Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2017. Том 58, № 2

УДК 512.542

О СВЕРХРАЗРЕШИМОМ КОРАДИКАЛЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ СУБНОРМАЛЬНЫХ СВЕРХРАЗРЕШИМЫХ ПОДГРУПП

В. С. Монахов, И. К. Чирик

Аннотация. Устанавливаются признаки сверхразрешимости конечной группы, факторизуемой двумя субнормальными сверхразрешимыми подгруппами. Доказывается, что сверхразрешимый корадикал такой группы совпадает с нильпотентным корадикалом коммутанта группы. Полученные результаты распространяются на конечные группы, факторизуемые двумя субнормальными p-сверхразрешимыми подгруппами.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.209

Ключевые слова: конечная группа, сверхразрешимая подгруппа, субнормальная подгруппа, корадикал, взаимный коммутант.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Используемая терминология соответствует [1, 2].

Группа, у которой главные факторы имеют простые порядки, называется *сверхразрешимой*. *Сверхразрешимым* (*нильпотентным*) *корадикалом группы* G называют наименьшую нормальную в G подгруппу K, для которой фактор-группа G/K сверхразрешима (соответственно нильпотентна). Сверхразрешимый корадикал группы G обозначают через $G^{\mathfrak{U}}$, а нильпотентный — через $G^{\mathfrak{N}}$. Здесь $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{N}$ — формации всех сверхразрешимых и нильпотентных групп соответственно. Для формации $\mathfrak{A}$ всех абелевых групп абелев корадикал $G^{\mathfrak{A}}$, очевидно, совпадает с коммутантом G' группы G. Подгруппа Фиттинга и силовская r-подгруппа группы G обозначаются через $F(G)$ и G_r, а $\pi(X)$ и $\pi(G : X)$ — множества всех простых делителей порядка и индекса подгруппы X в группе G соответственно.

Поскольку произведение нормальных нильпотентных подгрупп является нильпотентной подгруппой, формация $\mathfrak{N}$ радикальна, т. е. является классом Фиттинга. Формация $\mathfrak{U}$ не радикальна. Первые примеры несверхразрешимых групп, являющихся произведением нормальных сверхразрешимых подгрупп, построили Хупперт [3] и Бэр [4]. Признаки сверхразрешимости таких групп установили Бэр [4], Фризен [5], А. Ф. Васильев и Т. И. Васильева [6]. Приведем формулировки этих результатов.

Теорема A. *Пусть группа $G = AB$ является произведением нормальных сверхразрешимых подгрупп A и B. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *если коммутант G' нильпотентен, то группа G сверхразрешима* (*теорема Бэра* [4]);

(2) *если группа G содержит нильпотентную нормальную подгруппу W и в фактор-группе G/W все силовские подгруппы абелевы, то G сверхразрешима* (*теорема А. Ф. Васильева и Т. И. Васильевой* [6]);

(3) *если индексы подгрупп A и B в группе G взаимно просты, то G сверхразрешима* (*теорема Фризен* [5]).

В каждом из трех утверждений теоремы А требование нормальности подгрупп A и B можно заменить субнормальностью. Действительно, подгруппы A и B можно заменить нормальными подгруппами $A^G = A(A^G \cap B)$ и $B^G = (B^G \cap A)B$, которые по индукции будут сверхразрешимыми, затем применить к группе $G = A^G B^G$ соответствующее утверждение теоремы А. Здесь $H^G = \langle H^g \mid g \in G\rangle$ — наименьшая нормальная в G подгруппа, содержащая подгруппу H.

Не все признаки сверхразрешимости группы $G = AB$ с нормальными сверхразрешимыми подгруппами A и B переносятся на группы с субнормальными сомножителями. Например, известна сверхразрешимость группы $G = AB$ с нормальными сверхразрешимыми подгруппами A и B при условии, что $A \cap B$ нильпотентна [7, 1.1]. Следующий пример указывает, что нормальность ни одного сомножителя нельзя ослабить до субнормальности.

Пример 1 [4, с. 186]. Пусть $E_{p^2} = \langle a\rangle \times \langle b\rangle$ — элементарная абелева группа порядка p^2, $D = \langle c, d \mid c^4 = d^2 = 1,\ c^d = c^3\rangle$ — диэдральная группа порядка 8, которая действует на E_{p^2} следующим образом:

$$a^c = b^{-1}, \quad b^c = a, \quad a^d = b, \quad b^d = a.$$

Пусть $G = [E_{p^2}]D_8$ — подгруппа из голоморфа E_{p^2}. Рассмотрим подгруппы

$$A = [E_{p^2}](\langle c^2\rangle \times \langle d\rangle), \quad H = [E_{p^2}](\langle c^2\rangle \times \langle cd\rangle), \quad B = [E_{p^2}](\langle cd\rangle).$$

Подгруппы A и H нормальны в G, поскольку $|G : A| = |G : H| = 2$, а B нормальна в H, поэтому B субнормальна в G и $G = AH = AB$. Так как $\langle ab\rangle$ нормальна в A, а $\langle a\rangle$ нормальна в H, то A и H сверхразрешимы. Поскольку $a^{c^2} = a^{-1}$, коммутант $G' = [E_{p^2}]\langle c^2\rangle = A \cap H$ не нильпотентен и G несверхразрешима. Ясно, что $A \cap B = E_{p^2}$ нильпотентна. $\square$

В настоящей статье доказывается признак сверхразрешимости, охватывающий все три утверждения теоремы А.

Теорема 1. *Пусть группа $G = AB$ является произведением субнормальных сверхразрешимых подгрупп A и B. Если $(G_r)' \leq F(G)$ для каждого $r \in \pi(G : F(G)A) \cap \pi(G : F(G)B)$, то группа G сверхразрешима.*

В следующей теореме найден сверхразрешимый корадикал группы с рассматриваемой факторизацией.

Теорема 2. *Пусть группа $G = AB$ является произведением субнормальных сверхразрешимых подгрупп A и B. Тогда $G^{\mathfrak{U}} = (G')^{\mathfrak{N}} = [A, B]^{\mathfrak{N}}$.*

Здесь $[A, B] = \langle [a, b] \mid a \in A,\ b \in B\rangle$ — взаимный коммутант подгрупп A и B.

1. Вспомогательные результаты

Пусть p — простое число. Группа с нормальной силовской p-подгруппой называется *p-замкнутой*, а группа с нормальной p'-холловой подгруппой — *p-нильпотентной.* Через $Z(G)$ и $\Phi(G)$ обозначаются центр и подгруппа Фраттини группы G соответственно; $\mathrm{O}_p(G)$ и $\mathrm{O}_{p'}(G)$ — наибольшие нормальные в G p- и p'-подгруппы соответственно.

Пусть G — группа, p_1, p_2, ..., p_k — простые числа и

$$|G| = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}, \quad p_1 > p_2 > \dots > p_k,\ a_i \in \mathbb{N}.$$

Говорят, что группа G *обладает силовской башней сверхразрешимого типа*, если существует цепочка подгрупп

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq G_2 \leq \dots \leq G_{k-1} \leq G_k = G$$

такая, что G_i нормальна в группе G и фактор-группа G_i/G_{i-1} изоморфна силовской p_i-подгруппе из G для всех i. Такие группы называют еще *дисперсивными по Оре.*

Лемма 1 [2, VI.9.1]. (1) *Каждая минимальная нормальная подгруппа сверхразрешимой группы имеет простой порядок.*

(2) *Пусть N — нормальная в G подгруппа и G/N сверхразрешима. Если N или циклическая, или $N \leq Z(G)$, или $N \leq \Phi(G)$, то G сверхразрешима.*

(3) *Каждая сверхразрешимая группа обладает силовской башней сверхразрешимого типа.*

(4) *Коммутант сверхразрешимой группы нильпотентен.*

(5) *Класс $\mathfrak{U}$ — наследственная насыщенная формация.*

Лемма 2. *Пусть G — сверхразрешимая группа, p — наибольшее число из $\pi(G)$ и H — p'-холлова подгруппа в G. Если $\mathrm{O}_{p'}(G) = 1$, то H — абелева подгруппа экспоненты, делящей $p-1$.*

Доказательство. Пусть P — силовская p-подгруппа в G. Согласно лемме 1(3) подгруппа P нормальна в G и $F(G) = P$. По [7, лемма 3(3)] $\mathrm{O}_{p'}(G/\Phi(G)) = 1$. Если $\Phi(G) \neq 1$, то $\Phi(G)$ — p-группа и по индукции $H\Phi(G)/\Phi(G) \simeq H$ — абелева группа экспоненты, делящей $p-1$. Поэтому можно считать, что $\Phi(G) = 1$. В этом случае подгруппа Фиттинга $F(G)$ является прямым произведением абелевых минимальных нормальных в G подгрупп [1, 4.24]. По лемме 1(1) все прямые сомножители будут подгруппами порядка p. Значит, $P = P_1 \times P_2 \times \dots \times P_t$, где P_i — нормальная в G подгруппа простого порядка для каждого i. В частности, подгруппа P элементарная абелева. Коммутант G' является нильпотентной подгруппой по лемме 1(4). Поскольку $\mathrm{O}_{p'}(G') \leq \mathrm{O}_{p'}(G) = 1$, то G' — p-подгруппа и H абелева. Фактор-группа $G/C_G(P_i)$ изоморфна некоторой подгруппе из группы $\mathrm{Aut}(P_i)$, поэтому $G/C_G(P_i)$ — циклическая группа порядка, делящего $p-1$. Ясно, что

$$\bigcap_{i=1}^{n} C_G(P_i) = C_G(P) = P.$$

Теперь группа $G/\bigcap\limits_{i=1}^{n} C_G(P_i)$ изоморфна подгруппе прямого произведения

$$G/C_G(P_1) \times \dots \times G/C_G(P_n),$$

поэтому $H \simeq G/P$ будет абелевой группой экспоненты, делящей $p-1$. $\square$

Лемма 3. *Если у группы G фактор-группа по подгруппе Фиттинга является элементарной абелевой 2-группой, то G сверхразрешима.*

Доказательство. Воспользуемся индукцией по порядку группы. Можно считать, что подгруппа Фраттини группы G единична, а $F = F(G)$ — минимальная нормальная подгруппа группы G. Так как G/F действует неприводимо на F, по лемме Шура [2, с. 56] фактор-группа G/F циклическая. Поэтому $|G/F| = 2$. Пусть $a \in F$, $a \neq 1$ и b — инволюция из G. Если $a^b \in \langle a \rangle$, то $\langle a \rangle$ — нормальная подгруппа. Если a^b не принадлежит $\langle a \rangle$, то $(a^b a)^b = aa^b = a^b a$ и $\langle a^b a \rangle$ — неединичная нормальная подгруппа. Итак, в любом случае в группе G имеется нормальная подгруппа простого порядка. Поэтому F — подгруппа простого порядка p и $|G| = 2p$, значит, группа G сверхразрешима. $\square$

Запись $X \trianglelefteq Y$ означает, что X — нормальная подгруппа группы Y.

Лемма 4 [1, 4.8; 7, лемма 4]. *Пусть группа $G = AB$ является произведением своих подгрупп A и B. Тогда*

(1) $[A, B] \trianglelefteq G$;

(2) $[A[A, B]/[A, B], B[A, B]/[A, B]] = 1$;

(3) *если* $A_1 \trianglelefteq A$, *то* $A_1[A, B] \trianglelefteq G$;

(4) $G' = A'B'[A, B]$;

(5) *если A и B нормальны в G и $(|G; A|, |G : B|) = 1$, то $G' = A'B'$.*

Пусть $\mathfrak{F}$ — формация и G — группа. Пересечение всех нормальных подгрупп группы G, фактор-группы по которым принадлежат формации $\mathfrak{F}$, обозначается через $G^{\mathfrak{F}}$ и называется *$\mathfrak{F}$-корадикалом группы G*. Из этого определения следует, что $G \in \mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда $G^{\mathfrak{F}} = 1$. Произведение формаций $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ определяется как класс $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ групп, у которых $\mathfrak{Y}$-корадикал принадлежит $\mathfrak{X}$:

$$\mathfrak{X}\mathfrak{Y} = \{G \in \mathfrak{E} \mid G^{\mathfrak{Y}} \in \mathfrak{X}\}.$$

Здесь $\mathfrak{E}$ — класс всех конечных групп. Из леммы 1(4), например, получаем, что $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{A}$.

Лемма 5 [1, 5.8; 5.11]. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — формации, G — группа и K — нормальная в G подгруппа. Тогда*

(1) $(G/K)^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}}K/K$;

(2) $G^{\mathfrak{F}\mathfrak{H}} = (G^{\mathfrak{H}})^{\mathfrak{F}}$;

(3) *если* $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$, *то* $G^{\mathfrak{F}} \subseteq G^{\mathfrak{H}}$.

Разрешимая группа G называется *примитивной*, если в G существует максимальная подгруппа M с единичным ядром $\mathrm{Core}_G M = \bigcap\limits_{x \in G} M^x$. В этом случае подгруппа M называется *примитиватором группы G*.

Лемма 6. *Предположим, что разрешимая группа G несверхразрешима, но фактор-группа G/K сверхразрешима для каждой неединичной нормальной в G подгруппы K. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *группа G содержит единственную минимальную нормальную подгруппу N, $N = F(G) = O_p(G) = C_G(N)$ для некоторого $p \in \pi(G)$;*

(2) $Z(G) = O_{p'}(G) = \Phi(G) = 1$;

(3) *G — примитивная группа; $G = [N]M$, где M — максимальная подгруппа с единичным ядром в группе G;*

(4) *N — элементарная абелева подгруппа порядка p^n, $n > 1$;*

(5) *если подгруппа M абелева, то M циклическая порядка, делящего p^n-1, а n — наименьшее натуральное число такое, что $p^n \equiv 1 \pmod{|M|}$.*

Доказательство. Пусть N_1 и N_2 — различные минимальные нормальные в G подгруппы. Тогда $N_1 \cap N_2 = 1$, фактор-группа G/N_i сверхразрешима, $i = 1, 2$, и $G = G/(N_1 \cap N_2)$ сверхразрешима; противоречие. Поэтому группа G содержит единственную минимальную нормальную подгруппу N, N — элементарная абелева p-подгруппа порядка p^n для некоторого $p \in \pi(G)$. По лемме 1(2) $Z(G) = \Phi(G) = 1$ и $n > 1$. Теперь $F(G)$ является прямым произведением минимальных нормальных в G подгрупп, значит, $N = F(G) = \mathrm{O}_p(G) = C_G(N)$ и $\mathrm{O}_{p'}(G) = 1$. Поскольку $\Phi(G) = 1$, существует максимальная подгруппа M в группе G, не содержащая N. Ясно, что $G = [N]M$ и M — максимальная подгруппа с единичным ядром в группе G. Следовательно, G — примитивная группа, и M действует неприводимо на N. Если подгруппа M абелева, то согласно [8, I.1.3] подгруппа M циклическая порядка, делящего p^n-1, а n — наименьшее натуральное число, удовлетворяющее сравнению $p^n \equiv 1 \pmod{|M|}$. □

Пусть $s\mathfrak{A}$ — формация всех групп с абелевыми силовскими подгруппами. Тогда $s\mathfrak{A}$-корадикал $G^{s\mathfrak{A}}$ группы G является наименьшей нормальной в G подгруппой такой, что все силовские подгруппы в $G/G^{s\mathfrak{A}}$ абелевы. Понятно, что $G^{s\mathfrak{A}} \leq G'$ для любой группы G. Для нильпотентной группы G выполняется равенство $G^{s\mathfrak{A}} = G'$.

Лемма 7 [7, лемма 9]. *Если G — разрешимая примитивная группа с нильпотентным примитиватором и $G^{s\mathfrak{A}} \neq 1$, то $G^{s\mathfrak{A}} = G'$.*

Лемма 8 [1, 5.31]. *Пусть H — субнормальная подгруппа группы G. Если $H \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга, то $H^G \in \mathfrak{F}$. В частности,*
(1) *если H нильпотентна, то H^G нильпотентна;*
(2) *если H π-подгруппа, то H^G π-подгруппа;*
(3) *если H p-нильпотентна, то H^G p-нильпотентна.*

2. Признаки сверхразрешимости произведения субнормальных сверхразрешимых подгрупп

Лемма 9. *Пусть группа $G = AB$ является произведением субнормальных сверхразрешимых подгрупп A и B. Тогда*
(1) *группа G имеет силовскую башню сверхразрешимого типа;*
(2) *фактор-группа $G/F(G)$ нильпотентна и является произведением двух субнормальных абелевых подгрупп $AF(G)/F(G)$ и $BF(G)/F(G)$.*

Доказательство. (1) Пусть $p \in \pi(G)$, A_p и B_p — силовские p-подгруппы из A и B соответственно. Предположим, что p — наибольшее число в $\pi(G)$. Тогда A_p и B_p по лемме 1(3) нормальны в A и B соответственно и A_pB_p — силовская p-подгруппа группы G [2, VI.4.7]. Теперь A_p и B_p субнормальны в G, поэтому A_pB_p — нормальная в G силовская p-подгруппа по лемме 8(2). По индукции G/A_pB_p имеет силовскую башню сверхразрешимого типа, поэтому и группа G имеет силовскую башню сверхразрешимого типа.

(2) По леммам 1(4) и 8(1) $A' \leq F(A) \leq F(A)^G \leq F(G)$. Следовательно,
$$AF(G)/F(G) \simeq A/(A \cap F(G))$$
абелева, и $(AF(G)/F(G))^{G/F(G)}$ нормальна в $G/F(G)$ и нильпотентна по лемме 8(1). Аналогично
$$B' \leq F(B) \leq F(B)^G \leq F(G), \quad BF(G)/F(G) \simeq B/(B \cap F(G)),$$

поэтому $BF(G)/F(G)$ абелева и $(BF(G)/F(G))^{G/F(G)}$ нормальна в $G/F(G)$ и нильпотентна по лемме 8(1). Фактор-группа $G/F(G)$ является произведением двух субнормальных абелевых подгрупп $AF(G)/F(G)$ и $BF(G)/F(G)$. Поскольку

$$G/F(G) = (AF(G)/F(G))^{G/F(G)}(BF(G)/F(G))^{G/F(G)},$$

то $G/F(G)$ нильпотентна. $\square$

Лемма 10. *Пусть группа $G = AB$ является произведением субнормальных подгрупп A и B. Если A сверхразрешима, а B нильпотентна, то G сверхразрешима.*

Доказательство. Применим индукцию по порядку группы. По лемме 9(1) силовская p-подгруппа A_pB_p нормальна в G для наибольшего $p \in \pi(G)$. Поскольку условия леммы наследуют все фактор-группы группы G, то G примитивна по лемме 6:

$$\mathrm{O}_{p'}(G) = \Phi(G) = 1, \quad G = [F]M, \quad F = F(G) = A_pB_p = C_G(F),$$

и M — максимальная подгруппа с единичным ядром в группе G. Подгруппа M нильпотентна по лемме 9(2). Подгруппу B можно считать по лемме 8(1) нормальной в G, иначе ее можно заменить нильпотентной нормальной подгруппой B^G. Так как $\mathrm{O}_{p'}(G) = 1$, то $B = F$. Пусть P — минимальная нормальная в A подгруппа. По лемме 1(1) $|P| = p$. Поскольку $P \leq A_p \leq F = B$ и B абелева, P нормальна в G. По индукции G/P сверхразрешима, следовательно, по лемме 1(2) группа G сверхразрешима. $\square$

При доказательстве следующей теоремы не используется ни одно из утверждений теоремы А.

Теорема 3. *Пусть группа $G = AB$ является произведением субнормальных сверхразрешимых подгрупп A и B. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *группа G сверхразрешима;*

(2) *коммутант G' нильпотентен;*

(3) *подгруппа $[A, B]$ нильпотентна;*

(4) *в группе G существует нильпотентная нормальная подгруппа W такая, что в фактор-группе G/W все силовские подгруппы абелевы;*

(5) $(G_r)' \leq F(G)$ *для каждого* $r \in \pi(G : F(G)A) \cap \pi(G : F(G)B)$.

Доказательство. По лемме 1(4) подгруппы A' и B' нильпотентны, а по лемме 4(4) $G' = A'B'[A, B]$.

Если коммутант G' нильпотентен, то подгруппа $[A, B]$ нильпотентна. Пусть подгруппа $[A, B]$ нильпотентна. Так как A', B' субнормальны в G и $[A, B]$ нормальна в G, то G' нильпотентна по лемме 8. Таким образом, утверждения (2) и (3) эквивалентны. Понятно, что при $W = G'$ из (2) следует (4).

Пусть группа G сверхразрешима. По лемме 1(4) справедливо (2). Поскольку коммутант G' нильпотентен, то $G' \leq F(G)$ и $G/F(G)$ абелева. Таким образом, из (1) следуют (2)–(5).

Докажем, что из (2) вытекает (1). Пусть группа $G = AB$ является произведением субнормальных сверхразрешимых подгрупп A и B и коммутант G' нильпотентен. Докажем, что G сверхразрешима. Применим индукцию по порядку группы. Понятно, что каждая фактор-группа G/N, $N \neq 1$, является произведением двух субнормальных сверхразрешимых подгрупп AN/N, BN/N и коммутант

$$(G/N)' = G'N/N \simeq G'/G' \cap N$$

нильпотентен. По индукции фактор-группа G/N сверхразрешима. По лемме 9(1) группа G p-замкнута для наибольшего $p \in \pi(G)$. По лемме 6 группа G примитивна. Поэтому $\Phi(G) = \mathrm{O}_{p'}(G) = 1$, $F(G) = A_pB_p = G_p = \mathrm{O}_p(G)$ является минимальной нормальной в G подгруппой. Теперь $G' = F(G)$. Так как $\mathrm{O}_{p'}(A) = \mathrm{O}_{p'}(B) = 1$, по лемме 2 подгруппы $A_{p'}$ и $B_{p'}$ — абелевы группы экспоненты, делящей $p-1$. Поскольку $G' = F(G)$, то $A_{p'}B_{p'}$ — абелева группа экспоненты, делящей $p-1$. По лемме 6(5) $|F(G)| = p$ и G сверхразрешима. Таким образом, из (2) следует (1).

Докажем, что из (4) вытекает (1). Пусть группа $G = AB$ является произведением двух субнормальных сверхразрешимых подгрупп A и B и существует нильпотентная нормальная подгруппа $W = G^{s\mathfrak{A}}$ такая, что в фактор-группе G/W все силовские подгруппы абелевы. Покажем, что G сверхразрешима. Применим индукцию по порядку группы. Понятно, что каждая фактор-группа G/N, $N \neq 1$, является произведением двух субнормальных сверхразрешимых подгрупп AN/N, BN/N и для нильпотентной нормальной подгруппы $WN/N \simeq W/W \cap N$ в фактор-группе

$$(G/N)/(WN/N) \simeq G/(WN) \simeq (G/W)/(WN/N)$$

все силовские подгруппы абелевы. По индукции фактор-группа G/N сверхразрешима. По лемме 9(2) группа G p-замкнута для наибольшего $p \in \pi(G)$. По лемме 6 группа G примитивна: $G = [F(G)]M$, где $F(G)$ — силовская p-подгруппа группы G, а M — максимальная в G подгруппа. По лемме 9(2) подгруппа M нильпотентна. Если $W = G^{s\mathfrak{A}} \neq 1$, то по лемме 7 $G' = W$ нильпотентна. Если $W = G^{s\mathfrak{A}} = 1$, то в группе G все силовские подгруппы абелевы, поэтому подгруппа M абелева и опять $G' = F(G)$ нильпотентна. Группа G сверхразрешима, поскольку уже доказано, что из (2) следует (1). Таким образом, из (4) вытекает (1).

Пусть выполняется (5). Если $q \notin \pi(G : F(G)A) \cap \pi(G : F(G)B)$, то $q \notin \pi(G : F(G)A)$ или $q \notin \pi(G : F(G)B)$. Поскольку $AF(G)/F(G)$ и $BF(G)/F(G)$ абелевы по лемме 9(2), группа $G_qF(G)/F(G)$ абелева. Если $q \in \pi(G : F(G)A) \cap \pi(G : F(G)B)$, то $G_qF(G)/F(G)$ абелева по условию. По лемме 9(2) группа $G/F(G)$ нильпотентна, поэтому она абелева и $G' \leq F(G)$. Тем самым выполняется (2), а значит, и (1). $\square$

Следствиями теоремы 3 являются сформулированные во введении результаты Бэра [4], Фризен [5], А. Ф. Васильева и Т. И. Васильевой [6], которые не использовались при доказательстве теоремы 3.

Доказательство теоремы 1. Теорема 1 — частный случай теоремы 3 ((5) и (1) эквивалентны). $\square$

Следствие 3.1. *Пусть группа $G = AB$ является произведением субнормальных сверхразрешимых подгрупп A и B. Если индексы подгрупп A и B в группе G взаимно просты, то группа G сверхразрешима.*

Доказательство. Если индексы подгрупп A и B в группе G взаимно просты, то $\pi(G : F(G)A) \cap \pi(G : F(G)B) = \varnothing$ и группа G сверхразрешима по теореме 3 ((1) и (5) эквивалентны). $\square$

Наименьшее натуральное число m, для которого $G^{(m)} = 1$, называется *производной длиной разрешимой группы* G и обозначается через $d(G)$. Здесь $G^{(m)} = (G^{(m-1)})'$ — m-коммутант группы G.

Следствие 3.2. *Пусть группа $G = AB$ является произведением двух субнормальных сверхразрешимых подгрупп A и B. Тогда*

$$d(G) \leq 3 + \max_{r\in\pi(\Phi(G))} d((\Phi(G))_r).$$

В частности, если G несверхразрешима, то $d(G/\Phi(G)) = 3$.

Доказательство. Согласно лемме 9(2) фактор-группа $G/F(G)$ нильпотентна и является произведением абелевых подгрупп $AF(G)/F(G)$, $BF(G)/F(G)$. По теореме Ито [1, 4.9] $d(G/F(G)) \leq 2$. Фактор-группа $F(G)/\Phi(G)$ абелева, поэтому

$$d(F(G)) = 1 + \max_{r\in\pi(\Phi(G))} d((\Phi(G))_r), \quad d(G) \leq 3 + \max_{r\in\pi(\Phi(G))} d((\Phi(G))_r).$$

Если $d(G/\Phi(G)) = 1$, то G нильпотентна. Если $d(G/\Phi(G)) = 2$, то $(G/\Phi(G))'$ абелева. Поскольку

$$(G/\Phi(G))' = G'\Phi(G)/\Phi(G) \simeq G'/G' \cap \Phi(G),$$

то G' нильпотентна [1, 3.24] и G сверхразрешима по теореме 3. Таким образом, если G несверхразрешима, $d(G/\Phi(G)) = 3$. $\square$

Следствие 3.3. *Пусть группа $G = AB$ является произведением двух субнормальных сверхразрешимых подгрупп A и B. Тогда и только тогда группа G сверхразрешима, когда $d(G/\Phi(G)) \leq 2$.*

Доказательство. Если группа G сверхразрешима, то ее коммутант нильпотентен, поэтому $G' \leq F(G)$. Так как фактор-группа $F(G)/\Phi(G)$ абелева, $d(G/\Phi(G)) \leq 2$. Обратно, пусть группа $G = AB$ является произведением двух субнормальных сверхразрешимых подгрупп A и B и $d(G/\Phi(G)) \leq 2$. Тогда по следствию 3.2 группа G сверхразрешима. $\square$

3. О сверхразрешимом корадикале произведения субнормальных сверхразрешимых подгрупп

Лемма 11. *Пусть $G = AB$, где A и B — сверхразрешимые подгруппы. Тогда $G^{\mathfrak{U}} \leq [A, B]$.*

Доказательство. По леммам 4(1),(4) и 5(1)

$$\begin{aligned}(G/[A,B])' = G'[A,B]/[A,B] = A'B'[A,B]/[A,B]\\ = (A'[A,B]/[A,B])(B'[A,B]/[A,B]).\end{aligned}$$

Подгруппы

$$(A'[A,B])/[A,B] \simeq A'/(A' \cap [A,B]), \quad (B'[A,B]/[A,B]) \simeq B'/(B' \cap [A,B])$$

нильпотентны по лемме 1(4) и нормальны в $G/[A,B]$ по лемме 4(3), поэтому $(G/[A,B])'$ нильпотентна. По лемме 4(3) подгруппы $A[A,B]$ и $B[A,B]$ нормальны в G. По теореме 3 ((1) и (2) эквивалентны) группа $G/[A,B]$ сверхразрешима. Значит, $G^{\mathfrak{U}} \leq [A, B]$. $\square$

Лемма 12. *Пусть $\mathfrak{X}$ — радикальная наследственная формация. Если A и B — нормальные подгруппы группы G, то $(AB)^{\mathfrak{X}} = A^{\mathfrak{X}}B^{\mathfrak{X}}$.*

Доказательство. Пусть $K = A^{\mathfrak{X}}B^{\mathfrak{X}}$. Так как

$$AK/K \simeq A/A \cap K = A/A^{\mathfrak{X}}(A \cap B^{\mathfrak{X}}) \simeq (A/A^{\mathfrak{X}})/(A^{\mathfrak{X}}(A \cap B^{\mathfrak{X}})/A^{\mathfrak{X}}), \quad A/A^{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{X},$$

то $AK/K \in \mathfrak{X}$. Аналогично $BK/K \in \mathfrak{X}$. Подгруппы AK/K и BK/K нормальны в G/K, а $\mathfrak{X}$ — радикальный класс, поэтому

$$(AK/K)(BK/K) = AB/K \in \mathfrak{X}, \quad (AB)^{\mathfrak{X}} \leq K.$$

Поскольку $AB/(AB)^{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X}$ — наследственный класс,

$$A(AB)^{\mathfrak{X}}/(AB)^{\mathfrak{X}} \simeq A/A \cap (AB)^{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{X}, \quad A^{\mathfrak{X}} \leq (AB)^{\mathfrak{X}}.$$

Аналогично $B^{\mathfrak{X}} \leq (AB)^{\mathfrak{X}}$. Следовательно, $A^{\mathfrak{X}}B^{\mathfrak{X}} \leq (AB)^{\mathfrak{X}}$ и $A^{\mathfrak{X}}B^{\mathfrak{X}} = (AB)^{\mathfrak{X}}$. $\square$

Доказательство теоремы 2. Пусть A и B — субнормальные сверхразрешимые подгруппы группы $G = AB$. По лемме 11 $G^{\mathfrak{U}} \leq [A, B]$. Для получения равенства $G^{\mathfrak{U}} = [A, B]^{\mathfrak{N}}$ вначале докажем, что $G^{\mathfrak{U}} = (G')^{\mathfrak{N}}$. По лемме 1(4) $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{A}$, а по лемме 5(2),(3)

$$G^{(\mathfrak{N}\mathfrak{A})} = (G^{\mathfrak{A}})^{\mathfrak{N}} = (G')^{\mathfrak{N}} \leq G^{\mathfrak{U}}.$$

Проверим обратное включение. Поскольку коммутант

$$(G/(G')^{\mathfrak{N}})' = G'(G')^{\mathfrak{N}}/(G')^{\mathfrak{N}} = G'/(G')^{\mathfrak{N}}$$

нильпотентен, группа

$$G/(G')^{\mathfrak{N}} = A(G')^{\mathfrak{N}}/(G')^{\mathfrak{N}} \cdot B(G')^{\mathfrak{N}}/(G')^{\mathfrak{N}}$$

сверхразрешима по теореме 3 ((1) и (2) эквивалентны) и $G^{\mathfrak{U}} \leq (G')^{\mathfrak{N}}$. Итак, равенство $G^{\mathfrak{U}} = (G')^{\mathfrak{N}}$ доказано. По лемме 4(4)

$$G' = A'B'[A, B] = (A')^G(B')^G[A, B].$$

Подгруппы A' и B' субнормальны в G и нильпотентны по лемме 1(4), поэтому $(A')^G(B')^G$ нормальна в G и нильпотентна по лемме 8(1). По лемме 12 при $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}$ получаем

$$G^{\mathfrak{U}} = (G')^{\mathfrak{N}} = ((A')^G)^{\mathfrak{N}}((B')^G)^{\mathfrak{N}}[A, B]^{\mathfrak{N}} = [A, B]^{\mathfrak{N}}. \quad \square$$

4. Приложения к p-сверхразрешимым группам

Классы всех p-замкнутых и p-нильпотентных групп совпадают с произведениями $\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}$ и $\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p$ соответственно, где $\mathfrak{N}_p$ — класс всех p-групп, а $\mathfrak{E}_{p'}$ — класс всех p'-групп. Классы $\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}$ и $\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p$ являются радикальными наследственными насыщенными формациями.

Группа называется *p-разрешимой*, если порядки ее главных факторов либо являются степенью p, либо не делятся на p. Группа называется *p-сверхразрешимой*, если порядки ее главных факторов либо равны p, либо не делятся на p. Понятно, что группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда она p-сверхразрешима для каждого $p \in \pi(G)$. Ясно, что p-нильпотентная группа p-сверхразрешима, а когда p — наименьшее число в $\pi(G)$, p-сверхразрешимая группа будет p-нильпотентной. Через $p\mathfrak{S}$ обозначим класс всех p-разрешимых, а через $p\mathfrak{U}$ — класс всех p-сверхразрешимых групп. Классы $p\mathfrak{S}$ и $p\mathfrak{U}$ являются наследственными насыщенными формациями, класс $p\mathfrak{S}$ радикален и $\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'} \cup \mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p \subseteq p\mathfrak{S}$. Класс $p\mathfrak{U}$ не является радикальным и $\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{U}$.

В [7] получены «p-аналоги» теоремы A и новые достаточные условия сверхразрешимости группы $G = AB$ при более жестких ограничениях, чем сверхразрешимость нормальных сомножителей A и B. В [9] найден p-сверхразрешимый корадикал группы $G = AB$ с нормальными p-сверхразрешимыми подгруппами A и B. В [10, теорема B] показано, что минимальная не p-сверхразрешимая группа G является произведением двух нормальных сверхразрешимых подгрупп в точности тогда, когда $G/F(G)$ — примарная минимальная неабелева группа. Для группы $G = AB$ с p-сверхразрешимыми нормальными сомножителями A и B аналогичный результат получен в [7].

Лемма 13 [2, VI.1]. (1) *Класс $p\mathfrak{S}$ — наследственная радикальная насыщенная формация.*

(2) *Если N — нормальная в группе G подгруппа, $N \in p\mathfrak{S}$ и $G/N \in p\mathfrak{S}$, то $G \in p\mathfrak{S}$.*

(3) *Каждая минимальная нормальная подгруппа в p-разрешимой группе G является либо p'-подгруппой, либо элементарной абелевой p-подгруппой.*

Лемма 14 [2, VI.9]. (1) *Класс $p\mathfrak{U}$ — наследственная насыщенная формация.*

(2) *Каждая минимальная нормальная подгруппа p-сверхразрешимой группы является либо p'-подгруппой, либо подгруппой порядка p.*

(3) *Пусть N — нормальная в G подгруппа и $G/N \in p\mathfrak{U}$. Если N циклическая или $N \in \{Z(G), O_{p'}(G), \Phi(G)\}$, то $G \in p\mathfrak{U}$. В частности, $\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p \subseteq p\mathfrak{U}$.*

(4) *Коммутант p-сверхразрешимой группы p-нильпотентен.*

Лемма 15 [7, лемма 4]. *Если G — p-сверхразрешимая группа и $O_{p'}(G) = 1$, то G сверхразрешима.*

Лемма 16. *Пусть группа $G = AB$ является произведением субнормальных подгрупп A и B. Если A p-сверхразрешима, а B p-нильпотентна, то G p-сверхразрешима.*

Доказательство. Условия леммы переносятся на фактор-группы, поэтому можно применить индукцию по порядку группы. Ввиду леммы 14(3) можно считать, что $\mathrm{O}_{p'}(G) = 1$. Тогда по лемме 8(2) $\mathrm{O}_{p'}(S) = 1$ для каждой субнормальной в G подгруппы S. В частности, A сверхразрешима по лемме 15, B — p-группа, а группа G сверхразрешима по лемме 10. $\square$

Теорема 4. *Пусть группа $G = AB$ является произведением субнормальных p-сверхразрешимых подгрупп A и B. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *группа G p-сверхразрешима;*

(2) *коммутант G' p-нильпотентен;*

(3) *подгруппа $[A, B]$ p-нильпотентна;*

(4) *существует p-нильпотентная нормальная подгруппа W такая, что в фактор-группе G/W все силовские подгруппы абелевы.*

Доказательство. По лемме 14(4) подгруппы A' и B' p-нильпотентны, а по лемме 4(4) $G' = A'B'[A, B]$.

Если коммутант G' p-нильпотентен, то подгруппа $[A, B]$ p-нильпотентна. Пусть подгруппа $[A, B]$ p-нильпотентна. Так как A' и B' субнормальны в G, а по лемме 4(1) подгруппа $[A, B]$ нормальна в G, то G' p-нильпотентна по лемме 8(3). Таким образом, (2) и (3) эквивалентны. При $G' = W$ из (2) следует (4).

Пусть группа G p-сверхразрешима. По лемме 14(4) справедливо (2). Таким образом, из (1) следуют (2)–(4).

Докажем, что из (4) вытекает (1). Пусть в группе G существует p-нильпотентная нормальная подгруппа W такая, что в фактор-группе G/W все силовские подгруппы абелевы. Докажем, что группа G p-сверхразрешима. Воспользуемся индукцией по порядку группы. Пусть N — неединичная нормальная в G подгруппа. Тогда

$$G/N = (AN/N) \cdot (BN/N), \quad AN/N \simeq A/A \cap N, \quad BN/N \simeq B/B \cap N,$$

$$WN/N \simeq W/W \cap N, \quad (G/N)/(WN/N) \simeq G/WN \simeq (G/W)/(WN/W),$$

подгруппы AN/N, BN/N субнормальны в G/N и p-сверхразрешимы, подгруппа WN/N нормальна в G/N и p-нильпотентна и в фактор-группе $(G/N)/(WN/N)$ все силовские подгруппы абелевы. Поэтому условия утверждения (4) наследуются каждой фактор-группой группы G и группа G/N p-сверхразрешима по индукции. По лемме 14(3) можно считать, что $\mathrm{O}_{p'}(G) = 1$. По лемме 8(2) $\mathrm{O}_{p'}(S) = 1$ для каждой субнормальной в группе G подгруппы S, а p-нильпотентные субнормальные подгруппы будут p-подгруппами. По лемме 15 подгруппы A и B будут сверхразрешимыми, а W — p-подгруппой. По теореме 3 ((1) и (4) эквивалентны) группа G сверхразрешима. Таким образом, из (4) следует (1). $\square$

Следствие 4.1. *Пусть группа $G = AB$ является произведением субнормальных p-сверхразрешимых подгрупп A и B. Если индексы подгрупп A и B в группе G взаимно просты, то группа G p-сверхразрешима.*

Доказательство. Предположим, что $\mathrm{O}_{p'}(G) = 1$. Тогда $\mathrm{O}_{p'}(S) = 1$ для каждой субнормальной в группе G подгруппы S. В частности, подгруппы A и B сверхразрешимы по лемме 15, а группа G сверхразрешима по следствию 3.1. Если $\mathrm{O}_{p'}(G) \neq 1$, то по индукции фактор-группа $G/\mathrm{O}_{p'}(G)$ p-сверхразрешима, а по лемме 14(3) группа G p-сверхразрешима. $\square$

Напомним, что $\mathrm{O}^{p'}(X)$ — наименьшая нормальная в группе X подгруппа N, для которой фактор-группа X/N является p'-группой. Понятно, что $\mathrm{O}^{p'}(X)$ является $\mathfrak{E}_{p'}$-корадикалом группы X, т. е. $\mathrm{O}^{p'}(X) = X^{\mathfrak{E}_{p'}}$. Наибольшая нормальная в G p-нильпотентная подгруппа обозначается через $F_p(G)$. Понятно, что $F_p(G)$ является $\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p$-радикалом группы G, т. е. $F_p(G) = G_{\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p}$.

Лемма 17. *Если G — p-разрешимая группа, то $\mathrm{O}^{p'}(G^{p\mathfrak{U}}) = G^{p\mathfrak{U}} \leq G^{\mathfrak{U}} \leq H$, где $H/G^{p\mathfrak{U}} = \mathrm{O}_{p'}(G/G^{p\mathfrak{U}})$. В частности, если $\mathrm{O}_{p'}(G/G^{p\mathfrak{U}}) = 1$, то $G^{p\mathfrak{U}} = G^{\mathfrak{U}}$.*

Доказательство. Группа $G/\mathrm{O}^{p'}(G^{p\mathfrak{U}})$ содержит нормальную p'-подгруппу $G^{p\mathfrak{U}}/\mathrm{O}^{p'}(G^{p\mathfrak{U}})$ и фактор-группа $(G/\mathrm{O}^{p'}(G^{p\mathfrak{U}}))/(G^{p\mathfrak{U}}/\mathrm{O}^{p'}(G^{p\mathfrak{U}})) \simeq G/G^{p\mathfrak{U}}$ p-сверхразрешима. По лемме 14(3) группа $G/\mathrm{O}^{p'}(G^{p\mathfrak{U}})$ p-сверхразрешима, поэтому $\mathrm{O}^{p'}(G^{p\mathfrak{U}}) = G^{p\mathfrak{U}}$. Так как $\mathfrak{U} \subseteq p\mathfrak{U}$, то $G^{p\mathfrak{U}} \leq G^{\mathfrak{U}}$ по лемме 5(3). Группа $G/G^{p\mathfrak{U}}$ p-сверхразрешима, значит, фактор-группа $G/H \simeq (G/G^{p\mathfrak{U}})/(H/G^{p\mathfrak{U}})$ также p-сверхразрешима. Поскольку $\mathrm{O}_{p'}(G/H) = 1$, то G/H сверхразрешима по лемме 15, поэтому $G^{\mathfrak{U}} \leq H$. Если $\mathrm{O}_{p'}(G/G^{p\mathfrak{U}}) = 1$, то $H = G^{p\mathfrak{U}}$ и $G^{p\mathfrak{U}} = G^{\mathfrak{U}}$. $\square$

Теорема 5. *Пусть A и B — субнормальные p-сверхразрешимые подгруппы группы G. Если $G = AB$, то $G^{p\mathfrak{U}} = (G')^{\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p} = [A,B]^{\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p}$.*

Доказательство. Вначале докажем равенство $G^{p\mathfrak{U}} = (G')^{\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p}$. По лемме 14(4) $p\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p\mathfrak{A}$, а по лемме 5

$$G^{\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p\mathfrak{A}} = (G^{\mathfrak{A}})^{\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p} = (G')^{\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p} \leq G^{p\mathfrak{U}}.$$

Проверим обратное включение. Фактор-группа

$$G/(G')^{\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p} = (A(G')^{\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p}/(G')^{\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p})(B(G')^{\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p}/(G')^{\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p})$$

представляет собой произведение субнормальных p-сверхразрешимых подгрупп $A(G')^{\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p}/(G')^{\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p}$ и $B(G')^{\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p}/(G')^{\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p}$. Ее коммутант

$$(G/(G')^{\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p})' = G'(G')^{\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p}/(G')^{\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p} = G'/(G')^{\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p}$$

p-нильпотентен. По теореме 4 ((1) и (2) эквивалентны) группа $G/(G')^{\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p}$ p-сверхразрешима, значит, $G^{p\mathfrak{U}} \leq (G')^{\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p}$. Итак, равенство $G^{p\mathfrak{U}} = (G')^{\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p}$ доказано. По лемме 4(4)

$$G' = A'B'[A,B] = (A')^G(B')^G[A,B].$$

Подгруппы A' и B' субнормальны в G и p-нильпотентны по лемме 14(4), поэтому $(A')^G(B')^G$ нормальна в G и p-нильпотентна по лемме 8(3). По лемме 12 при $\mathfrak{X} = \mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p$ получаем

$$G^{p\mathfrak{U}} = (G')^{\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p} = ((A')^G)^{\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p}((B')^G)^{\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p})[A,B]^{\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p} = [A,B]^{\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p}. \quad \square$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Монахов В. С.* Введение в теорию конечных групп и их классов. Минск: Выш. школа, 2006.
2. *Huppert B.* Endliche Gruppen. I. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1967.
3. *Huppert B.* Monomialle Darstellung endlicher Gruppen // Nagoya Math. J. 1953. V. 3. P. 93–94.
4. *Baer R.* Classes of finite groups and their properties // Illinois J. Math. 1957. V. 1. P. 115–187.
5. *Friesen D.* Products of normal supersolvable subgroups // Proc. Amer. Math. Soc. 1971. V. 30, N 1. P. 46–48.
6. *Васильев А. Ф., Васильева Т. И.* О конечных группах, у которых главные факторы являются простыми группами // Изв. вузов. Математика. 1997. № 11. С. 10–14.
7. *Монахов В. С., Чирик И. К.* О p-сверхразрешимости конечной факторизуемой группы с нормальными сомножителями // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 3. С. 256–267.
8. *Between nilpotent and solvable* (M. Weinstein, ed.). Passaic: Polygonal Publ. House, 1982.
9. *Монахов В. С., Чирик И. К.* О p-сверхразрешимом корадикале произведения нормальных p-сверхразрешимых подгрупп // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2015. Т. 23, № 2. С. 88–96.
10. *Guo W., Kondrat'ev A. S.* Finite minimal non-supersolvable groups decomposable into the product of two normal supersolvable subgroups // Commun. Math. Stat. 2015. V. 3. P. 285–290.

Статья поступила 6 апреля 2016 г.

Монахов Виктор Степанович
Гомельский гос. университет им. Ф. Скорины,
ул. Советская, 104, Гомель 246050, Беларусь
Victor.Monakhov@gmail.com

Чирик Ирина Константиновна
Гомельский инженерный институт МЧС Республики Беларусь,
пр. Речицкий, 35А, Гомель 246032, Беларусь
chyrykira@mail.ru