нескольких первых членов. В то же время в последовательности S_1 начиная с четвертой позиции никогда не встретятся подряд два числа, не превосходящие 1. Следовательно, $L_\infty(S_1)$ не может изоморфно вкладываться в $L_\infty(S_2)$.

С другой стороны, пусть S_1' — последовательность, полученная удалением из S_1 нескольких первых членов. Будем сравнивать элементы S_1' с соответствующими элементами последовательности S_2. При этом разобьем S_1' на конечные участки вида $(1, 2, \dots, r)$, идущие друг за другом. Тогда в каждом последующем участке значение r возрастает на единицу (возможно, не учитываются несколько первых членов S_1, если эта последовательность начинается не с 1). Последовательность S_2 разобьем на участки вида (0), $(1,1)$ и $(2, 3, \dots, k^2, \dots, 3, 2)$. Участок первого вида встречается лишь единожды, а после него участки второго и третьего вида чередуются, причем k в каждом следующем участке третьего вида на единицу больше, чем в предыдущей.

Очевидно, что элементы S_1', стоящие на тех же местах, что и элементы произвольного участка третьего вида в последовательности S_2, должны попадать в некоторый (один) участок последовательности вида $(1, 2, \dots, r)$. Пусть r_0 — наименьшее число такое, что в последовательность S_1' целиком входит участок $(1, 2, \dots, r_0)$. Каждому $r \geq r_0$ ставим в соответствие элемент $k(r)$ такой, что элементы участка $(2, 3, \dots, (k(r))^2, \dots, 3, 2)$ последовательности S_2 имеют номера, соответствующие элементам участка $(1, 2, \dots, r)$ последовательности S_1'. Очевидно, что $k(r+1) \geq k(r) + 1$ для любого r. Отметим, что количество элементов в участке вида $(2, 3, \dots, (k(r))^2, \dots, 3, 2)$ равно $2(k(r))^2 - 3$, а так как квадратичная функция растет быстрее линейной, найдется r_1 такой, что длина участка $(2, 3, \dots, (k(r_1))^2, \dots, 3, 2)$ последовательности S_2 будет больше длины участка $(1, 2, \dots, r_1)$. Полученное противоречие показывает, что и $L_\infty(S_2)$ не может изоморфно вкладываться в $L_\infty(S_1)$.

Теорема 3.10. *Пусть $G = \langle X; E\rangle$ и $H = \langle Y; F\rangle$ — деревья бесконечного типа. Частично коммутативные структуры $PCS(X;G)$ и $PCS(Y;H)$ универсально эквивалентны тогда и только тогда, когда деревья G^* и H^* взаимно локально вложимы.*

Доказательство. Пусть частично коммутативные структуры $PCS(X;G)$ и $PCS(Y;H)$ универсально эквивалентны. Докажем, что в этом случае деревья G^* и H^* локально взаимно вложимы.

Пусть G_0 — конечное поддерево дерева G^*, а X_0 — множество его вершин. Если $|X_0| = 1$, то утверждение тривиально. Рассмотрим случай $|X_0| \geq 2$. Для каждой висячей в графе G_0 вершины добавим к множеству X_0 по одной смежной с ней вершине из множества $X' \backslash X_0$ и обозначим полученное множество через X_1. Нетрудно видеть, что процедура построения множества X_1 осуществима. Действительно, пусть x — висячая вершина графа G_0. Если эта вершина является висячей в графе G^*, то по определению множества X^* существует вершина $y \in X' \backslash X^*$, смежная с x. Если x не висячая в графе G^*, то она соединена ребром с некоторой вершиной $z \in X^* \backslash X_0$.

Через G_1 обозначим граф $G(X_1)$. Очевидно, что $G_1' = G_1$, а $G_1^* = G_0$. Также из строения графа G_1 вытекает, что он является подграфом графа G.

Из леммы 3.2 следует, что $PCS(X;G) \models \Phi_l(G')$, где $l = 1$, если $PCS(X;G) = \mathscr{L}(X;G)$, $l = 2$, если $PCS(X;G) = M(X;G)$, и $l = 3$, если $PCS(X;G) =$

$\mathscr{G}(X;G)$. В силу универсальной эквивалентности частично коммутативных структур одного вида $PCS(X;G)$ и $PCS(Y;H)$ получаем $PCS(Y;G) \models \Phi_l(G)$, где $l = 1$, если $PCS(Y;G) = \mathscr{L}(Y;G)$, $l = 2$, если $PCS(Y;G) = M(Y;G)$, и $l = 3$, если $PCS(Y;G) = \mathscr{G}(Y;G)$. Тогда по лемме 3.4 дерево G_0 изоморфно некоторому подграфу графа H^*. Из произвольности выбора дерева G_0 следует, что дерево G^* локально вложимо в дерево H^*. Применяя аналогичные рассуждения для предложения $\Phi(H)$, получаем, что дерево H^* локально вложимо в дерево G^*.

Обратно, пусть деревья G^* и H^* локально взаимно вложимы. Нетрудно видеть, что если G_1 и G_2 — деревья в общем случае бесконечные, то $G_1^* \hookrightarrow G_2^*$ тогда и только тогда, когда $G_1' \hookrightarrow G_2'$.

Пусть $\Gamma = \{g_1, \ldots, g_a\}$ — произвольное конечное множество ненулевых элементов частично коммутативной структуры $PCS(G;X)$, и пусть $X_0 = \bigcup\limits_{i=1}^{a} \operatorname{supp}(g_i)$. В силу леммы 3.1 существует конечное множество X_1 такое, что $X_0 \subseteq X_1$ и $G(X_1)$ — конечное дерево. Тогда $G^*(X_1)$, очевидно, является поддеревом G^*. Действительно, множество X_1^* состоит из не висячих вершин графа $G(X_1)$, а значит, эти вершины не являются висячими и в G. Следовательно, граф $G^*(X_1)$ изоморфно вкладывается в граф H^*, а значит, и $G'(X_1)$ изоморфно вкладывается в H'. Пусть H_1 — образ $G'(X_1)$ при этом вложении, а Y_1 — множество вершин дерева H_1. Очевидно, что $H_1' = H_1$, а графы H_1^* и $G^*(X_1)$ изоморфны.

Рассмотрим конечно порожденную частично коммутативную структуру $PCS(X_1; G(X_1))$. По построению Γ можно рассматривать как подмодель этой алгебры. Как следует из доказательств критериев универсальной эквивалентности в [7, 18, 19], для этой модели существует изоморфная ей подмодель в конечно порожденной частично коммутативной структуре $PCS(Y_1; H_1)$, точнее, существует гомоморфизм частично коммутативных структур одного вида $\varphi : PCS(X_1; G(X_1)) \to PCS(Y_1; H_1)$, пересечение ядра которого с Γ пусто. Продолжим этот гомоморфизм до гомоморфизма $\widetilde{\varphi} : PCS(X;G) \to PCS(Y;H)$, положив на порождающих алгебры $\widetilde{\varphi}(x_i) = 0$ для $x_i \in X \backslash X_1$. Тогда, очевидно, пересечение ядра $\widetilde{\varphi}$ с Γ также пусто. Следовательно, любая подмодель частично коммутативной структуры $PCS(X;G)$ имеет изоморфную подмодель частично коммутативной структуре $PCS(Y;H)$. Доказательство того, что, наоборот, любая подмодель структуры $PCS(Y;H)$ имеет изоморфную подмодель в структуре $PCS(X;G)$, полностью аналогично. Таким образом, осталось сослаться на теорему 2.4. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Duchamp G., Krob D.* Free partially commutative structures // J. Algebra. 1993. V. 156, N 2. P. 318–361.

2. *Гупта Ч. К., Тимошенко Е. И.* Частично коммутативные метабелевы группы: централизаторы и элементарная эквивалентность // Алгебра и логика. 2009. Т. 48, № 3. С. 309–341.

3. *Гупта Ч. К., Тимошенко Е. И.* Свойства и универсальные теории частично коммутативных метабелевых нильпотентных групп // Алгебра и логика. 2012. Т. 51, № 4. С. 429–457.

4. *Мищенко А. А., Трейер А. В.* Графы коммутативности для частично коммутативных двуступенно нильпотентных $\mathbb{Q}$-групп // Сиб. электрон. мат. изв. 2007. Т. 4. С. 460–481. (http://semr.math.nsc.ru/v4/p460-481.pdf).

5. *Мищенко А. А.* Универсальная эквивалентность частично коммутативных двуступенно нильпотентных $\mathbb{Q}$-групп // Вестн. Ом. ун-та. Спец. выпуск «Комбинаторные методы алгебры и сложность вычислений». 2008. С. 61–68.

6. *Ремесленников В. Н., Трейер А. В.* Структура группы автоморфизмов для частично коммутативных двуступенно нильпотентных групп // Алгебра и логика. 2010. Т. 49,

№ 1. С. 60–97.

7. *Тимошенко Е. И.* Универсальная эквивалентность частично коммутативных метабелевых групп // Алгебра и логика. 2010. Т. 49, № 2. С. 263–290.

8. *Тимошенко Е. И.* Мальцевская база частично коммутативной нильпотентной группы // Алгебра и логика. 2010. Т. 50, № 5. С. 647–658.

9. *Мищенко А. А., Тимошенко Е. И.* Универсальная эквивалентность частично коммутативных нильпотентных групп // Сиб. мат. журн. 2011. Т. 52, № 5. С. 1113–1122.

10. *Шестаков С. Л.* Уравнение $[x, y] = g$ в частично коммутативных группах // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 2. С. 466–477.

11. *Шестаков С. Л.* Уравнение $x^2y^2 = g$ в частично коммутативных группах // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 2. С. 463–472.

12. *Duchamp G., Krob D.* The lower central series of the free partially commutative group // Semigroup Forum. 1992. V. 45, N 1. P. 385–394.

13. *Duncan A. J., Kazachkov I. V., Remeslennikov V. N.* Centralizer dimension of partially commutative groups // Geom. Dedicata. 2006. V. 120, N 1. P. 73–97.

14. *Duncan A. J., Kazachkov I. V., Remeslennikov V. N.* Parabolic and quasiparabolic subgroups of free partially commutative groups // J. Algebra. 2007. V. 318, N 2. P. 918–932.

15. *Servatius H.* Automorphisms of graph groups // J. Algebra. 1989. V. 126, N 1. P. 34–60.

16. *Порошенко Е. Н.* О базисах частично коммутативных алгебр Ли // Алгебра и логика. 2011. Т. 50, № 5. С. 595–614.

17. *Порошенко Е. Н.* Централизаторы в частично коммутативных алгебрах Ли // Алгебра и логика. 2012. Т. 51, № 4. С. 524–554.

18. *Порошенко Е. Н.* Об универсальной эквивалентности частично коммутативных алгебр Ли // Алгебра и логика (в печати).

19. *Poroshenko E.,Timoshenko E.* Universal equivalence of partially commutative metabelian Lie algebras // J. Algebra. 2013. V. 384. P. 143–168.

20. *Poroshenko E. N.* On universal equivalence of partially commutative metabelian Lie algebras // Comm. Algebra. 2015. V. 43, N 2. P. 746–762.

Статья поступила 25 марта 2016 г.

Порошенко Евгений Николаевич
Новосибирский гос. технический университет,
кафедра алгебры и математической логики,
пр. К. Маркса, 20, Новосибирск 630073
auto_stoper@ngs.ru