Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2017. Том 58, № 2

УДК 517.95

ОБ ОЦЕНКАХ СПЕКТРАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С РАЗРЫВНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

В. Н. Павленко, Д. К. Потапов

Аннотация. Рассматриваются два класса эллиптических спектральных задач с однородными граничными условиями Дирихле и разрывными нелинейностями (параметр входит в нелинейность мультипликативно). Для первого класса задач нелинейность неотрицательная, обращается в нуль при значениях фазовой переменной, не превосходящих некоторого положительного числа c, имеет линейный рост на бесконечности по фазовой переменной u и единственный разрыв при $u = c$. Доказывается, что для любого значения спектрального параметра, большего минимального собственного значения дифференциальной части уравнения с однородным граничным условием Дирихле, соответствующая краевая задача имеет нетривиальное сильное решение. При этом отвечающая ему свободная граница имеет меру нуль. Получена оценка снизу для спектрального параметра. Во втором классе задач дифференциальная часть уравнения формально самосопряженная, а нелинейность имеет подлинейный рост на бесконечности. Устанавливается теорема об оценке сверху спектрального параметра в такой ситуации.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.211

Ключевые слова: нелинейная спектральная задача, эллиптическая краевая задача, разрывная нелинейность, свободная граница, полуправильное решение, оценки спектрального параметра.

1. Постановка задачи. Формулировка результатов

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с границей $\partial\Omega$ класса $C_{2,\alpha}$, $0 < \alpha \leq 1$, рассматривается однородная краевая задача Дирихле для уравнения эллиптического типа с параметром и разрывной нелинейностью

$$Lu(x) = \lambda g(x, u(x)), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2}$$

Здесь

$$Lu(x) \equiv -\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)u_{x_j} + a(x)u(x) \tag{3}$$

— равномерно эллиптический дифференциальный оператор в Ω с коэффициентами a_{ij}, $b_j \in C_{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, $a \in C_{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, λ — неотрицательный вещественный параметр, называемый спектральным. Нелинейность $g(x, u)$ суперпозиционно измеримая, т. е. для любой измеримой по Лебегу функции $u(x)$ на Ω композиция $g(x, u(x))$ также измерима по Лебегу на Ω. Непрерывность $g(x, u)$ по фазовой переменной u не предполагается. Будем считать, что $g(x, 0) = 0$ почти всюду в Ω.

Задачи вида (1), (2) представляют интерес как с теоретической точки зрения, так и с точки зрения приложений. Такие задачи возникают, например, в физике плазмы и гидродинамике (укажем на задачу Эленбааса об электрической дуге [1] и задачу Гольдштика об отрывных течениях несжимаемой жидкости [2]).

Сильным решением задачи (1), (2) называется функция $u \in W_q^2(\Omega)$, $q > 1$, удовлетворяющая почти всюду в Ω уравнению (1) и граничному условию (2).

Заметим, что $u(x) \equiv 0$ при любом $\lambda \geq 0$ является сильным решением задачи (1), (2), поскольку $g(x, 0) = 0$ почти всюду на Ω.

Положительные λ, при которых задача (1), (2) имеет нетривиальное сильное решение, будем называть *точками спектра* задачи (1), (2).

Рассмотрим ситуацию, когда максимальная связная компонента спектра задачи (1), (2) является лучом. Пусть λ^* — точная нижняя грань этого луча. В данной статье преследуются следующие цели:

1) выделить классы задач, в которых реализуется такая ситуация;

2) получить оценки снизу и сверху для λ^* в этих классах задач;

3) исследовать вопрос о принадлежности спектру λ^*;

4) применить полученные результаты к указанным выше прикладным задачам Эленбааса и Гольдштика.

Сразу отметим, что число λ^* может не принадлежать спектру (см. теорему 2.5 из [3]). Выделим два класса задач с параметром, спектры которых содержат луч.

I. Пусть в (3) $a(x) \equiv 0$. Нелинейность $g(x, u)$ в уравнении (1) задается следующим образом:

$$g(x, u) = \begin{cases} 0, & \text{если } u \leq c, \\ f(x, u), & \text{если } u > c. \end{cases}$$

Здесь $c > 0$, функция $f(x, \cdot)$ непрерывна на числовом луче $[c, +\infty)$ для почти всех $x \in \Omega$ и для каждого $u \geq c$ функция $f(\cdot, u)$ измерима по Лебегу на Ω. Дополнительно предполагаем, что

$$u - c_1 \leq f(x, u) \leq u + d, \quad u \geq c, \tag{4}$$

для почти всех $x \in \Omega$ ($0 < c_1 < c$, $d > c$). Заметим, что (4) влечет неравенство $f(x, u) \geq c - c_1 > 0$ для любых $u \geq c$ и почти всех $x \in \Omega$. В частности, $f(x, c) \geq c - c_1$ почти всюду на Ω. Из определения $g(x, u)$ и свойства (4) функции f получим

$$-c \leq g(x, u) - u \leq d, \quad u \geq 0, \tag{5}$$

для почти всех $x \in \Omega$. Обозначим через λ_1 минимальное μ, для которого краевая задача

$$Lu = \mu u, \quad x \in \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0$$

имеет ненулевое решение. Заметим, что $\lambda_1 > 0$ является простым собственным значением дифференциального оператора L с граничным условием (2), соответствующую ему собственную функцию можно считать положительной в Ω [4]. Сформулируем первый результат в рассматриваемом классе задач.

Теорема 1. *Для любого* $\lambda > \lambda_1$ *задача* (1), (2) *имеет нетривиальное сильное решение, и, значит,* $\lambda^* \leq \lambda_1$.

В ситуации, когда нелинейность $g(x, u)$ в уравнении (1) при каждом $x \in \Omega$ имеет только одну точку разрыва $u = \psi(x)$, возникает проблема об отыскании свободной границы $\Sigma(\lambda) = \{x \in \Omega : u_\lambda(x) = \psi(x)\}$ нетривиального решения

$u_\lambda(x)$ задачи (1), (2) (о некоторых свойствах такого «разделяющего» множества см. [5]). В нашем случае $\psi(x) \equiv c$ (при фиксированном x нелинейность $g(x,u)$ имеет по u единственную точку разрыва c). В прикладных задачах $\Sigma(\lambda)$ является границей раздела качественно различных состояний исследуемого процесса. Так, в задаче Гольдштика $\Sigma(\lambda)$ разделяет области потенциального и вихревого течений жидкости, а в задаче Эленбааса — газ от электрической дуги. Изучение свойств $\Sigma(\lambda)$ представляется актуальным. Сильное решение $u_\lambda(x)$ задачи (1), (2) называется *полуправильным*, если $\operatorname{mes}\Sigma(\lambda) = 0$. В дополнение к теореме 1 получен также следующий результат.

Теорема 2. *Если $\lambda^* < \lambda_1$, то для точной нижней грани спектра задачи* (1), (2) (*обозначим ее через* $\lambda_{\min}$) *справедлива оценка снизу*

$$\lambda_{\min} \geq \lambda_1 \left(1 - \frac{d}{c+d}\right). \tag{6}$$

Кроме того, λ^* и $\lambda_{\min}$ принадлежат спектру задачи (1), (2), *и для любого $\lambda < \lambda_1$ из спектра существует нетривиальное полуправильное решение задачи* (1), (2).

При $f(x,u) = u + d$ выделенный класс задач дает задачу Эленбааса. Для задачи Эленбааса доказано, что $\lambda^* < \lambda_1$ (см. теорему 5.1 из [6]). Однако в [6] вопрос существования полуправильных нетривиальных решений не рассматривался, а также для $\lambda_{\min}$ отсутствует оценка снизу через параметры задачи. В [7] в качестве следствия общих результатов доказано существование интервала (μ_1, λ_1), $\mu_1 > 0$, содержащегося в спектре задачи Эленбааса, и для $\lambda \in (\mu_1, \lambda_1)$ установлено существование полуправильного нетривиального решения.

Перейдем ко второму классу задач.

II. Предположим, что в (3) все коэффициенты $b_j(x)$ $(j = \overline{1,n})$ тождественно равны нулю, т. е. дифференциальный оператор L формально самосопряженный. Для почти всех $x \in \Omega$ сечение $g(x,\cdot)$ имеет на $\mathbb{R}$ разрывы только первого рода, причем все они «прыгающие вверх», т. е. предел слева $g_-(x,u)$ в точке u меньше предела справа $g_+(x,u)$, и для любого $u \in \mathbb{R}$ справедливо включение $g(x,u) \in [g_-(x,u), g_+(x,u)]$. Будем предполагать, что множество

$$U = \left\{ u \in \mathring{W}_2^1(\Omega) : G(u) = \int\limits_\Omega dx \int\limits_0^{u(x)} g(x,s)\,ds > 0 \right\}$$

непусто и выполнено одно из следующих условий:

(A) для почти всех $x \in \Omega$ верна оценка

$$|g(x,u)| \leq k|u|^r + b(x), \quad u \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

где k — положительная константа, $0 \leq r < 1$, $b \in L_q(\Omega)$, $q = p/(p-1)$, $p = 1 + r$, и существует $\chi > 0$ такое, что

$$(Lu,u) = \int\limits_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i} u_{x_j} + a(x) u^2(x) \right) dx \geq \chi \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2\,dx, \quad u \in \mathring{W}_2^1(\Omega); \tag{8}$$

(B) справедливо неравенство $(Lu,u) \geq 0$ на $\mathring{W}_2^1(\Omega)$, задача

$$Lu(x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0 \tag{9}$$

имеет ненулевое решение (в этом случае нуль — минимальное собственное значение дифференциального оператора L с граничным условием (2), обозначим через $v(x)$ положительное в Ω решение задачи (9)), существует функция $b \in L_q(\Omega)$, $q > 2n/(n+2)$ такая, что для почти всех $x \in \Omega$ имеет место оценка

$$|g(x,u)| \le b(x), \quad u \in \mathbb{R}, \tag{10}$$

и, кроме того, $G(tv) \to -\infty$ при $|t| \to +\infty$. Во втором классе задач получен следующий результат.

Теорема 3. *Существует $\lambda_0 > 0$ такое, что для любого $\lambda > \lambda_0$ задача* (1), (2) *имеет нетривиальное полуправильное решение. Для точной нижней грани λ^* максимальной связной компоненты спектра, содержащей луч $(\lambda_0, +\infty)$, верна оценка сверху*

$$\lambda^* \le \lambda_0 \le \inf_{u\in U} \left\{ \frac{(Lu,u)}{2G(u)} \right\}.$$

Теорема 3 включает модель Гольдштика, при этом $L = -\Delta$,

$$g(x,u) = \begin{cases} -1, & \text{если } u < -\psi(x), \\ 0, & \text{если } u \ge -\psi(x). \end{cases}$$

Здесь Δ — оператор Лапласа, $\psi(x)$ — решение задачи $\Delta u = 0$, $u|_{\partial\Omega} = \varphi(x)$, $\varphi(x)$ — неотрицательная непрерывная функция на $\partial\Omega$, не равная тождественно нулю. Существование $u_0 \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$ в задаче Гольдштика, для которого $G(u_0) > 0$, доказано в работе [8]. В [9, 10] установлена оценка сверху в задаче Гольдштика для λ^*:

$$\lambda^* \le \frac{4Ce}{R^2},$$

где $C = \max\{\varphi(s),\, s \in \partial\Omega\}$, R — радиус наибольшего по площади круга, который можно вписать в область Ω. В [11] получена аналогичная оценка сверху для спектрального параметра в задаче (1), (2) при $L = -\Delta$:

$$\lambda^* \le \frac{4C_1}{R_1^2}.$$

Здесь R_1 — радиус наибольшего шара, который можно вписать в $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $C_1 = \frac{(2^n-1)d^2}{\sup\limits_{x\in\Omega} \int_0^d g(x,s)\,ds}$, а d — положительная постоянная такая, что $\sup\limits_{x\in\Omega} \int_0^d g(x,s)\,ds > 0$. Кроме того, в [11] установлено равенство $\lambda_0 = \frac{\|u_0\|^2}{G(u_0)}$ в предположении существования $u_0 \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$ такого, что $G(u_0) > 0$. Однако, как доказано в [12], оценкой сверху для λ_0 в задаче (1), (2) может служить величина $\hat\lambda_0 = \frac{\frac{1}{2}(Lu_0,u_0)}{G(u_0)}$. При $L = -\Delta$ имеем $\hat\lambda_0 = \frac{\frac{1}{2}\|u_0\|^2}{G(u_0)}$, что в два раза меньше, чем $\frac{\|u_0\|^2}{G(u_0)}$. Более того, согласно теореме 3 справедливы неравенства $\lambda^* \le \lambda_0 \le \inf\limits_{u_0\in U} \hat\lambda_0$. Таким образом, теорема 3 дает более точную оценку сверху для λ^*, чем работы [11, 12]. Отметим, что для уравнений эллиптического типа высокого порядка с разрывными нелинейностями оценки сверху величины бифуркационного параметра были получены в [13, 14].

2. Доказательство теоремы 1

Рассмотрим первый класс задач (1), (2), когда в (3) $a(x) = 0$ на Ω, $g(x,u) = 0$, если $u \le c$, $x \in \Omega$ $(c > 0)$, $g(x,u) = f(x,u)$, если $u > c$, $x \in \Omega$, $f(x,u)$ непрерывна по u на $[c,+\infty)$, измерима по x на Ω и удовлетворяет (4). Дадим операторную постановку рассматриваемой задачи. Зафиксируем $q > n/2$. Тогда пространство $W_q^2(\Omega)$ компактно вложено в $C(\overline{\Omega})$ [15, гл. 7, § 7.10]. Поскольку коэффициент $a(x)$ в (3) равен нулю на Ω, для любого $v \in L_q(\Omega)$ задача $Lu(x) = v(x)$, $x \in \Omega$, $u|_{\partial\Omega} = 0$ имеет единственное решение из соболевского пространства $W_q^2(\Omega)$ и существует постоянная $C > 0$ такая, что согласно [15, лемма 9.17]

$$\|u\|_{2,q} \le C\|Lu\|_q, \quad u \in W_q^2(\Omega).$$

Здесь $\|\cdot\|_{2,q}$ и $\|\cdot\|_q$ — нормы в пространствах $W_q^2(\Omega)$ и $L_q(\Omega)$ соответственно. Определим линейный оператор A, заданный на плотном в $L_q(\Omega)$ множестве $D(A) = \{u \in L_q(\Omega) : u \in W_q^2(\Omega),\ u|_{\partial\Omega} = 0\}$ со значениями в $L_q(\Omega)$, равенством $Au = Lu(x)$, $u \in D(A)$. Из предыдущего следует, что существует ограниченный обратный оператор $A^{-1} : L_q(\Omega) \to D(A)$, где $D(A)$ рассматривается с нормой $\|\cdot\|_{2,q}$. Поскольку вложение P пространства $W_q^2(\Omega)$ в $C(\overline{\Omega})$ компактно, оператор $K = P \circ A^{-1}$ — линейный компактный оператор, действующий из $L_q(\Omega)$ в $C(\overline{\Omega})$. Как показано в [16], если $z \in L_q(\Omega)$ неотрицательна почти всюду на Ω и больше нуля на множестве ненулевой меры, то $Kz(x) > 0$ на Ω. Как отмечалось выше, минимальное собственное значение λ_1 дифференциального оператора L с граничным условием (2) положительное, простое, и соответствующую ему собственную функцию можно считать положительной в Ω. Поэтому λ_1^{-1} — простое собственное значение K и ему соответствует положительная в Ω собственная функция. Нелинейность $g(x,u)$ порождает оператор Немыцкого $F(u) = g(x,u(x))$, $u \in C(\overline{\Omega})$, со значениями в $L_q(\Omega)$. В силу оценки (4) оператор F переводит ограниченные множества в $C(\overline{\Omega})$ в ограниченные в $L_q(\Omega)$. Рассмотрим секвенциальное замыкание SF оператора F [17]. Это многозначное отображение, действующее из $C(\overline{\Omega})$ в $L_q(\Omega)$, значение $SF(u)$ для $u \in C(\overline{\Omega})$ совпадает с замкнутой выпуклой оболочкой слабо предельных точек всех последовательностей вида $(F(u_m))$, $u_m \to u$. Поскольку $L_q(\Omega)$ рефлексивно, SF совпадает с овыпукливанием $F^{\square}$ оператора F [18]. Известно [19, теорема 27.1], что $F^{\square}(u) = \{z : \Omega \to \mathbb{R} : z(x)$ — измеримая по Лебегу на Ω функция и для почти всех $x \in \Omega$ значение $z(x)$ принадлежит $[g_-(x,u(x)), g_+(x,u(x))]\}$. В нашем случае для любой $u(x) \in C(\overline{\Omega})$ на множестве $\{x \in \Omega : u(x) \ne c\}$ имеем

$$[g_-(x,u(x)), g_+(x,u(x))] = \{g(x,u(x))\},$$

а если $u(x) = c$, то $[g_-(x,u(x)), g_+(x,u(x))] = [0, f(x,c)]$. Из этого заключаем, что если $u \in \lambda K \circ SF(u)$, то $u \in W_q^2(\Omega)$, $u|_{\partial\Omega} = 0$ и $u(x)$ удовлетворяет уравнению (1), поскольку $Lu(x) = 0$ почти всюду на множестве $\{x \in \Omega : u(x) = c\}$ [15, лемма 7.7] и $g(x,c) = 0$ для почти всех $x \in \Omega$. Таким образом, $u(x)$ — сильное решение задачи (1), (2) из пространства $W_q^2(\Omega)$ тогда и только тогда, когда u — неподвижная точка отображения $\varphi = \lambda K \circ SF$ в $C(\overline{\Omega})$. Докажем, что для любого $u \in C(\overline{\Omega})$ множество $\varphi(u)$ выпуклое, замкнутое и ограниченное. Из определения секвенциального замыкания оператора F и ограниченности F на ограниченных множествах следуют выпуклость, ограниченность и замкнутость $SF(u)$ для произвольного $u \in C(\overline{\Omega})$. Так как оператор K линейный и ограниченный, K переводит выпуклые и ограниченные множества в выпуклые и ограниченные.

Осталось установить замкнутость $\varphi(u)$. Пусть $(z_m) \in \varphi(u)$ и $z_m \to z$ в $C(\overline{\Omega})$. Тогда существует $(y_m) \subset SF(u)$ такая, что $z_m = Ky_m$. Из ограниченности $SF(u)$ и рефлексивности $L_q(\Omega)$ заключаем о наличии подпоследовательности (y_{m_k}), слабо сходящейся к некоторому y в $L_q(\Omega)$. Поскольку $(y_{m_k}) \subset SF(u)$, а $SF(u)$ — замкнутое выпуклое множество, $y \in SF(u)$. Так как K — вполне непрерывный, $Ky_{m_k} \to Ky = z$ и, значит, $z \in \varphi(u)$. Замкнутость $\varphi(u)$ доказана. Установим полунепрерывность сверху мультиотображения φ на $C(\overline{\Omega})$, т. е. что для произвольного $u \in C(\overline{\Omega})$ и любой окрестности U множества $\varphi(u)$ найдется окрестность V точки u, для которой $\varphi(V) \subset U$, где $\varphi(V) = \bigcup\limits_{v \in V} \varphi(v)$. Допустим противное. Тогда найдутся $u \in C(\overline{\Omega})$ и открытое множество $B \supset \varphi(u)$ в $C(\overline{\Omega})$ такие, что для произвольного натурального m существует u_m с $\|u_m - u\| < m^{-1}$ (здесь $\|\cdot\|$ — норма в $C(\overline{\Omega})$) и $z_m \in \varphi(u_m) \setminus B$. Каждый элемент z_m представляется в виде $z_m = Kv_m$, $v_m \in SF(u_m)$. Поскольку (u_m) ограничена в $C(\overline{\Omega})$, а отображение SF переводит ограниченные множества в $C(\overline{\Omega})$ в ограниченные в $L_q(\Omega)$, то и последовательность (v_m) ограничена в $L_q(\Omega)$. Отсюда и из рефлексивности $L_q(\Omega)$ заключаем о существовании слабо сходящейся подпоследовательности (v_{m_k}) к некоторому элементу v в $L_q(\Omega)$. В силу слабо-сильной замкнутости секвенциального замыкания $v \in SF(u)$ [18]. Так как K — линейный компактный оператор, $Kv_{m_k} \to Kv$. Поскольку $Kv \in \varphi(u) \subset B$ и B — открытое множество в $C(\overline{\Omega})$, то $z_{m_k} = Kv_{m_k}$ принадлежит B для достаточно больших k, что противоречит выбору z_m. Полунепрерывность сверху отображения φ доказана. Пусть далее U — открытое и ограниченное в $C(\overline{\Omega})$ множество. Тогда $SF(\overline{U})$ — ограниченное множество в $L_q(\Omega)$, и поскольку K компактный, $\varphi(\overline{U}) = K \circ SF(\overline{U})$ — предкомпактное множество в $C(\overline{\Omega})$. Следовательно, мультиотображение φ компактное на $\overline{U}$ [6], ибо оно полунепрерывное сверху и $\varphi(\overline{U})$ — предкомпактное множество. Кроме того, доказано, что значения φ являются ограниченными, замкнутыми и выпуклыми множествами.

Заметим, что если $u_\lambda \in W_q^2(\Omega)$ $(\lambda > 0)$ — ненулевое сильное решение задачи (1), (2), то множество $\{x \in \Omega : u_\lambda(x) > c\}$ имеет ненулевую меру, поскольку $g(x,u) = 0$, если $u \leq c$, $x \in \Omega$, и, следовательно, $\|u_\lambda\| \geq c$ (напомним, что $\|\cdot\|$ — норма в $C(\overline{\Omega})$). Более того, $u_\lambda(x) > 0$ в Ω в силу неотрицательности $g(x, u(x))$ на Ω и положительности этой функции на множестве ненулевой меры (как отмечалось выше, если $z(x) \in L_q(\Omega)$ неотрицательная на Ω и положительная на множестве ненулевой меры, то $Kz(x) > 0$ на Ω). Пусть $\mathbb{R}_+$ — множество неотрицательных вещественных чисел, $C_+(\overline{\Omega}) = \{u \in C(\overline{\Omega}) : u(x) \geq 0 \text{ на } \overline{\Omega}\}$,

$$\Sigma = \{(\lambda, u) \in \mathbb{R}_+ \times C_+(\overline{\Omega}) : u \in \lambda\varphi(u)\}$$

и Θ — тождественно равная нулю на $\overline{\Omega}$ функция. Определим на $\mathbb{R} \times C(\overline{\Omega})$ норму равенством $\|(\lambda, u)\| = |\lambda| + \|u\|$ для любых $\lambda \in \mathbb{R}$, $u \in C(\overline{\Omega})$. Докажем замкнутость в $\mathbb{R} \times C(\overline{\Omega})$ множества

$$Z = \Sigma \cap (\mathbb{R}_+ \times (C_+(\overline{\Omega}) \setminus \{\Theta\})) = \{(\lambda, u) \in \Sigma \,:\, u(x) > 0 \text{ в } \Omega\}.$$

Предположим, что $((\lambda_m, u_m)) \subset Z$ и $(\lambda_m, u_m) \to (\lambda, u)$ в $\mathbb{R} \times C(\overline{\Omega})$. Как отмечалось выше, $\|u_m\| \geq c$. Так как $u_m \to u$ в $C(\overline{\Omega})$, то $\|u\| \geq c$. Поскольку $u_m \in \lambda_m \varphi(u_m)$, существует $y_m \in SF(u_m)$ такое, что $u_m = \lambda_m K y_m$. Последовательность (y_m) ограничена в $L_q(\Omega)$ в силу ограниченности (u_m) в $C(\overline{\Omega})$. Из рефлексивности $L_q(\Omega)$ следует существование слабо сходящейся подпоследовательности (y_{m_k}) к некоторому y в $L_q(\Omega)$. В силу слабо-сильной замкнутости секвенциального замыкания $y \in SF(u)$ [18]. С учетом компактности K получим $u_{m_k} = \lambda_{m_k} K y_{m_k} \to \lambda K y$. Отсюда следует, что $u \in \lambda\varphi(u)$. Поскольку $\|u\| \geq c$, то $(\lambda, u) \in Z$. Замкнутость Z установлена.

Оценим $\|v - Ku\|$ для $u \in C_+(\overline{\Omega})$, $v \in \varphi(u)$. Так как $v \in \varphi(u)$, то $v = Kz$, где $z \in SF(u)$. Как было показано, последнее означает, что $z(x) = g(x, u(x))$, если $u(x) \neq c$, и $z(x) \in [0, f(x,c)]$, если $u(x) = c$ (с точностью до множества меры нуль из Ω). Отсюда и из неравенств (5) получим $-d \leq z(x) - u(x) \leq d$ почти всюду на Ω. Из этого заключаем, что $|K(z-u)(x)| \leq dK(1)$ на $\overline{\Omega}$, поскольку для любой неотрицательной функции $v(x) \in C(\overline{\Omega})$ справедливо неравенство $Kv(x) \geq 0$ на Ω, и оператор K линейный. Таким образом, $\|v - Ku\| \leq d\|K(1)\|$ для любых $u \in C_+(\overline{\Omega})$ и $v \in \varphi(u)$, что влечет сходимость

$$\frac{\|v - Ku\|}{\|u\|} \to 0 \quad \text{при } \|u\| \to +\infty,\ u \in C_+(\overline{\Omega}). \tag{11}$$

Для завершения доказательства теоремы 1 потребуется теорема 2.11 из [6]. Приведем данный результат с необходимыми пояснениями (терминологию, связанную с полуупорядоченными пространствами, см. в [20]).

Теорема 4 [6, теорема 2.11]. *Пусть X — банахово пространство, полуупорядоченное телесным конусом P, $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1 : [0,R] \times \overline{U} \to \Gamma(Y) \to 2^P$ — компактная последовательность отображений первого типа (т. е. $\varphi_1 : [0,R] \times \overline{U} \to \Gamma(Y)$ — компактное мультиотображение, а $\varphi_2 : Y \to X$ — однозначное непрерывное отображение) для каждого $R > 0$ и любого ограниченного открытого множества U в P ($\Gamma(Y)$ — множество всех непустых замкнутых выпуклых и ограниченных подмножеств в банаховом пространстве Y, 2^P — множество всех непустых подмножеств P). Предположим, что существует линейный компактный положительный оператор $T_\infty : X \to X$ такой, что отображение $g_\infty(\lambda, x) = \varphi(\lambda, x) - \lambda T_\infty x$ удовлетворяет условию*

$$\sup_{y \in g_\infty(\lambda,x)} \frac{\|y\|}{\|x\|} \to 0 \tag{12}$$

при $\|x\| \to \infty$, $x \in P$, равномерно по λ на ограниченных интервалах ($\|\cdot\|$ — норма в X). Предположим также, что T_∞ имеет простое положительное собственное значение λ_∞ с положительным собственным вектором. Тогда найдется замкнутое связное подмножество $\mathscr{L}$ замыкания множества $Z = \Sigma \cap (\mathbb{R}_+ \times (P \setminus \{\Theta\}))$, проходящее через $(\lambda_\infty^{-1}, \infty)$, т. е. $\mathscr{L} \cap \left((\lambda_\infty^{-1} - \varepsilon, \lambda_\infty^{-1} + \varepsilon) \times (P \setminus P_{\varepsilon^{-1}}) \right) \neq \varnothing$ для любого $\varepsilon > 0$, где $\Sigma = \{(\lambda, x) \in \mathbb{R}_+ \times P : x \in \varphi(\lambda, x)\}$, $P_{\varepsilon^{-1}} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot B \cap P$, B — шар единичного радиуса в X с центром в Θ (Θ — нуль пространства X). При этом $\mathscr{L}$ имеет либо неограниченную проекцию на $\mathbb{R}_+$, либо непустое пересечение с $\mathbb{R}_+ \times \{\Theta\}$.

Проверим выполнение условий теоремы 4 в исследуемом случае. Пространство $X = C(\overline{\Omega})$ полуупорядочено телесным конусом неотрицательных функций ($P = C_+(\overline{\Omega})$). В представлении $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1$, $\varphi_1 = \lambda\varphi$ (компактное мультиотображение φ построено выше), φ_2 — тождественное отображение в X, $Y = X$. В качестве T_∞ возьмем сужение K на $C(\overline{\Omega})$. В силу (11) выполняется (12) равномерно по λ на ограниченных интервалах. Оператор T_∞ имеет простое положительное собственное значение $\lambda_\infty = \lambda_1^{-1}$ с положительным собственным вектором и является положительным линейным компактным оператором в $C(\overline{\Omega})$. Выше было показано, что в рассматриваемой ситуации Z замкнуто в $\mathbb{R} \times C(\overline{\Omega})$.

Таким образом, выполнены все условия теоремы 4. Поэтому множество нетривиальных решений Z (учитываем замкнутость Z) содержит замкнутое связное подмножество $\mathscr{L}$, проходящее через (λ_1, ∞). При этом множество $\mathscr{L}$ имеет либо неограниченную проекцию на $\mathbb{R}_+$, либо непустое пересечение с $\mathbb{R}_+ \times \{\Theta\}$. Однако последнее невозможно, поскольку $(\lambda, \Theta) \notin Z$ при любом $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Это доказывает существование нетривиального решения задачи (1), (2) для каждого $\lambda > \lambda_1$. Теорема 1 доказана полностью.

3. Доказательство теоремы 2

Пусть $\lambda^* < \lambda_1$ и u_λ — нетривиальное сильное решение задачи (1), (2) из $W_q^2(\Omega)$, $\lambda > 0$. Тогда $u_\lambda(x) > 0$ на Ω и $u_\lambda|_{\partial\Omega} = 0$. Из определения $g(x,u)$ и свойства (4) получаем оценку

$$0 \le g(x,u) \le \frac{c+d}{c} \cdot u, \quad u \ge 0.$$

Отсюда следует, что $u_\lambda \in W_{2n}^2(\Omega)$ и $Lu_\lambda(x) = \lambda g(x, u_\lambda(x)) \le \lambda(c+d)c^{-1} \cdot u_\lambda(x)$ для почти всех $x \in \Omega$, что равносильно $Lu_\lambda(x) - t \cdot u_\lambda(x) \le 0$ почти всюду на Ω, где $t = \lambda(c+d)c^{-1}$. Из этого заключаем, что $t > \lambda_1$. Допустим противное, т. е. $t \le \lambda_1$. Положим $\upsilon(x) = -u_\lambda(x)$. Тогда $\upsilon(x) \in W_{2n}^2(\Omega)$, $\upsilon|_{\partial\Omega} = 0$ и $L\upsilon(x) - t\upsilon(x) \ge 0$ почти всюду на Ω, что влечет неотрицательность $\upsilon(x)$ на Ω [21, лемма 3.10(a)]. Последнее противоречит положительности $u_\lambda(x)$ в Ω. Неравенство $t > \lambda_1$ равносильно $\lambda > \frac{c}{c+d} \cdot \lambda_1$. Отсюда получаем оценку (6) в теореме 2.

Покажем, что для любого $\lambda < \lambda_1$, принадлежащего спектру задачи (1), (2), существует ненулевое полуправильное решение этой задачи. Пусть $\lambda < \lambda_1$ из спектра задачи (1), (2). Тогда $\lambda > 0$ и существует нетривиальное сильное решение этой задачи $u_\lambda \in W_q^2(\Omega)$, $q > n/2$. Если u_λ полуправильное, то все доказано. В противном случае мера $\Sigma(\lambda) = \{x \in \Omega : u_\lambda(x) = c\}$ не равна нулю. Тогда для задачи

$$Lu(x) = \lambda \tilde{g}(x, u(x)), \quad x \in \Omega, \tag{13}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{14}$$

где $\tilde{g}(x,u) = 0$ при $u < c$ и $x \in \Omega$, $\tilde{g}(x,u) = f(x,u)$ при $u \ge c$ и $x \in \Omega$, $u_\lambda(x)$ будет нижним решением, поскольку $Lu_\lambda(x) \le \lambda\tilde{g}(x, u_\lambda(x))$, $x \in \Omega$ и $u_\lambda(x) = 0$ на $\partial\Omega$. Обозначим через $\bar{u}(x)$ единственное решение задачи

$$Lu(x) - \bar{\lambda}u(x) = \bar{\lambda} \cdot d, \ x \in \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{15}$$

где $\lambda < \bar{\lambda} < \lambda_1$ (оно положительное в Ω [21, лемма 3.10(a)]). Это верхнее решение задачи (13), (14), так как $L\bar{u}(x) = \bar{\lambda}(\bar{u}(x) + d) \ge \bar{\lambda}\tilde{g}(x, \bar{u}(x))$ почти всюду на Ω. Имеем $Lu_\lambda(x) = \lambda\tilde{g}(x, u_\lambda(x)) \le \bar{\lambda}(u_\lambda(x) + d)$, $L\bar{u}(x) = \bar{\lambda}(\bar{u}(x) + d)$ почти всюду на Ω, из чего заключаем, что $L(\bar{u} - u_\lambda)(x) - \bar{\lambda}(\bar{u} - u_\lambda)(x) \ge 0$ для почти всех $x \in \Omega$. Кроме того, $(\bar{u} - u_\lambda)|_{\partial\Omega} = 0$. В силу леммы 3.10(a) из [21] получим $u_\lambda(x) \le \bar{u}(x)$ на Ω. Осталось воспользоваться теоремой 1 из [22], согласно которой задача (13), (14) имеет сильное решение $\upsilon_\lambda(x)$ из $W_q^2(\Omega)$, удовлетворяющее на Ω неравенству $u_\lambda(x) \le \upsilon_\lambda(x) \le \bar{u}(x)$. Так как $g(x,c) = f(x,c) \ge c - c_1$, а $L\upsilon_\lambda(x) = 0$ почти всюду на множестве $\{x \in \Omega : \upsilon_\lambda(x) = c\}$ [15, лемма 7.7], мера этого множества равна нулю. Поэтому $\upsilon_\lambda(x)$ является полуправильным положительным на Ω решением задачи (1), (2).

Для завершения доказательства теоремы 2 осталось установить принадлежность спектру задачи (1), (2) λ^* и $\lambda_{\min}$. Поскольку $\lambda^* < \lambda_1$, существует убывающая последовательность (λ_m), сходящаяся к λ^*, такая, что $\sup\{\lambda_m : m \in \mathbb{N}\} = \bar{\lambda} < \lambda_1$. Обозначим через $u_{\lambda_m}(x)$ нетривиальное решение задачи (1), (2) с $\lambda = \lambda_m$, $\bar{u}(x)$ — положительное в Ω решение задачи (15). Как и выше, при доказательстве существования полуправильных решений устанавливается, что $0 < u_{\lambda_m}(x) \le \bar{u}(x)$ на Ω, из чего следует ограниченность (u_{λ_m}) в $C(\overline{\Omega})$. Отсюда немедленно получаем (с учетом (4)) ограниченность (u_{λ_m}) в $W_q^2(\Omega)$, $q > n/2$. В силу рефлексивности $W_q^2(\Omega)$ данная подпоследовательность содержит слабо сходящуюся в $W_q^2(\Omega)$ подпоследовательность, которая сильно сходится в $C(\overline{\Omega})$ (поскольку $W_q^2(\Omega)$ компактно вложено в $C(\overline{\Omega})$). Предел этой подпоследовательности является ненулевым сильным решением задачи (1), (2) при $\lambda = \lambda^*$ (доказывается так же, как и при доказательстве замкнутости Z в $\mathbb{R} \times C(\overline{\Omega})$). Следовательно, λ^* — точка спектра задачи (1), (2). Число $\lambda_{\min}$ является либо точкой спектра задачи (1), (2), либо предельной точкой спектра. Во втором случае доказательство принадлежности $\lambda_{\min}$ спектру повторяет доказательство принадлежности λ^* спектру задачи (1), (2). Теорема 2 доказана полностью.

4. Доказательство теоремы 3

Существование $\lambda_0 > 0$ такого, что для любого $\lambda > \lambda_0$ задача (1), (2) имеет нетривиальное полуправильное решение при выполнении условия (B), доказано в совместной работе авторов [23]. Аналогичный результат получен в [23] при замене (B) на (A), но при условии, что вместо оценки (7) справедлива оценка (10). В случае (A) доказательство получается несложной корректировкой доказательства из [23]: достаточно показать, что из (7) следует коэрцитивность функционала $f_\lambda(u) = \frac{1}{2}(Lu, u) - \lambda G(u)$ на $\mathring{W}_2^1(\Omega)$, т. е. $f_\lambda(u) \to +\infty$ при $\|u\| \to +\infty$, $\|\cdot\|$ — норма в $\mathring{W}_2^1(\Omega)$. Заметим, что $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ компактно вкладывается в $L_p(\Omega)$. Оператор Немыцкого $Hu(x) = g(x, u(x))$ ввиду оценки (7) и суперпозиционной измеримости $g(x, u)$ действует из $L_p(\Omega)$ в $L_q(\Omega)$, причем в силу оценки (7)

$$\|Hu\|_q \le \|b\|_q + k\|u\|_p^r \quad u \in L_p(\Omega). \tag{16}$$

В [24] показано, что

$$G(v) = \int_0^1 \langle H(tv), v\rangle\, dt, \quad v \in L_q(\Omega),$$

где $\langle y, v\rangle$ — значение линейного ограниченного функционала $y \in E^*$ на элементе $v \in E$ (E — банахово пространство). Здесь $E = L_p(\Omega)$. Из этого с учетом (16) получим

$$|G(v)| \le \left(\|b\|_q + k\|v\|_p^r\right) \cdot \|v\|_p, \quad v \in E. \tag{17}$$

Так как вложение $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ в E компактно, существует постоянная $M > 0$ такая, что $\|v\|_p \le M \cdot \|v\|$ для любого $v \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$. Отсюда и из (17) вытекает, что $G(v) = \bar{o}(\|v\|^2)$ при $\|v\| \to +\infty$, поскольку $0 \le r < 1$. Тем самым

$$f_\lambda(v) = \frac{1}{2}(Lv, v) - \lambda G(v) \ge \frac{\chi}{2}\|v\|^2 + \bar{o}(\|v\|^2) \quad \text{при } \|v\| \to +\infty$$

(воспользовались оценкой (8)). Отсюда следует, что $f_\lambda(v) \to +\infty$ при $\|v\| \to +\infty$. Коэрцитивность $f_\lambda(v)$ доказана для произвольного $\lambda > 0$.

Для завершения доказательства теоремы 3 осталось получить оценку сверху для λ^*. Рассмотрим множество $U = \{u \in \mathring{W}_2^1(\Omega) : G(u) > 0\}$. По условию U непусто. Пусть $v \in U$. Тогда $\psi(\lambda) = f_\lambda(v) = \frac{1}{2}(Lv, v) - \lambda G(v)$ — линейная убывающая функция на $\mathbb{R}_+$, равная нулю при $\lambda(v) = \frac{1}{2}(Lv, v)/G(v)$. Следовательно, для любого $\lambda > \lambda(v)$ будет $f_\lambda(v) < 0$, и, как показано в [23], для каждого такого λ задача (1), (2) имеет нетривиальное полуправильное решение, если учесть доказанную выше коэрцитивность $f_\lambda(u)$ в случае (A). Отсюда заключаем, что $\lambda^* \leq \lambda(v)$. Поскольку последнее неравенство установлено для произвольного $v \in U$, получаем искомую оценку сверху $\lambda^* \leq \inf\{\lambda(v) : v \in U\}$. Заметим, что при $\lambda > \inf\{\lambda(v) : v \in U\}$ задача (1), (2) имеет нетривиальное полуправильное решение. Теорема 3 доказана полностью.

5. Заключение

В работе выделен класс задач с линейным ростом нелинейности на бесконечности (что соответствует $r = 1$), для которого получены теоремы 1 и 2. В теореме 3 условие $0 \leq r < 1$ (подлинейный рост нелинейности на бесконечности) обеспечивает коэрцитивность функционала f_λ эллиптической краевой задачи (1), (2) для любого положительного значения параметра λ. Это связано с существованием собственных функций нелинейной спектральной задачи (1), (2). Для оценки сверху спектрального параметра в теореме 3, вообще говоря, возможно $0 \leq r < (n+2)/(n-2)$, что допускает суперлинейный рост нелинейности на бесконечности при $r > 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Cimatti G.* A nonlinear elliptic eigenvalue problem for the Elenbaas equation // Boll. Unione Mat. Ital., Ser. 5. 1979. V. 16-B, N 2. P. 555–565.
2. *Гольдштик М. А.* Математическая модель отрывных течений несжимаемой жидкости // Докл. АН СССР. 1962. Т. 147, № 6. С. 1310–1313.
3. *Nistri P.* Positive solutions of a non-linear eigenvalue problem with discontinuous non-linearity // Proc. R. Soc. Edinb., Sect. A. 1979. V. 83, N 1–2. P. 133–145.
4. *Amann H.* Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces // SIAM Rev. 1976. V. 18, N 4. P. 620–709.
5. *Потапов Д. К.* Бифуркационные задачи для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями // Мат. заметки. 2011. Т. 90, № 2. С. 280–284.
6. *Chang K.-C.* Free boundary problems and the set-valued mappings // J. Differ. Equations. 1983. V. 49, N 1. P. 1–28.
7. *Allegretto W., Nistri P.* Elliptic equations with discontinuous nonlinearities // Topol. Methods Nonlinear Anal. 1993. V. 2, N 2. P. 233–251.
8. *Потапов Д. К.* Непрерывные аппроксимации задачи Гольдштика // Мат. заметки. 2010. Т. 87, № 2. С. 262–266.
9. *Вайнштейн И. И.* О движении идеальной жидкости с завихренными зонами: Дис. … канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 1972.
10. *Вайнштейн И. И., Юровский В. К.* Об одной задаче сопряжения вихревых течений идеальной жидкости // Журн. прикл. механики и техн. физики. 1976. Т. 17, № 5. С. 98–100.
11. *Bonanno G., Candito P.* Non-differentiable functionals and applications to elliptic problems with discontinuous nonlinearities // J. Differ. Equations. 2008. V. 244, N 12. P. 3031–3059.
12. *Потапов Д. К.* Об одной оценке сверху величины бифуркационного параметра в задачах на собственные значения для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44, № 5. С. 715–716.
13. *Wang C., Huang Y.* Multiple solutions for a class of quasilinear elliptic problems with discontinuous nonlinearities and weights // Nonlinear Anal. 2010. V. 72, N 11. P. 4076–4081.
14. *Потапов Д. К.* О структуре множества собственных значений для уравнений эллиптического типа высокого порядка с разрывными нелинейностями // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46, № 1. С. 150–152.

15. *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989.
16. *Павленко В. Н., Потапов Д. К.* Существование полуправильных решений эллиптических спектральных задач с разрывными нелинейностями // Мат. сб. 2015. Т. 206, № 9. С. 121–138.
17. *Павленко В. Н.* О существовании полуправильных решений первой краевой задачи для уравнения параболического типа с разрывной немонотонной нелинейностью // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 3. С. 520–526.
18. *Павленко В. Н.* Управление сингулярными распределенными системами параболического типа с разрывными нелинейностями // Укр. мат. журн. 1994. Т. 46, № 6. С. 729–736.
19. *Красносельский М. А., Покровский А. В.* Системы с гистерезисом. М.: Наука, 1983.
20. *Красносельский М. А.* Положительные решения операторных уравнений. М.: Физматгиз, 1962.
21. *Massabo I., Stuart C. A.* Elliptic eigenvalue problems with discontinuous nonlinearities // J. Math. Anal. Appl. 1978. V. 66, N 2. P. 261–281.
22. *Павленко В. Н., Ульянова О. В.* Метод верхних и нижних решений для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями // Изв. вузов. Математика. 1998. № 11. С. 69–76.
23. *Павленко В. Н., Потапов Д. К.* О существовании луча собственных значений для уравнений с разрывными операторами // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 4. С. 911–919.
24. *Павленко В. Н.* Теоремы существования для эллиптических вариационных неравенств с квазипотенциальными операторами // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24, № 8. С. 1397–1402.

Статья поступила 4 апреля 2016 г.

Павленко Вячеслав Николаевич
Челябинский гос. университет,
ул. Братьев Кашириных, 129, Челябинск 454001
`pavlenko@csu.ru`

Потапов Дмитрий Константинович
Санкт-Петербургский гос. университет,
Университетская наб., 7/9, Санкт-Петербург 199034
`d.potapov@spbu.ru`